Lezione 2.

Raggiungibilità e controllabilità

Schema della lezione

1. Raggiungibilità di un sistema lineare stazionario a tempo discreto
2. Controllabilità di un sistema lineare stazionario a tempo discreto
3. Matlab

Ripasso

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \qquad x(0) = x_0 \qquad u(k),\ k \geq 0$$

Movimento dello stato

$$x(k) = \underbrace{A^k x_0}_{x_l(k)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u(i)}_{x_f(k)} \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Movimento libero dello stato

Movimento forzato dello stato

1. Raggiungibilità di sistemi LTI (a tempo discreto)

Si consideri il seguente sistema LTI a tempo discreto SISO

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \qquad (1.1) \qquad x \in \Re^n$$

Definizione 1.1 - Stato raggiungibile

Uno stato $\breve{x}$ del sistema (1.1) si dice **raggiungibile** se esistono

- un istante di tempo finito $\tilde{k} > 0$
- un ingresso $\tilde{u}(k),\ 0 \le k \le \tilde{k} - 1$

tali che, detto $x_f(k),\ 0 \le k \le \tilde{k}$ il movimento forzato dello stato generato da $\tilde{u}(k)$ risulti

$$x_f(\tilde{k}) = \sum_{i=0}^{\tilde{k}-1} A^{\tilde{k}-i-1} B\tilde{u}(i) = \breve{x}$$

Definizione 1.2 - Sottospazio di raggiungibilità

Si definisce **sottospazio di raggiungibilità** X^R il sottoinsieme dello spazio di stato i cui elementi sono stati raggiungibili.

Definizione 1.3 - Sistema completamente raggiungibile

Un sistema i cui stati siano tutti raggiungibili si dice **completamente raggiungibile**.

Nota Bene

Il sottospazio di raggiungibilità di un sistema **completamente raggiungibile** coincide con l'intero spazio di stato.

Teorema 1.1

Il sistema (1.1) è completamente raggiungibile se e solo se il rango della **matrice di raggiungibilità** M_r è pari all'ordine n del sistema, dove:

$$M_r = \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B & \cdots & A^{n-1} B \end{bmatrix}$$

M_r ha dimensioni $n \times n$ (nel caso SISO)

Corollario

Il sottospazio di raggiungibilità X^R coincide con l'**immagine della matrice di raggiungibilità** M_r, cioè

$$X^R = \mathfrak{Im}(M_r) = \{x: x = M_r w \ \ \forall w \in \Re^n\}$$

(nel caso SISO)

Esempio

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Studiare la raggiungibilità al variare di α.

$$M_r = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & 2-\alpha \\ \alpha & -4+2\alpha \end{bmatrix}$$

Il rango di M_r è massimo se e solo se $\det M_r \neq 0$

$$\det M_r = -4 + 2\alpha - 2\alpha + \alpha^2 = \alpha^2 - 4$$

Il sistema è completamente raggiungibile se e solo se $\alpha \neq \pm 2$

In questo caso il sottospazio di raggiungibilità X^R coincide con l'intero spazio di stato, cioè $X^R = R^2$

Si analizzi il caso critico $\alpha=-2$

$$M_r = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$$

Si nota subito che la seconda colonna è il quadruplo della prima e quindi M_r non ha rango pieno ed il sistema non è completamente raggiungibile.

Si calcoli il sottospazio di raggiungibilità X^R. Per definizione

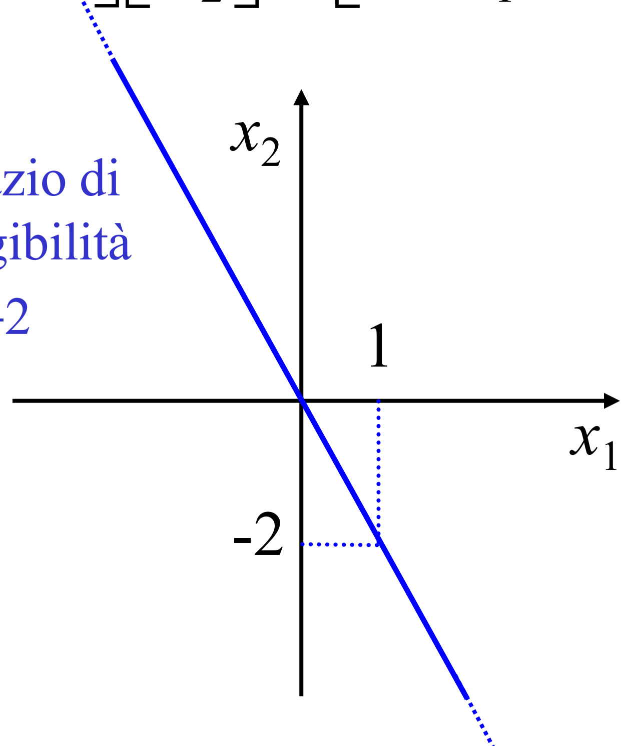
$$X^R = \mathfrak{Im}(M_r) = \{x : x = M_r w \;\; \forall w \in \Re^2\}$$

Quindi $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$

$x \in X^R$, $x = M_r w$, per ogni w

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 + 4w_2 \\ -2w_1 - 8w_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = w_1 + 4w_2 \\ x_2 = -2w_1 - 8w_2 = -2x_1 \end{cases}$$

Sottospazio di raggiungibilità per $\alpha = -2$



$$\begin{cases} x_1 \text{ qualsiasi} \\ x_2 = -2x_1 \end{cases}$$

Per il caso critico α=2

$$M_r = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

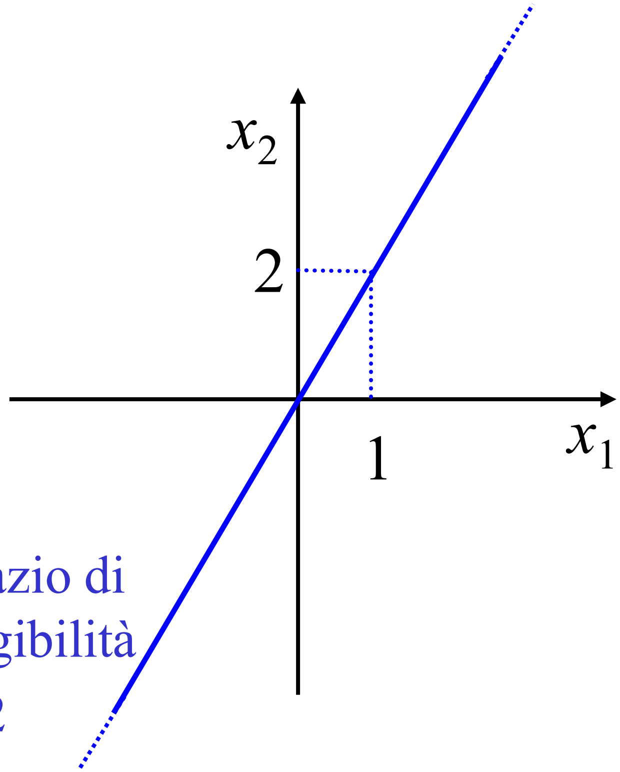
Il rango di M_r è 1 e quindi il sistema non è completamente raggiungibile.

Si calcoli il sottospazio di raggiungibilità X^R.

$x \in X^R$, $x=M_r w$, per ogni w

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ 2w_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = w_1 \\ x_2 = 2w_1 = 2x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \ \text{qualsiasi} \\ x_2 = 2x_1 \end{cases}$$



Sottospazio di raggiungibilità per α=2

Si calcoli la funzione di trasferimento (supponendo $y(k)=x_1(k)$)

$$W(z)=C(zI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z-2 & 1\\ 4 & z-2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ \alpha\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{z^2-4z}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z-2 & -1\\ -4 & z-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \alpha\end{bmatrix}=\frac{z-2-\alpha}{z^2-4z}$$

Giustamente, per $\alpha=\pm 2$ c'è una cancellazione!

Si osservi che, usando una qualsiasi altra trasformazione di uscita, non sarebbe cambiato nulla!

Esempio numerico

Definiamo il sistema da studiare

```
>> A=[-2 3; 0 -5]

A =

    -2     3
     0    -5

>> B=[1;3]

B =

     1
     3
```

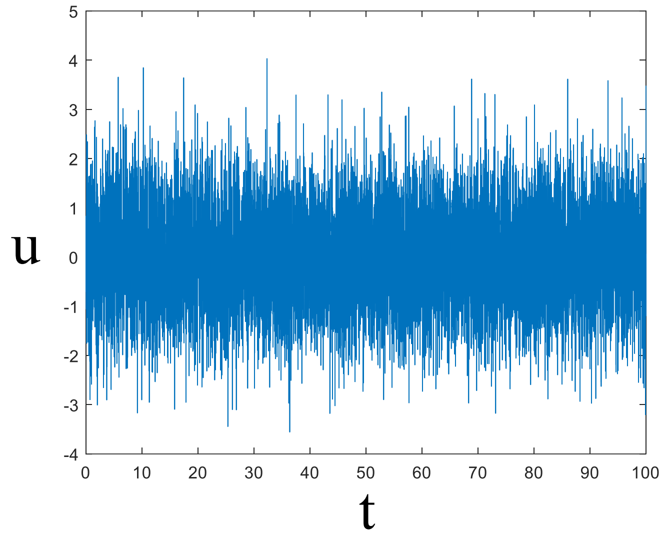
```
>> C=eye(2)

C =

     1     0
     0     1

>> D=[0;0]

D =

     0
     0
```

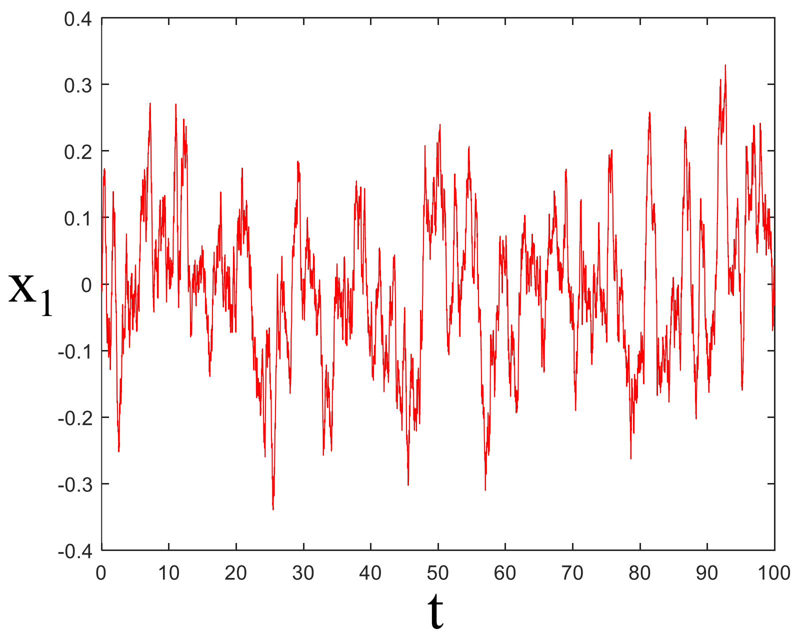
```
>> Mr=[B,A*B]

Mr =

     1     7
     3   -15

>> det(Mr)

ans =

   -36
```

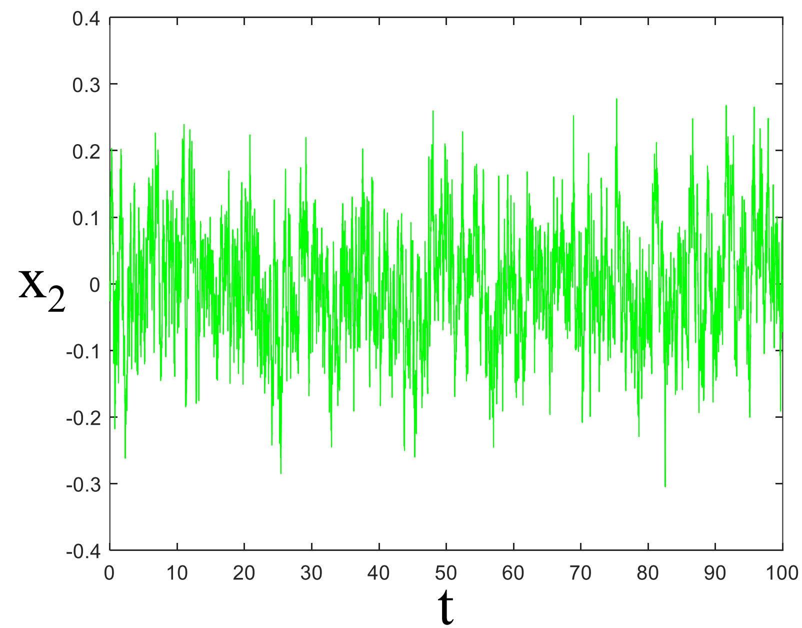
Il sistema è completamente raggiungibile.

Proviamo a dare in ingresso al sistema un ingresso casuale

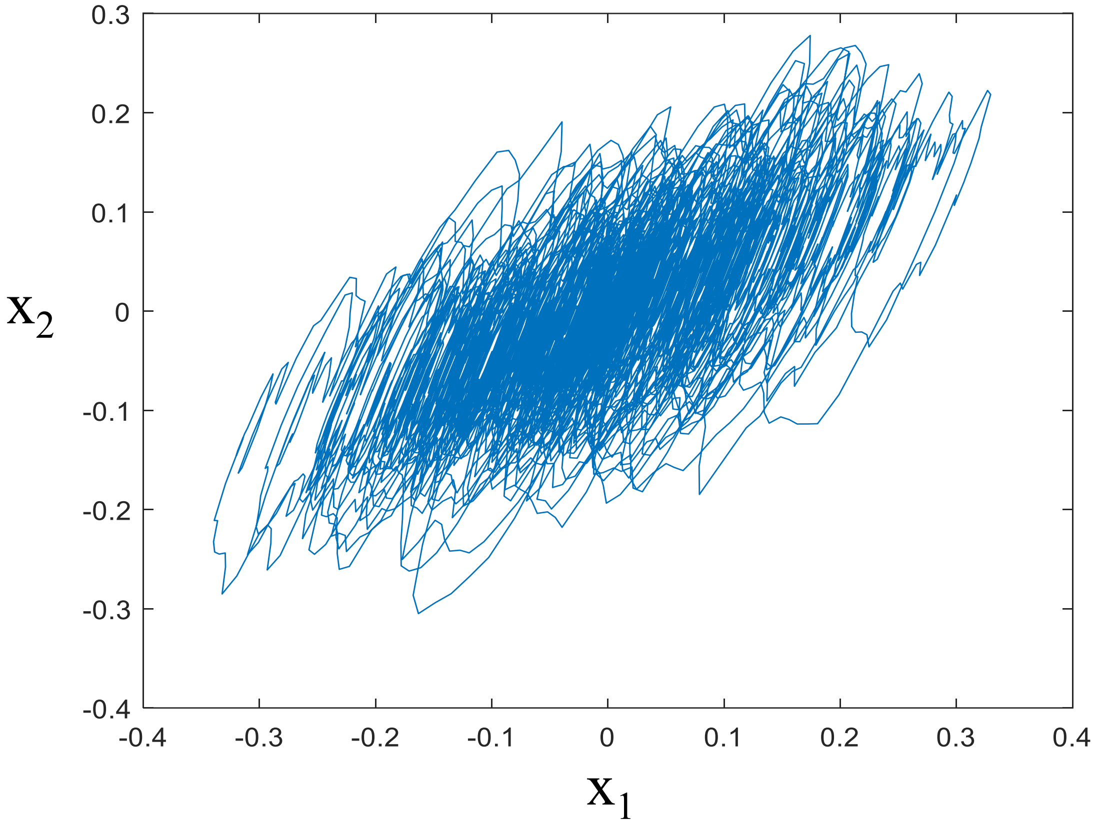
```
>> G=ss(A,B,C,D);
>> t=0:.01:100;
>> u=randn(size(t));
>> y=lsim(G,u,t);
>> plot(y(:,1),y(:,2))
```







Disegnamo ora la traiettoria nello spazio di stato (x_2 vs x_1)



E' empirico! Ma si nota che la traiettoria "occupa" tutto lo spazio di stato.

Ora modifichiamo la matrice B di ingresso in modo da rendere il sistema non completamente raggiungibile (è un sistema diverso!!).

```
>> a=sym('a');
>> Bs=[1;a];

>> Mrs=[Bs,A*Bs]
 Mrs =
 [ 1, 3*a - 2]
[ a,    -5*a]

 >> det(Mrs)

 ans =
 - 3*a^2 - 3*a

 >> roots([-3 -3 0])

ans =
     0
    -1
```

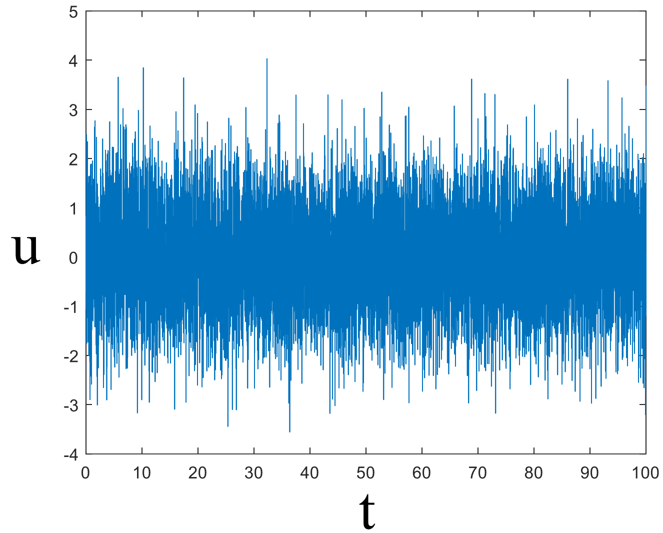
Quindi per a=−1 il sistema è non completamente raggiungibile.

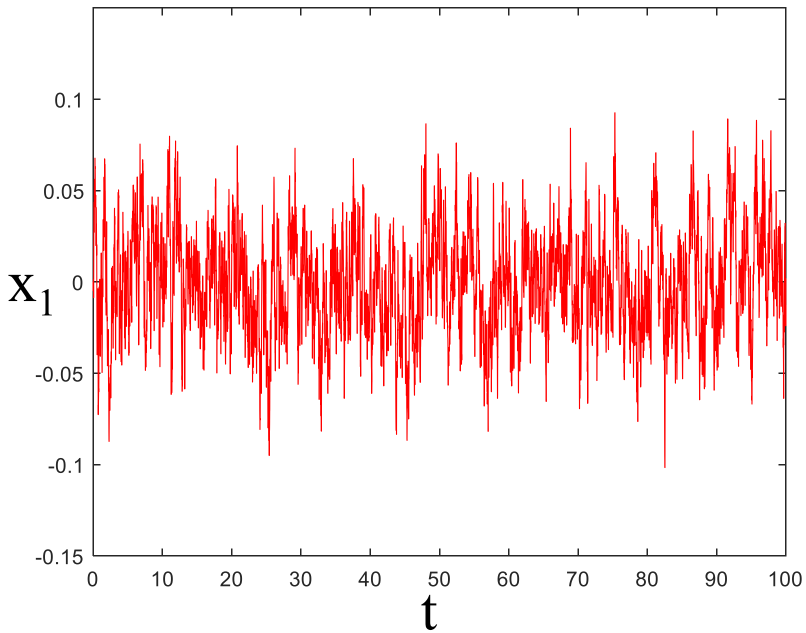
```
>> A
A =
    -2     3
     0    -5

>> B=[1;-1]
B =
     1
    -1

>> Mr=[B,A*B]
Mr =
     1    -5
    -1     5

>> rank(Mr)
ans =
     1
```

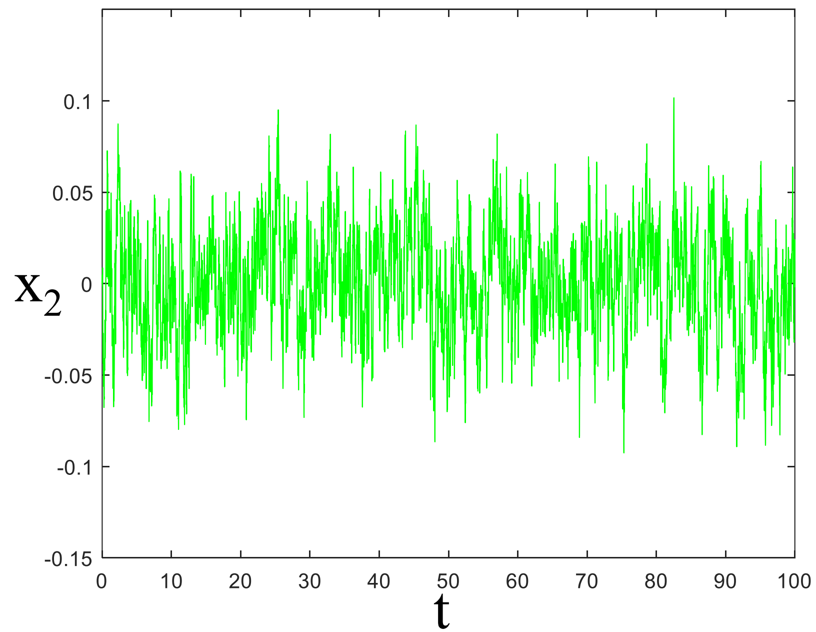
Il sistema non è completamente raggiungibile.

Proviamo a dare in ingresso al sistema lo stesso ingresso casuale di prima

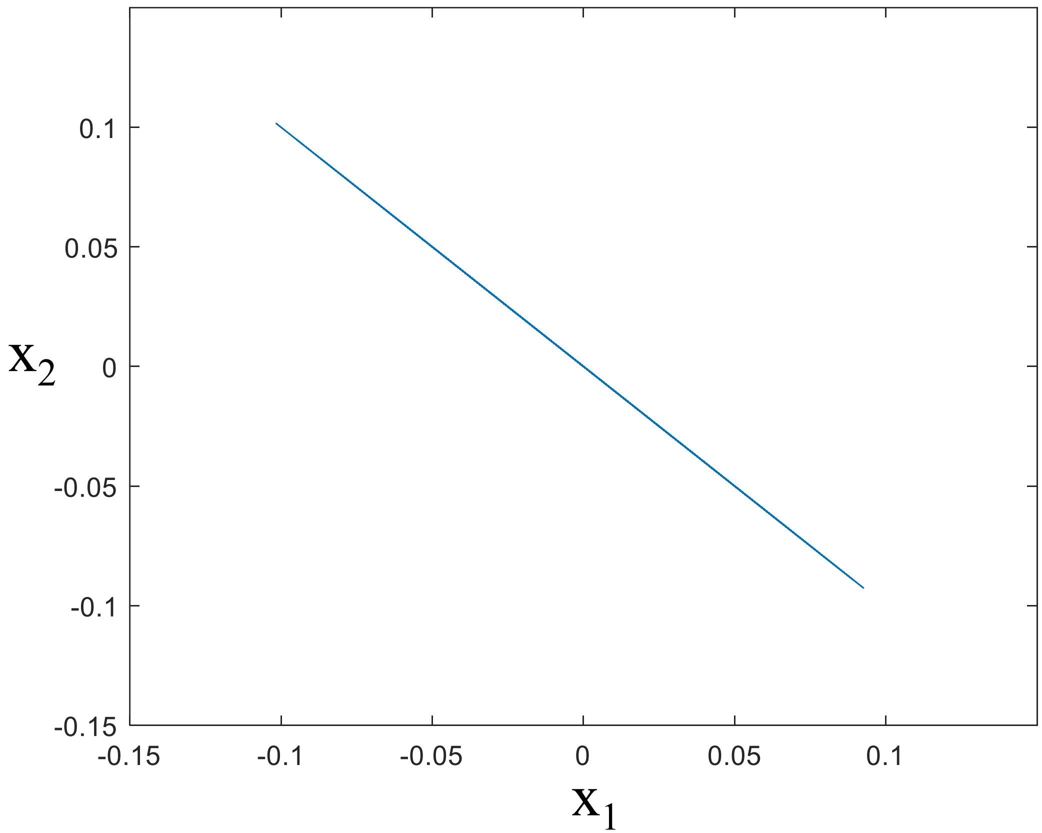
```
>> G=ss(A,B,C,D);
>> y=lsim(G,u,t);
>> plot(y(:,1),y(:,2))
```







Disegnamo ora la traiettoria nello spazio di stato (x_2 vs x_1)

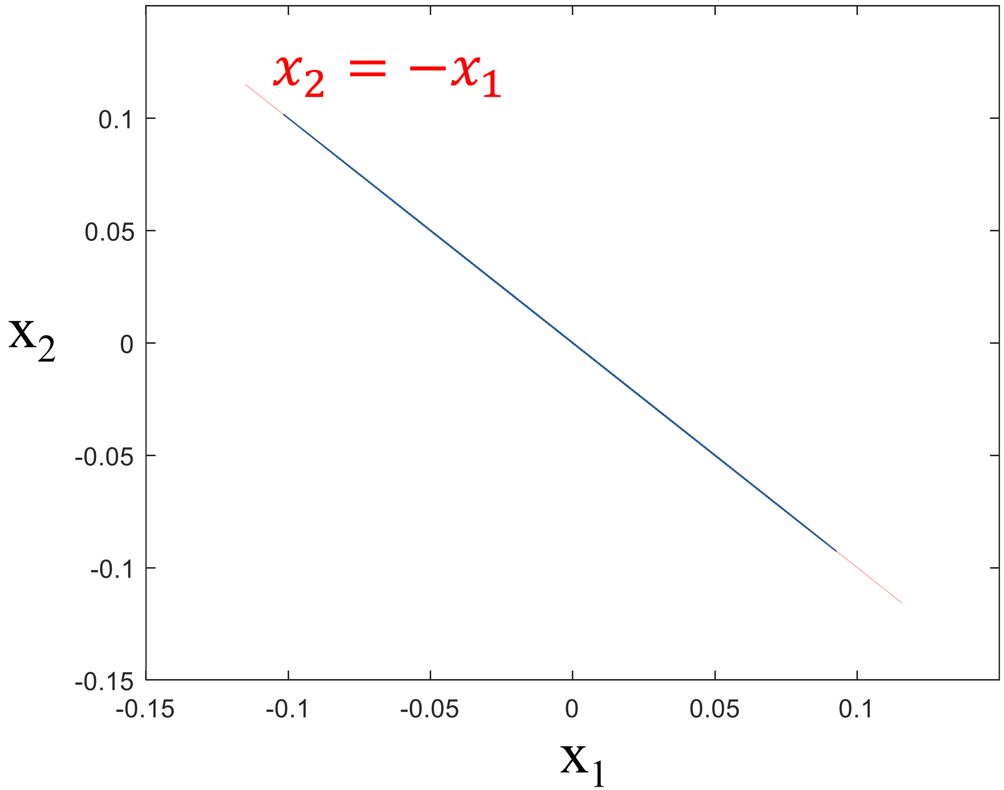


E' empirico! Ma si nota che la traiettoria "occupa" solo un sottospazio dello spazio di stato. Sarà il sottospazio di raggiungibilità?

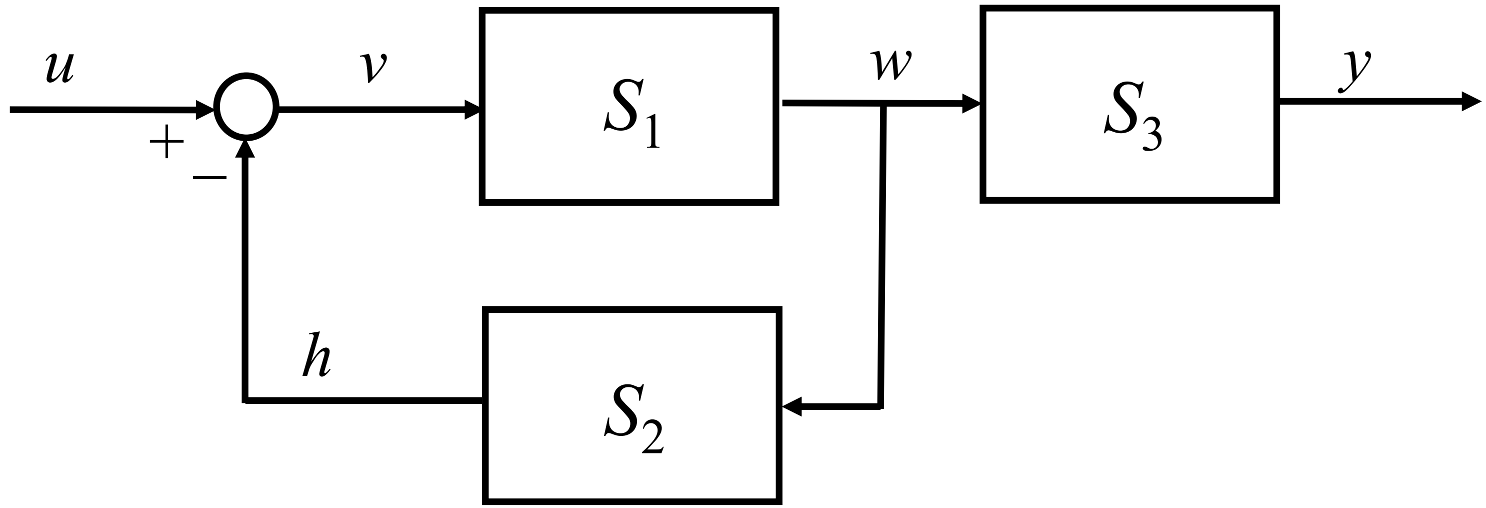
$$M_r = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow x = M_r w \Rightarrow \begin{cases} x_1 = w_1 - 5w_2 \\ x_2 = -w_1 + 5w_2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$x_2 = -x_1$$



Esempio



$$S_1 \begin{cases} x_1(k+1) = \alpha x_1(k) + v(k) \\ w(k) = x_1(k) \end{cases}$$

$$S_2 \begin{cases} x_2(k+1) = -x_2(k) + 2w(k) \\ h(k) = x_2(k) \end{cases}$$

$$S_3 \begin{cases} x_3(k+1) = -x_3(k) + 3w(k) \\ y(k) = x_3(k) \end{cases}$$

Il sistema complessivo è

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \alpha x_1(k) + v(k) = \alpha x_1(k) - x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = -x_2(k) + 2x_1(k) \\ x_3(k+1) = -x_3(k) + 3x_1(k) \\ y(k) = x_3(k) \end{cases}$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

Studiare la raggiungibilità al variare di α.

$$M_r = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 - 2 \\ 0 & 2 & 2\alpha - 2 \\ 0 & 3 & 3\alpha - 3 \end{bmatrix}$$

Il rango di M_r è massimo se e solo se $\det M_r \neq 0$

$$\det M_r = -6 + 6\alpha - 6\alpha + 6 = 0$$

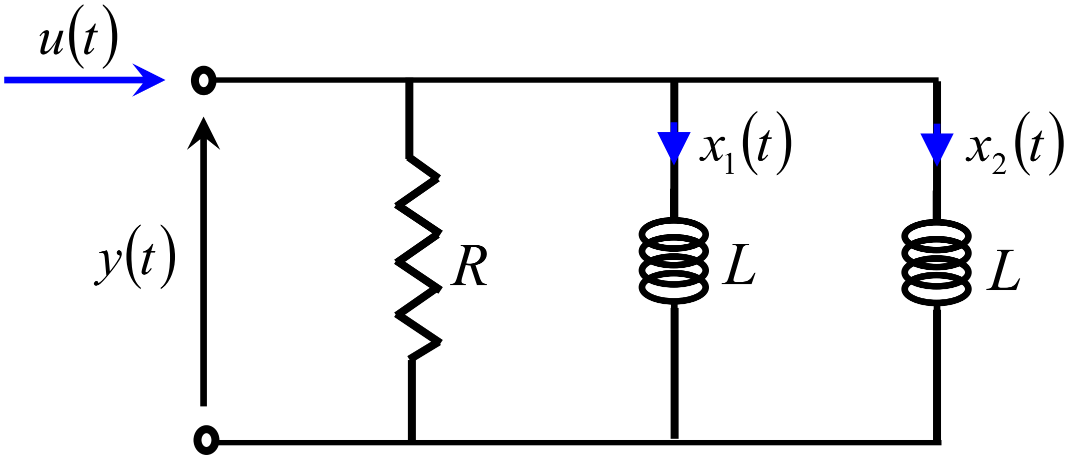
Non esiste alcun valore di α per cui il sistema è completamente raggiungibile.

Il numero di colonne linearmente indipendenti in M_r è 2, quindi $\dim X^R = 2$.

Esempio

Anche a tempo continuo!!
(con qualche differenza)

Riprendendo l'esempio iniziale:



$$\begin{cases} L\dot{x}_1(t) = R\big(u(t) - x_1(t) - x_2(t)\big) \\ L\dot{x}_2(t) = R\big(u(t) - x_1(t) - x_2(t)\big) \\ y(t) = R\big(u(t) - x_1(t) - x_2(t)\big) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{R}{L} \\ -\frac{R}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ \frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -R & -R \end{bmatrix} \qquad D = R$$

La matrice di raggiungibilità è:

$$M_r = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{R}{L} & -\dfrac{2R^2}{L^2} \\ \dfrac{R}{L} & -\dfrac{2R^2}{L^2} \end{bmatrix} \qquad \det M_r = 0$$

rango di $M_r = 1$

Il sistema non è completamente raggiungibile.

2. Controllabilità di sistemi LTI (a tempo discreto)

Si consideri il seguente sistema LTI a tempo discreto

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \qquad (2.1)$$

Definizione 2.1 - Stato controllabile

Uno stato $\breve{x}$ del sistema (2.1) si dice **controllabile** se esistono

- un istante di tempo finito $\tilde{k} > 0$
- un ingresso $\tilde{u}(k),\ 0 \le k \le \tilde{k} - 1$

tali che il movimento dello stato generato da $\tilde{u}(k)$ con condizione iniziale $\breve{x}$ risulti nullo, cioè

$$x(\tilde{k}) = A^{\tilde{k}}\breve{x} + \sum_{i=0}^{\tilde{k}-1} A^{\tilde{k}-i-1}B\tilde{u}(i) = 0$$

Definizione 2.2 - Sottospazio di controllabilità

Si definisce **sottospazio di controllabilità** X^C il sottoinsieme dello spazio di stato i cui elementi sono stati controllabili.

Definizione 2.3 - Sistema completamente controllabile

Un sistema i cui stati siano tutti controllabili si dice **completamente controllabile**.

Nota Bene

Il sottospazio di controllabilità di un sistema **completamente controllabile** coincide con l'intero spazio di stato.

Teorema 2.1

Se un sistema è completamente raggiungibile allora è anche completamente controllabile. Il viceversa è vero solo se la matrice A è non singolare .

A tempo discreto

Raggiungibilità **Controllabilità**

Solo se $\det A \neq 0$

A tempo continuo **Raggiungibilità** $\Leftrightarrow$ **Controllabilità**

Conseguenze

- Per verificare se un sistema è completamente controllabile basta verificare se la matrice di raggiungibilità M_r ha rango pieno.

- Il sottospazio di controllabilità è anch'esso l'immagine della matrice di raggiungibilità M_r.

Esempio

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Studiare la <u>controllabilità</u> al variare di α.

Il sistema è completamente raggiungibile se e solo se $\alpha \neq \pm 2$ (vedi Esempio precedente).

A tempo discreto la raggiungibilità implica la controllabilità (vedi Teo. 2.1), quindi il sistema è anche completamente controllabile se e solo se $\alpha \neq \pm 2$.

In questo caso il sottospazio di controllabilità X^C coincide con l'intero spazio di stato, cioè $X^C = R^2$

Nota finale

A conferma del fatto che raggiungibilità e controllabilità sono due **proprietà strutturali** si osservi che le proprietà della matrice di raggiungibilità sono indipendenti dalla particolare rappresentazione di stato del sistema. Infatti, si considerino due sistemi

$$(A, B, C, D) \sim (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$$

legati dalla trasformazione di equivalenza *T*.

Si consideri la matrice di raggiungibilità di $(\tilde{A}, \tilde{B})$. Si ha:

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_r &= [\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \tilde{A}^2\tilde{B} \quad \cdots \quad \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}] = \\
&= [TB \quad TAT^{-1}TB \quad TA^2T^{-1}TB \quad \cdots \quad TA^{n-1}T^{-1}TB] = \\
&= T[B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] = TM_r
\end{aligned}$$

$$\boxed{\tilde{M}_r = TM_r}$$

$$\text{rango di } M_r = \text{rango di } \tilde{M}_r$$

4. Matlab

Calcolo della matrice di raggiungibilità

```
>> Mr=ctrb(A,B)
```

Calcolo del rango di una matrice

```
>> rank(Mr)
```

Calcola una base ortonormale per il range (lo span o immagine) di una matrice

```
>> Q=orth(Mr)
```