Corso di Automazione industriale

Lezione 13

Reti di Petri – Proprietà

Proprietà

Raggiungibilità

Una marcatura M^* si dice **raggiungibile** a partire da una marcatura M se esiste almeno una sequenza di transizioni tali che facendole scattare a partire da M si ottenga M^*.

Si definisce **insieme di raggiungibilità** $\mathrm{R}(N, M_0)$ di una rete N con marcatura iniziale M_0 l'insieme più piccolo di marcature tale che:

- $M_0 \in \mathrm{R}(N, M_0)$ e
- se $M^* \in \mathrm{R}(N, M_0)$ e $\exists t \in T$ tale che $M^*[t > M^{**}$, allora $M^{**} \in \mathrm{R}(N, M_0)$

Proprietà

Reversibilità

Una rete di Petri N con marcatura iniziale M_0 è detta **reversibile** se $\forall M \in \mathrm{R}(N, M_0)$, $M_0 \in \mathrm{R}(N, M)$, ciò significa che per ogni marcatura M raggiungibile da M_0, si ha che M_0 è raggiungibile da M.

Una marcatura M della rete è detta **home state** se $\forall M^* \in \mathrm{R}(N, M_0)$, $M \in \mathrm{R}(N, M^*)$, ciò significa che per ogni marcatura M^* raggiungibile da M_0, si ha che M è raggiungibile da M^*.

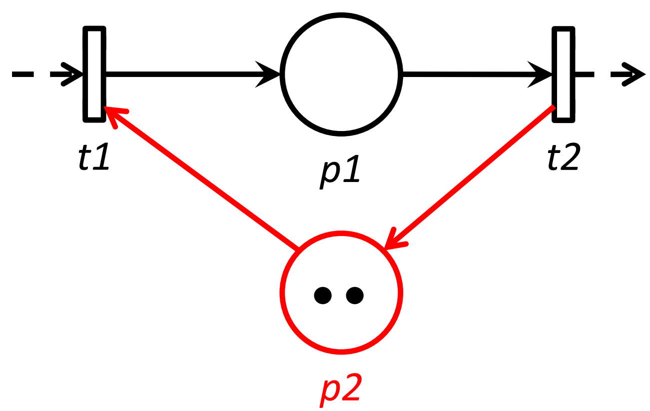
Proprietà

Limitatezza

Un posto p di una rete si dice **k-limitato** se, in tutte le marcature raggiungibili a partire da quella iniziale, il numero di gettoni presenti del posto non supera mai il valore k.

Una rete si dice **k-limitata** se tutti i posti sono k-limitati.

Una rete si dice **limitata** se è k-limitata per almeno un valore finito di k.



Proprietà

Binarietà o sicurezza

Una rete **k-limitata** con k=1 si dice **binaria** o **sicura**.

Ne deriva che, tutte le possibili marcature della rete contengono solo 0 o 1.

Queste reti si prestano bene al coordinamento di unità semplici (un gruppo di posti rappresenta tutti gli stati possibili di un dispositivo e solo uno dei posti alla volta è marcato con un gettone, a seconda dello stato in cui si trova il dispositivo).

Proprietà

Conservatività

Quando le reti di Petri sono usate per sistemi di allocazione di risorse è importante che i gettoni (che rappresentano le risorse) si conservino.

Una rete con marcatura iniziale M_0 si dice **conservativa con riferimento ad un vettore peso** $W = [w_1 w_2 \ldots\ w_P] \geq 0$ se $\forall M \in R(N, M_0)$ vale l'equazione:

$$\sum_i w_i m_i = \sum_i w_i m_0$$

Proprietà

__**Conservatività**__

Una rete di dice **conservativa** se è conservativa con riferimento ad un vettore $W > 0$.

Una rete si dice **strettamente conservativa** se è conservativa con riferimento ad un vettore peso $W = [1\ 1\ \dots 1]$.

Proprietà

Vivezza

Questa proprietà delle reti di Petri rappresenta se la rete può continuare ad evolvere a partire da un qualunque stato si trova oppure si blocca (tutta o in parte).

Un **transizione** t si dice **viva** se e solo se per ogni marcatura M raggiungibile dalla marcatura iniziale, esiste una marcatura M^* raggiungibile da essa, tale che t è abilitata in M^*.

Una **rete** si dice **viva** se tutte le sue transizioni sono vive.

Proprietà

Vivezza - significato

Se una transizione t è viva, vuol dire che esiste una sequenza di transizioni che porta da M_0 ad M^* in cui essa è abilitata. Se t scatta ci si troverà in una marcatura M^{**}, che per definizione è raggiungibile da M_0. Per definizione di transizione viva, esisterà anche per M^{**} una marcatura raggiungibile in cui t risulta nuovamente abilitata, e così via.

Una transizione viva può scattare infinite volte!

In una rete viva tutte le transizioni possono scattare infinite volte!

La vivezza è quindi una condizione estremamente forte.

Proprietà

<u>Vivezza - osservazioni</u>

Una rete non deve essere necessariamente viva per continuare ad evolvere.

Una marcatura M si dice morta se e solo se nessuna transizione è abilitata in M.

N.B.: Reversibilità, limitatezza e vivezza sono proprietà indipendenti.

Albero di raggiungibilità

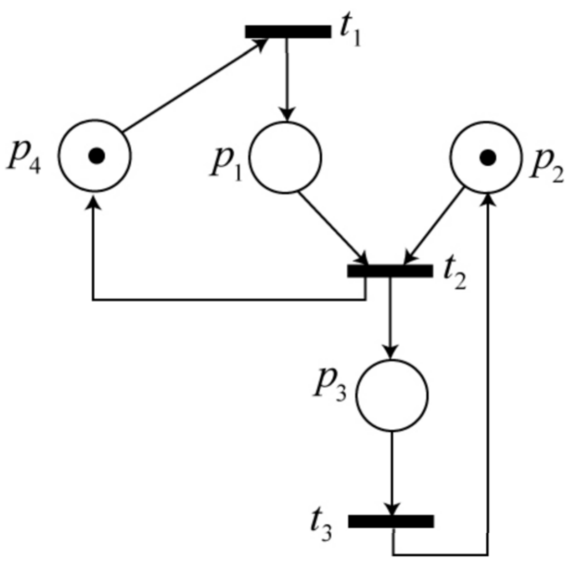
Per poter valutare alcune delle proprietà sopra descritte si ricorre all'**albero di raggiungibilità**.

L'**albero di raggiungibilità** è uno strumento grafico che rappresenta visivamente tutte le marcature raggiungibili e le sequenze di scatti.

Albero di raggiungibilità

- Il nodo radice rappresenta la marcatura iniziale della rete di petri
- Una foglia dell-albero rappresenta una marcatura già visitata oppure una marcatura morta
- I nodi a livello k indicano le marcature raggiungibili in k passi
- Gli alberi permettono di valutare:
    - Raggiungibilità
    - Reversibilità
    - Vivezza
    - Limitatezza

Albero di raggiungibilità - esempio



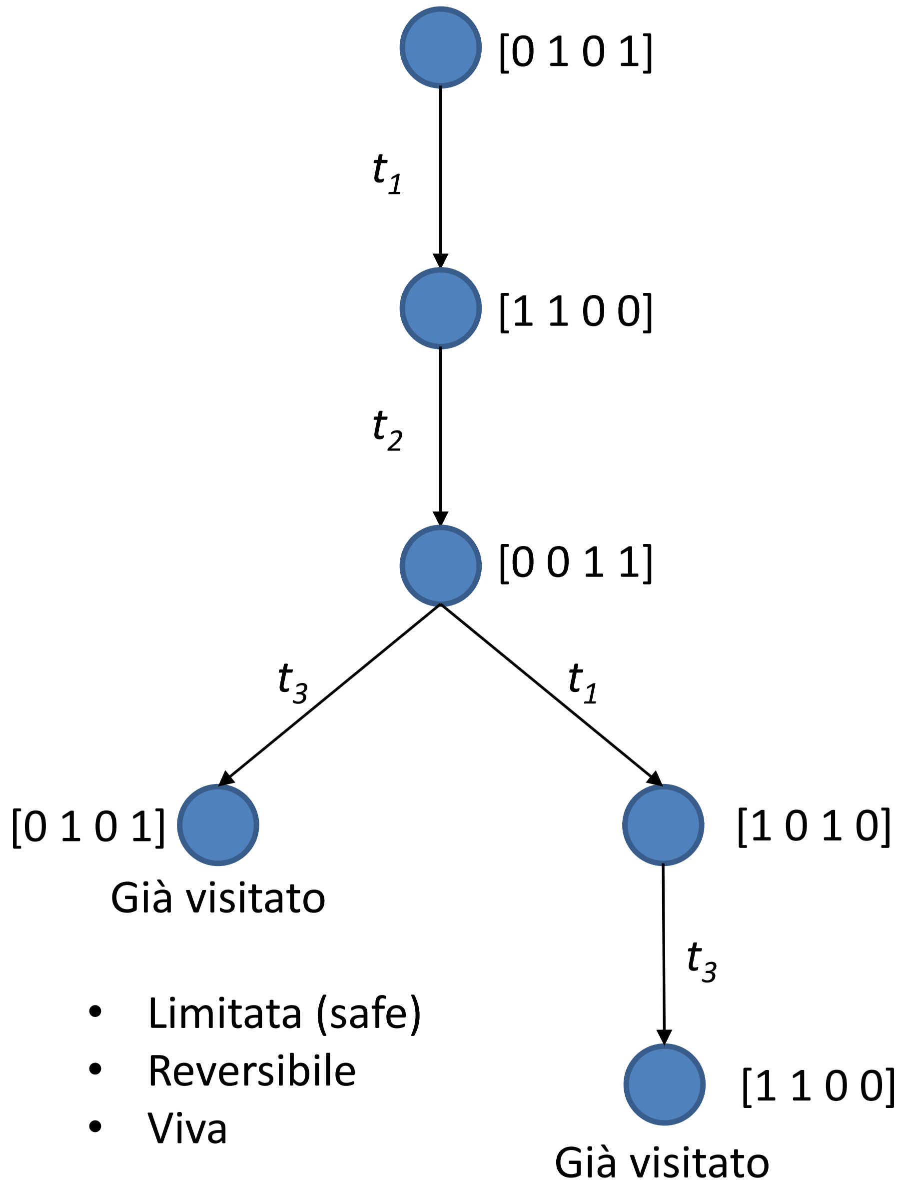
Client/server

p1 = buffer occupato

p2 = server libero

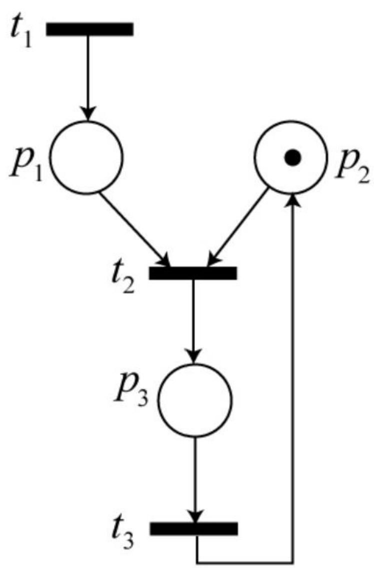
p3 = server occupato

p4 = buffer libero



- Limitata (safe)
- Reversibile
- Viva

Albero di raggiungibilità - esempio



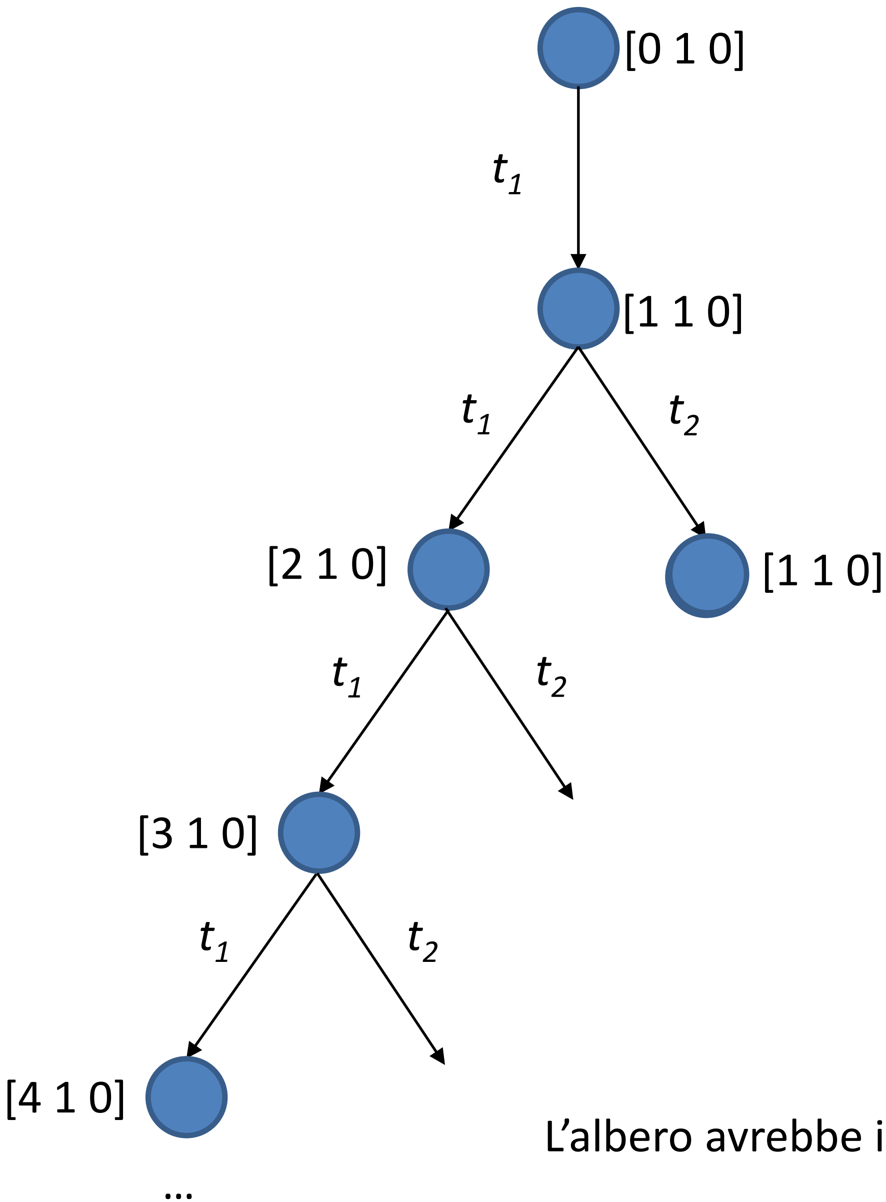
Client/server

p1 = buffer occupato

p2 = server libero

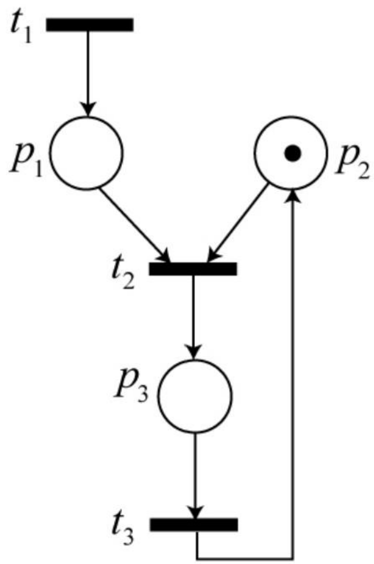
p3 = server occupato

~~p4 = buffer libero~~



L'albero avrebbe infiniti nodi

Albero di raggiungibilità - esempio



Client/server

p1 = buffer occupato

p2 = server libero

p3 = server occupato

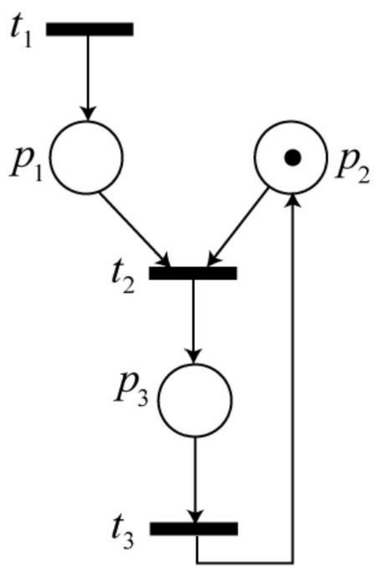
~~p4 = buffer libero~~

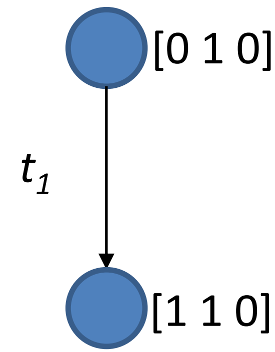
- Una sequenza di scatti S porta la rete da x a y
- Se y ricopre x (ha gli stessi token, tranne almeno uno che ne ha di più)
- In y la sequenza S sarà ancora ammissibile portando ad un accumulo infinito di token

Si dice che:

- Dati due nodi x e y (x generato prima di y)
- Y **ricopre** x se:
  - $y(p_i) \geq x(p_i)$ per ogni $i \in \{0,1, \dots |P|\}$
  - $y(p_j) > x(p_j)$ per almeno un j $\in \{0,1, \dots |P|\}$
- si sostituisce il simbolo ω alla marcatura dei posti per cui $y(p_j) > x(p_j)$ e si continua poi con la costruzione classica

Albero di raggiungibilità - esempio





Ricopre il nodo superiore

Client/server

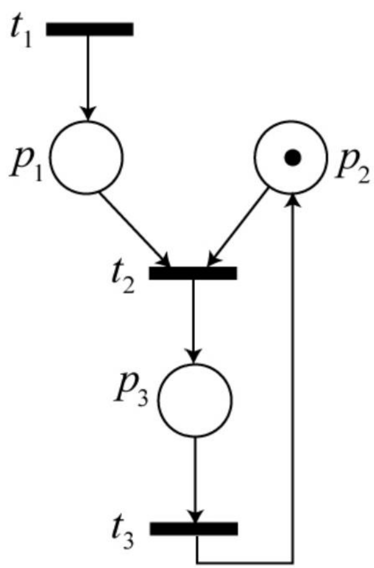
p1 = buffer occupato

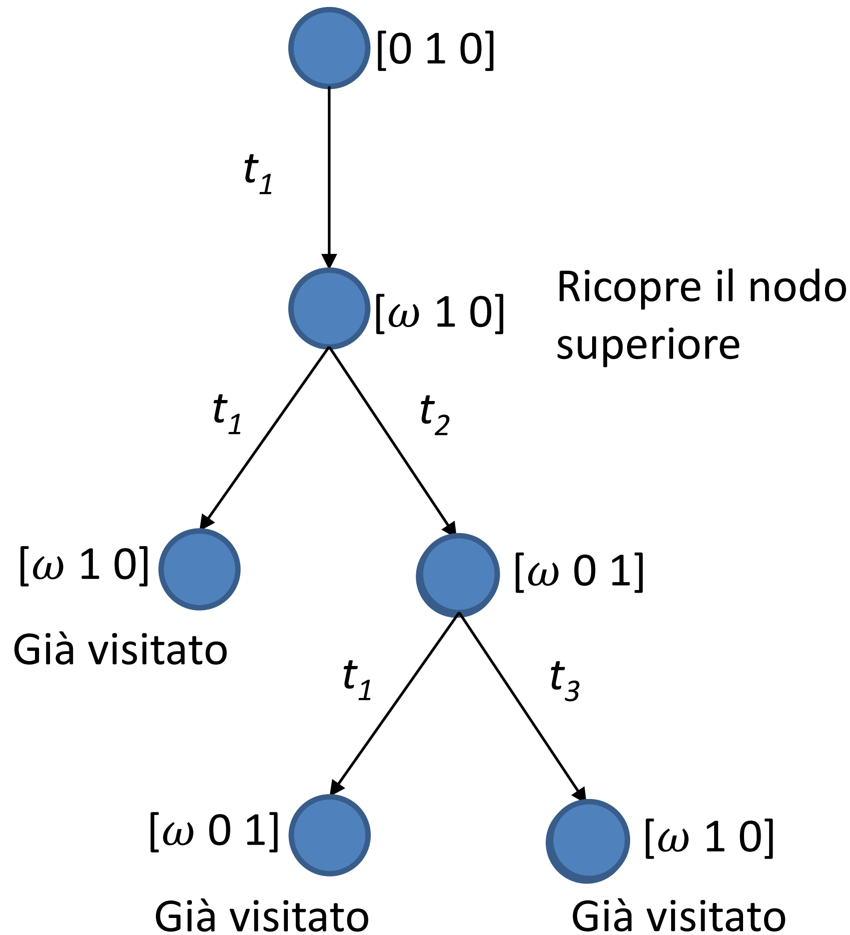
p2 = server libero

p3 = server occupato

~~p4 = buffer libero~~

Albero di raggiungibilità - esempio





Client/server

p1 = buffer occupato

p2 = server libero

p3 = server occupato

~~p4 = buffer libero~~

- Illimitata
- Reversibile
- Viva

Classi di reti di Petri

Imponendo dei vincoli sulla topologia del grafo, è possibile descrivere, con le reti di Petri:

- Macchine a stati (state machine, SM)
- Grafi marcati (marked graph, MG)
- Reti a scelta libera (free choice Petri net, FC)
- Reti a scelta estesa (extended free choice Petri net, EFC)
- Reti a scelta libera asimmetrica (asymmetric free choice Petri net, AFC)

Considereremo solo reti **ordinarie**, cioè con pesi uguali ad 1 (le altre reti sono dette **generalizzate**).

Macchina a stati

Una **macchina a stati** è una rete di Petri ordinaria in cui ogni transizione è limitata ad avere un solo posto in ingresso ed un solo posto in uscita.

- Il numero di gettoni nella rete non cambia mai, quindi la macchina a stati è una rete di Petri strettamente conservativa.
- L’insieme di raggiungibilità è finito, quindi una macchina a stati è equivalente ad un automa a stati finiti.
- Una macchina a stati contenente inizialmente solo un gettone è una rete binaria.
- Una macchina a stati è viva se e solo se è fortemente connessa (cioè se è possibile andare da un qualunque nodo ad un altro, seguendo la relazione di flusso) e se ha almeno un gettone.

Grafo marcato

Un **grafo marcato** è una rete di Petri ordinaria in cui ogni posto è limitato ad avere una sola transizione di ingresso ed una sola transizione di uscita.

- Un grafo marcato è vivo se e solo se ogni suo ciclo contiene almeno un posto marcato (ciclo: sequenza di nodi $x_1\ \mathrm{x}_2\ \ldots x_n, n \geq 2, t.c. x_i \bullet \supseteq \{x_{i+1}\}, i = 1, \ldots, n-1, e\ x_n \bullet \supseteq \{x_1\}$ - *il successore dell'ultimo nodo della sequenza è il primo nodo*).

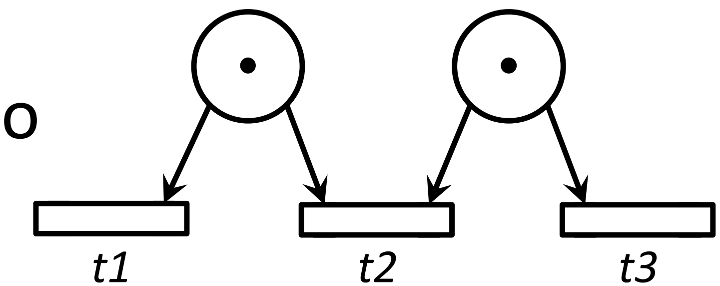
Rete a scelta libera

Definizione: in una rete di Petri in cui sono mescolati conflitto e concorrenza c'è **confusione**.

La confusione può essere:

- **Simmetrica**

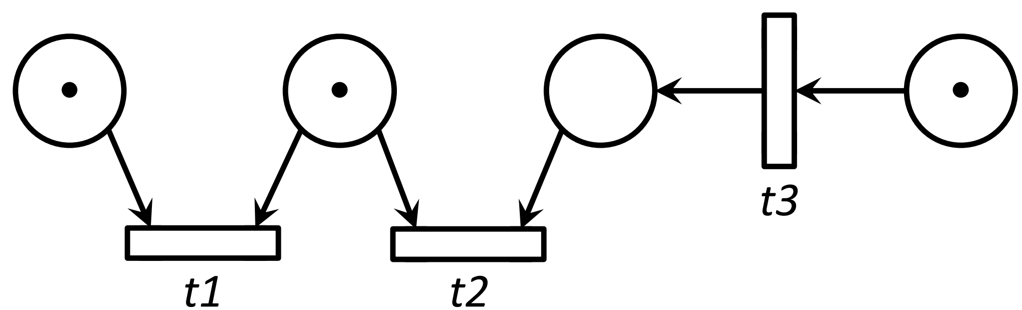
  t1 e *t3* sono concorrenti e nello stesso tempo sono in conflitto con *t2*



- **Asimmetrica**

  t1 e *t3* sono concorrenti;

  t1 e *t2* andranno in conflitto se *t3* scatterà prima di *t1*



Rete a scelta libera

Nei casi di confusione la scelta di quale transizione far scattare non è libera, ma dipende anche dalla marcatura di altri posti della rete (che non fanno parte dei pre-set delle transizioni in conflitto).

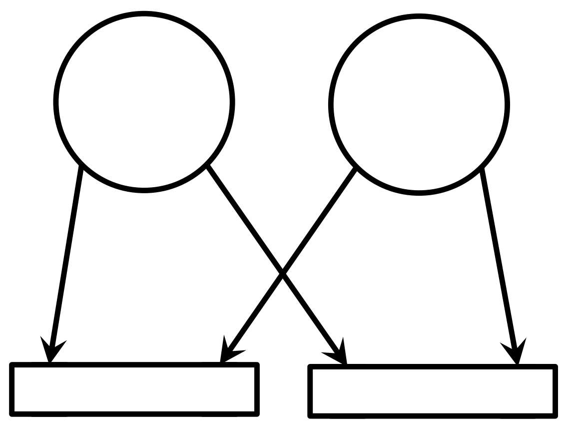
Una <u>**rete a scelta libera**</u> è una rete di Petri tale che, per ogni arco da un posto ad una transizione:

- O quel posto è l'unico posto in ingresso alla transizione
- O quella transizione è l'unica transizione in uscita da quel posto

N.B.: Le macchine a stati e i grafi marcati sono reti a scelta libera, non vale il viceversa.

Reti a scelta libera estesa

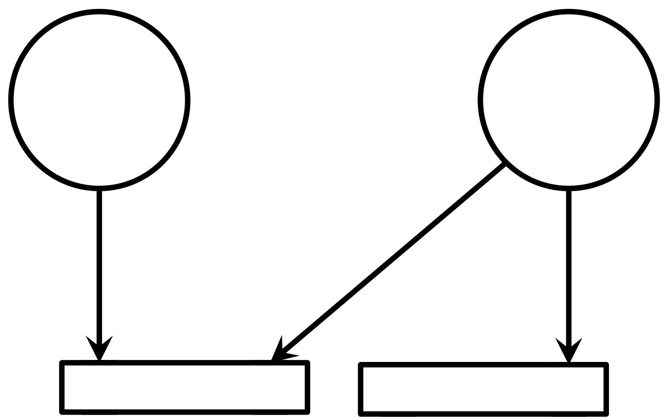
Una **rete a scelta libera estesa** è tale che se due posti hanno una transizione di uscita in comune, allora quei posti hanno le stesse transizioni d’uscita.



N.B.: Una rete a scelta libera è anche una rete a scelta libera estesa, ma non vale il viceversa.

Reti a scelta libera asimmetrica

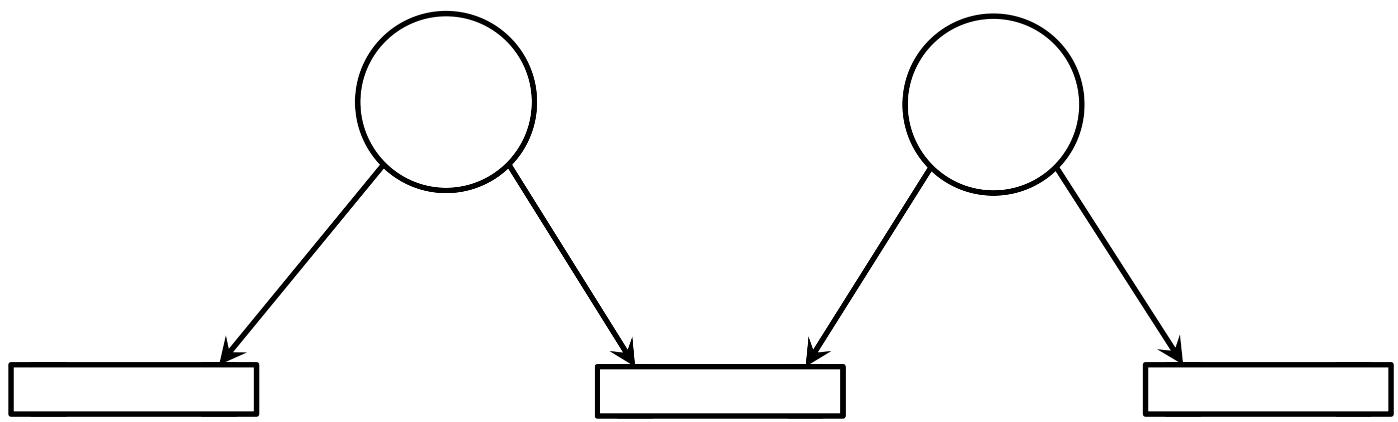
Una **<u>rete a scelta libera asimmetrica</u>** è tale che se due posti hanno una transizione di uscita in comune, l'insieme delle transizioni in uscita di un posto contiene quelle dell'altro.



N.B.: Una rete a scelta libera estesa è anche una rete a scelta libera asimmetrica, ma non vale il viceversa.

Rete ordinaria

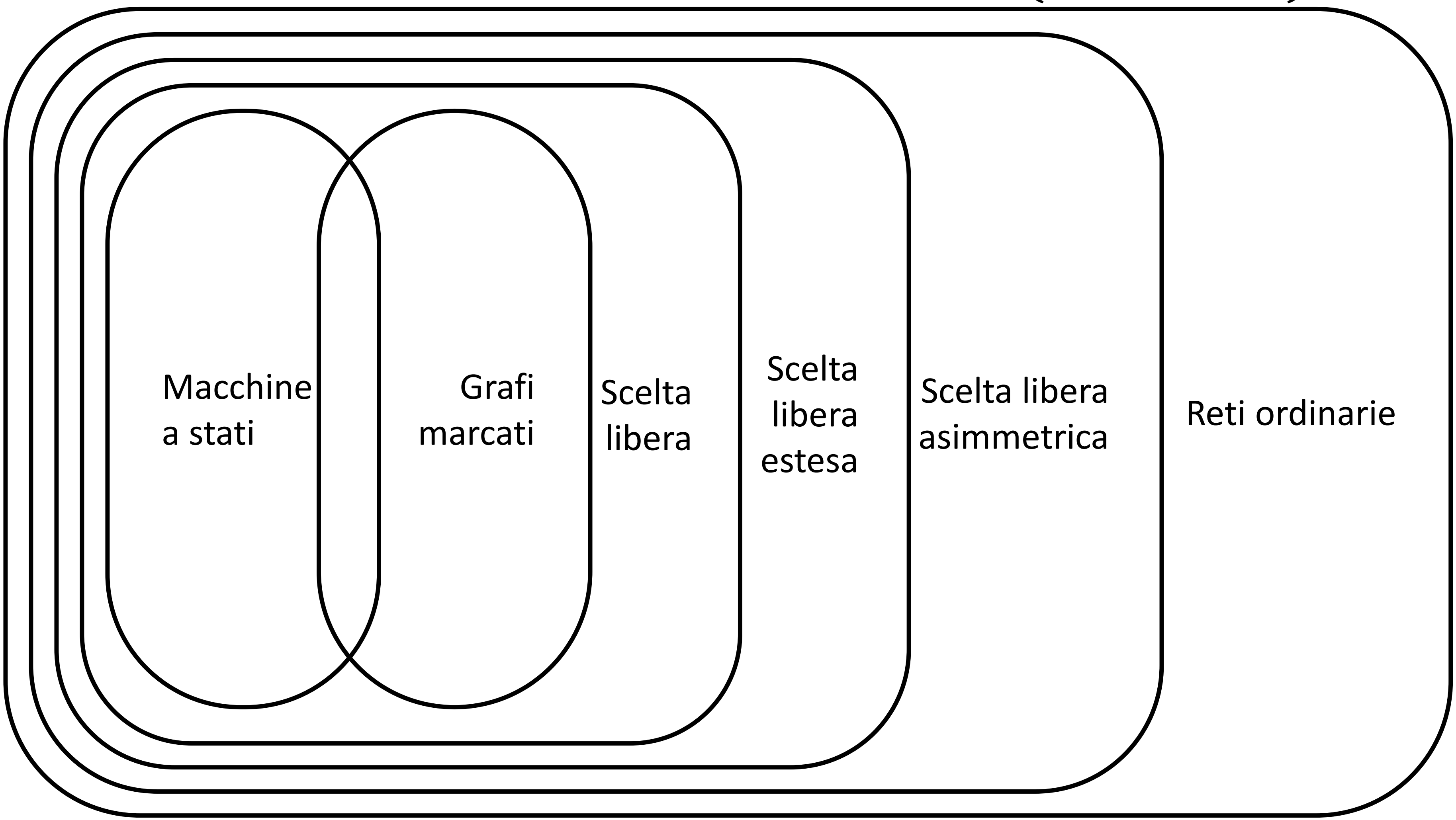
In una **rete ordinaria** è ammissibile anche una struttura come quella della figura sotto, incompatibile con tutte le definizioni viste in precedenza.



N.B.: Una rete a scelta libera asimmetrica è anche una rete ordinaria, ma non vale il viceversa.

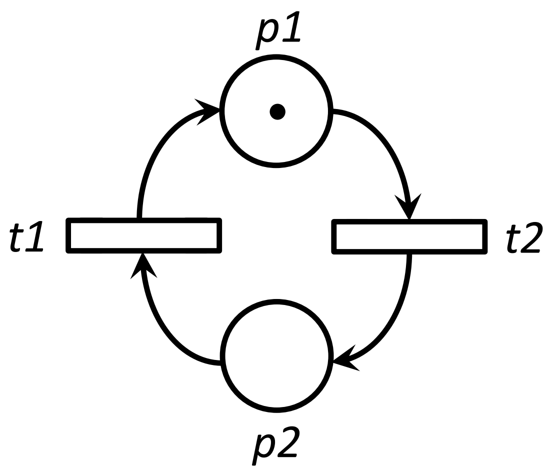
Riepilogo

$$Ordinarie \supset AFC \supset EFC \supset FC \supset (SM \cup MG)$$



Esempi

Esempio 1



Proprietà

- Limitatezza: SI
- Vivezza: SI
- Reversibilità: SI

Tipologia:

- SM: SI
- MG: SI
- FC: SI
- EFC: SI
- AFC: SI

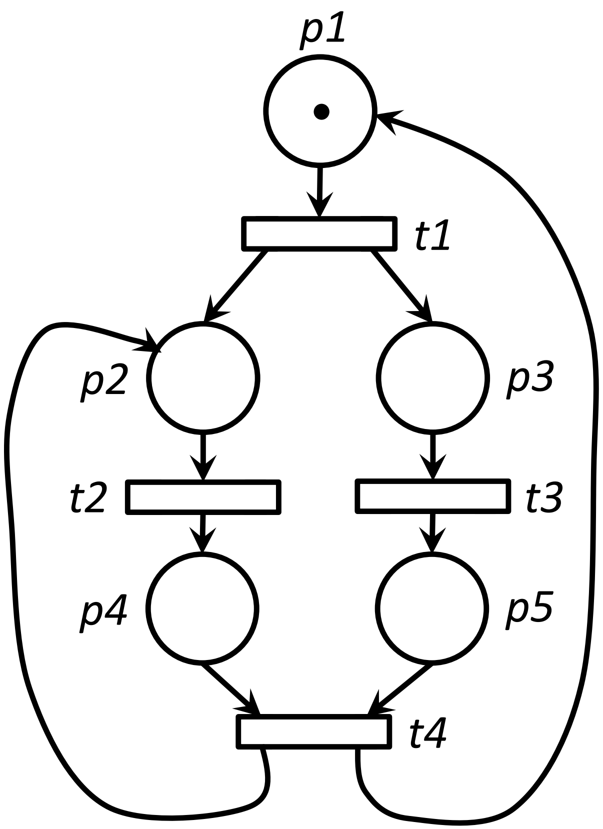
Siccome la rete di Petri è una macchina a stati, essa è strettamente conservativa.

Siccome contiene un solo gettone è una rete binaria.

Siccome è una SM fortemente connessa è viva.

Esempi

Esempio 2



Proprietà

- Limitatezza:
  NO, cfr. sequenza
  t1 t2 t3 t4
- Vivezza:
  SI

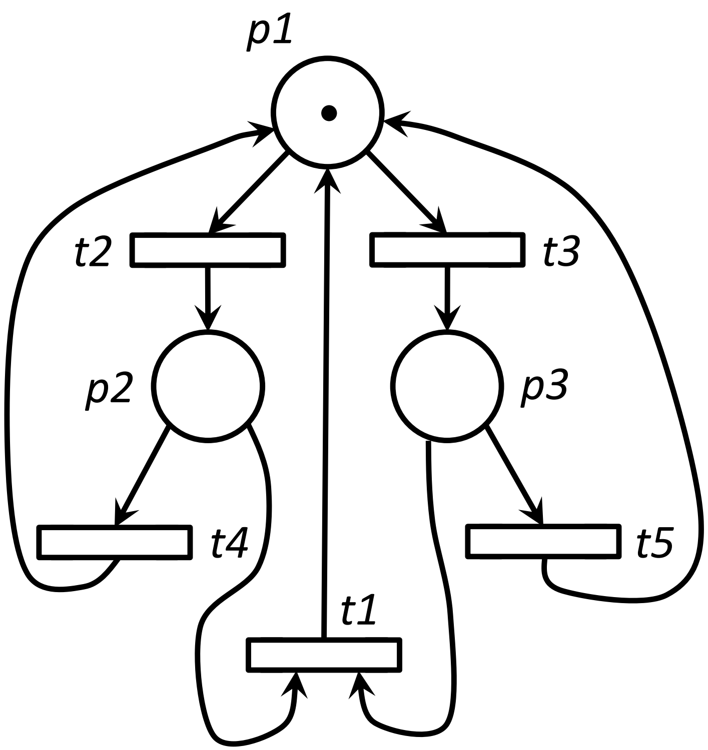
Tipologia:

- SM: NO
- MG: NO
- FC: SI
- EFC: SI
- AFC: SI

- Reversibilità:
  NO, per marcare nuovamente *p1* serve far scattare *t4*, esso aggiunge un gettone

Esempi

Esempio 3



Proprietà

- Limitatezza:
  SI
- Vivezza:
  NO, *t1* non può mai scattare
- Reversibilità:
  SI, eliminando t1, il resto della rete è una SM

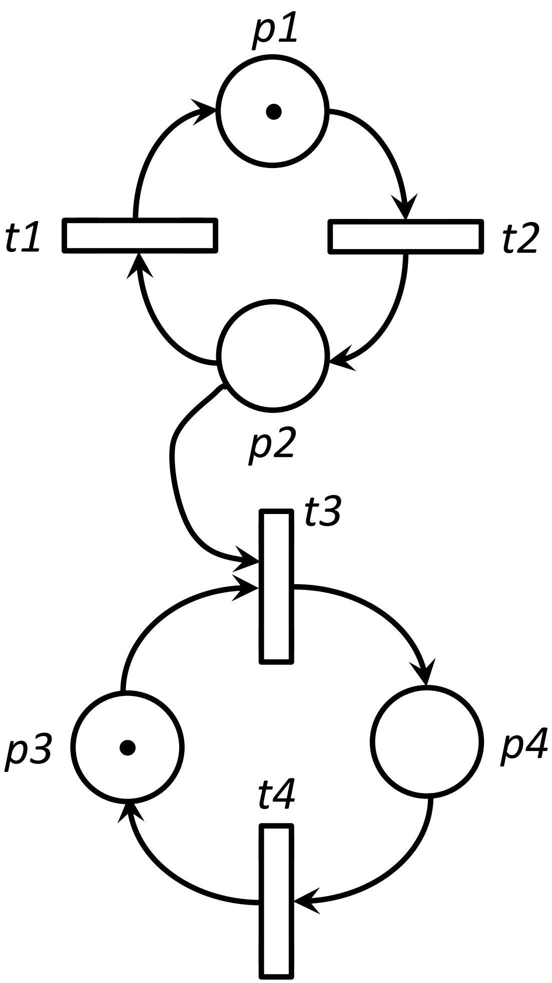
Tipologia:

- SM: NO
- MG: NO
- FC: NO
- EFC: NO
- AFC: NO

  $p_2 \bullet = \{t_1, t_4\}$,
  $p_3 \bullet = \{t_1, t_5\}$
  → confusione

Esempi

Esempio 4



<u>Proprietà</u>

- Limitatezza:
  SI
- Vivezza:
  NO, se scatta *t3*, *t1* e *t2* non sono più abilitabili
- Reversibilità:
  NO, se scatta *t3*, non si riesce più a marcare *p1*

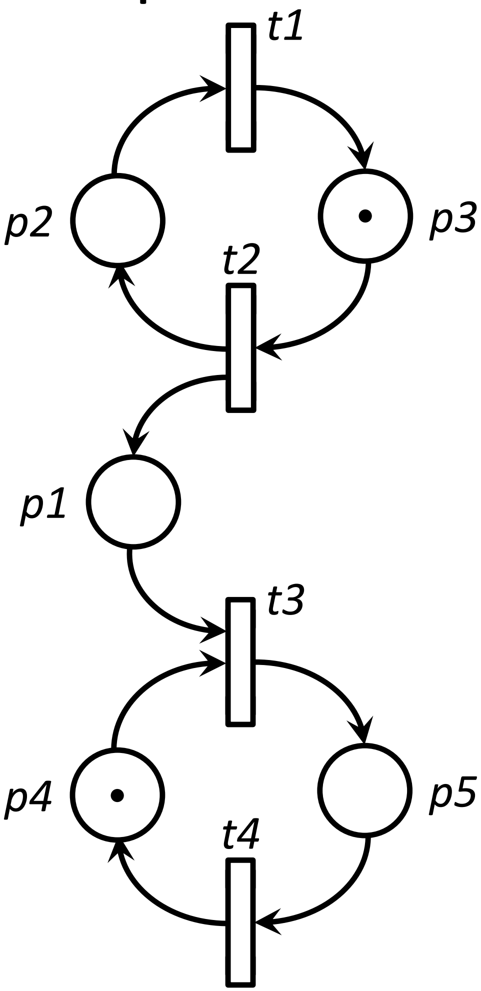
<u>Tipologia:</u>

- SM: NO
- MG: NO
- FC: NO
- EFC: NO
- AFC: SI

$$p_2 \bullet = \{t_1, t_3\} \supset p_3 \bullet = \{t_3\}$$

Esempi

Esempio 5



Proprietà

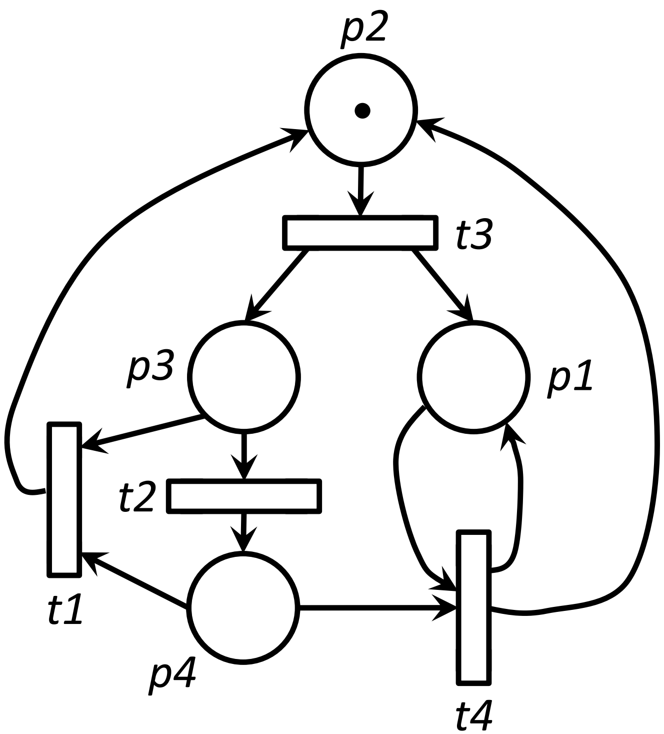
- Limitatezza: NO, *p1* è illimitato
- Vivezza: SI
- Reversibilità: SI, *t3* può scattare tante volte quante *t2*

Tipologia:

- SM: NO
- MG: SI
- FC: SI
- EFC: SI
- AFC: SI

Esempi

Esempio 6



Proprietà

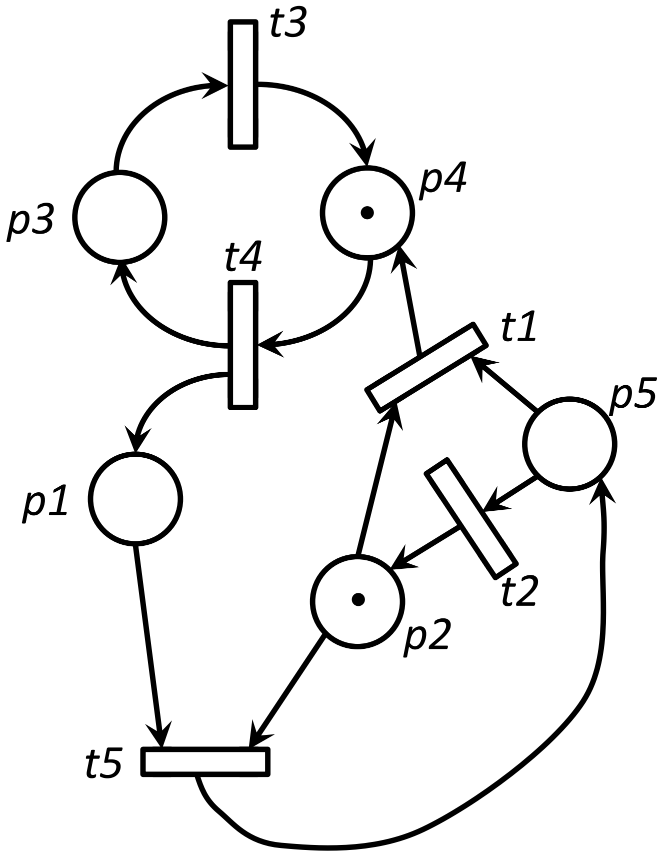
- Limitatezza:
  NO, *p1* è illimitato
- Vivezza:
  NO, *t1*non è mai abilitata
- Reversibilità:
  NO, i gettoni in *p1* continuano ad aumentare

Tipologia:

- SM: NO
- MG: NO
- FC: NO
- EFC: NO
- AFC: NO
  $p_3\bullet = \{t_1, t_2\}$,
  $p_4\bullet = \{t_1, t_4\}$
  → confusione

Esempi

Esempio 7



Proprietà

- Limitatezza:
  NO, *p1* è illimitato
- Vivezza:
  NO, *t1*non è mai abilitata
- Reversibilità:
  SI, i gettoni in *p1* possono essere consumati con *t2*, *t5*

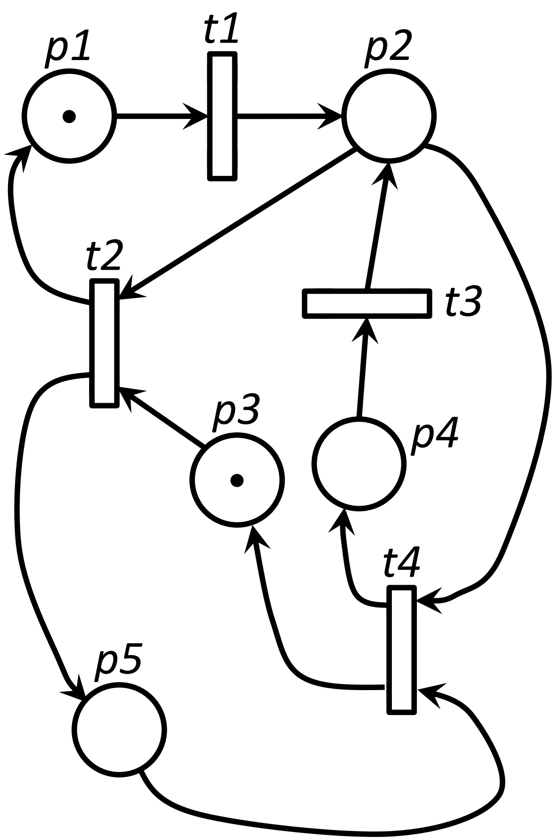
Tipologia:

- SM: NO
- MG: NO
- FC: NO
- EFC: NO
- AFC: NO

  $p_2\bullet = \{t_1, t_5\}$,
  $p_5\bullet = \{t_1, t_2\}$
  → confusione

Esempi

Esempio 8



Proprietà

- Limitatezza: SI
- Vivezza: SI
- Reversibilità: NO, dopo lo scatto di t1, si ripete t2, t1, t4, t3

Tipologia:

- SM: NO
- MG: NO
- FC: NO
- EFC: NO
- AFC: SI

$p_2\bullet = \{t_2, t_4\}$,

$\supset$

$p_3\bullet = \{t_2\}$ e

$p_5\bullet = \{t_4\}$