Corso di Automazione industriale

Lezione 12

Reti di Petri – Introduzione

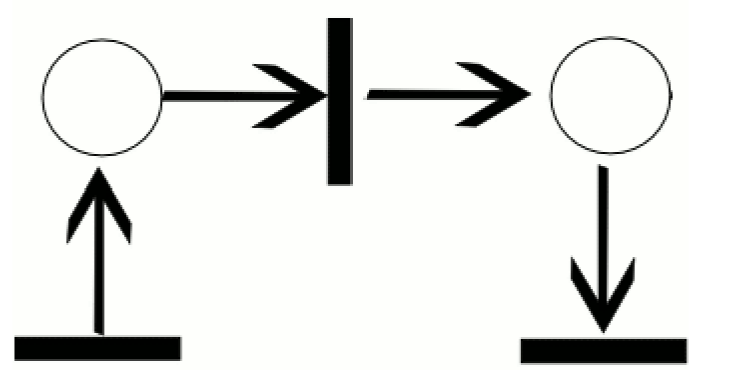
Introduzione

<u>Cosa sono le reti di Petri</u>

Sono un formalismo molto potente e compatto per rappresentare i sistemi DES (Discrete Event Systems).

Esse sono un'estensione significativa degli automi:

- possono rappresentare sistemi ad infiniti stati con un numero finito di nodi di un grafo
- In generale, sono strutture estremamente più compatte degli automi.



Introduzione

Cosa sono le reti di Petri

Si prestano in modo particolare per rappresentare comportamenti complessi come:

- La sincronizzazione
- Il succedersi asincrono di eventi
- Operazioni concorrenti
- Conflitti
- Condivisione di risorse

Introduzione

<u>Impiego delle Reti di Petri</u>

- Strumento ausiliario di analisi: si modellizza il sistema con una rete di Petri e si analizza quest'ultima per verificare la correttezza del progetto del sistema.

- Strumento diretto di progetto: l'intero processo di specifica e progetto viene svolto con reti di Petri. Occorrono tecniche di traduzione delle reti in sistemi adatti per un'implementazione diretta.

Introduzione

<u>Caratteristiche principali</u>

- Rappresentazione grafica semplice e di agevole interpretazione

- Rappresentazione matematica (matriciale) facile

- Esistono diverse tecniche di analisi formale con le quali è possibile verificare le proprietà fondamentali di una rete e analizzare il comportamento del sistema modellizzato

Introduzione

<u>Caratteristiche principali</u>

- Lo stato di un modello e la transizione da uno stato all'altro sono concetti distribuiti → compattezza

- Interpretazione modello = locale (ogni porzione di rete modellizza una specifica operazione o un dispositivo)

- Non c'è esplosione dimensionale → modularità

Introduzione

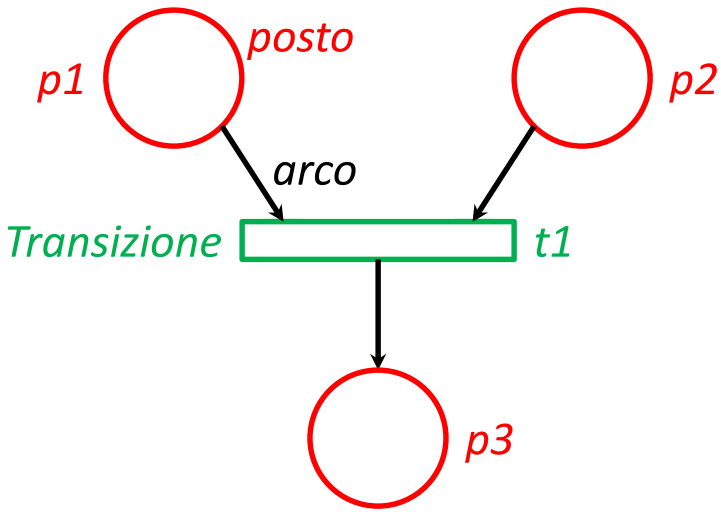
<u>Differenze tra Reti di Petri e Automi a Stati Finiti</u>

- Negli automi lo stato è rappresentato esplicitamente, enumerando tutti i possibili stati e poi connettendoli.
- La struttura di una rete di Petri, invece, è più ricca:
  - L'informazione sullo stato del sistema è distribuita su parti della rete che descrivono le condizioni fondamentali che governano il funzionamento del sistema.
  - Lo stato complessivo della rete è interpretabile come composto da più stati parziali ed indipendenti relativi a sotto-reti.
  - Analogamente, una transizione influenza solo una parte dello stato complessivo.

Definizioni

Una rete di Petri è un **grafo bipartito**, in cui ci sono due tipi di nodi (i **posti** rappresentati con dei cerchi e le **transizioni** rappresentate con barre), collegati tra loro mediante **archi** orientati.

Sono possibili solo collegamenti tra nodi di tipo diverso.



Definizioni

Il **pre-set** di un nodo della rete di Petri è l'insieme di nodi immediatamente a monte del nodo stesso, mentre il **post-set** è l'insieme di nodi immediatamente a valle. Si indica il pre-set di *x* con $\bullet x$ e il post-set con $x\bullet$.

Tutte le definizioni date finora ci consentono di definire la struttura topologica della rete di Petri, ma non sono sufficienti per definirne l'evoluzione dinamica.

Per questo motivo serve introdurre nuovi elementi.

Definizioni

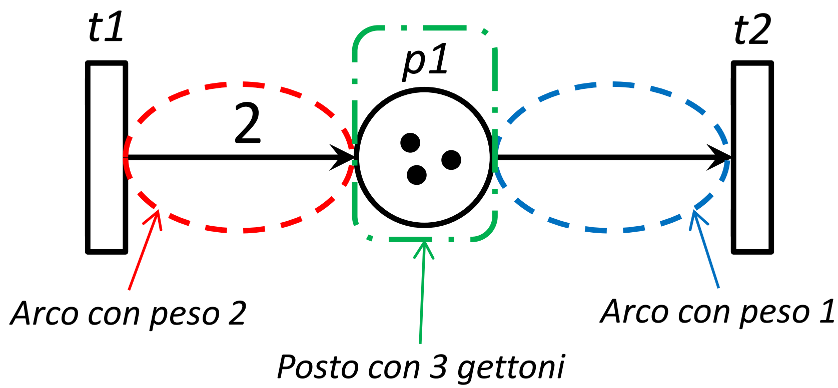
Definiamo:

- **Marcatura** – ogni posto contiene un numero interno non negativo di gettoni (o marche, **token**), rappresentati con pallini neri

- **Funzione peso** – ad ogni arco è associato un numero intero non negativo, chiamato peso (se non è presente è considerato 1); una rete di Petri con tutti i pesi uguali ad 1, viene detta **ordinaria**

Definizioni

L'idea base è quello di considerare i posti come le variabili di stato del sistema (per chi ha studiato Automatica).



La marcatura di tutti i posti di una rete (definita come $M = [m_1\ m_2\ \ldots m_p,]^T$, che identifica $m_i = k$ come il numero di marcature presenti nel posto i), rappresenta lo stato globale della rete, che cambia come conseguenza dello **scatto** delle transizioni.

Definizioni

Come per tutti i DES, l’evoluzione delle reti di Petri è determinata dal verificarsi di eventi, che hanno la **possibilità** di avvenire.

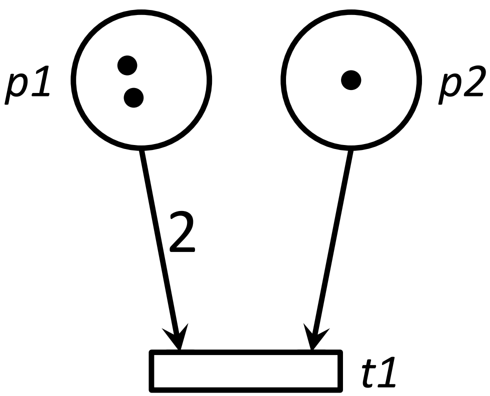
Ogni evento è caratterizzato da:

- La possibilità che accada → abilitazione di una transizione
- L’effetto che l’avvenimento ha sul sistema → **scatto** di una transizione (naturalmente abilitata)

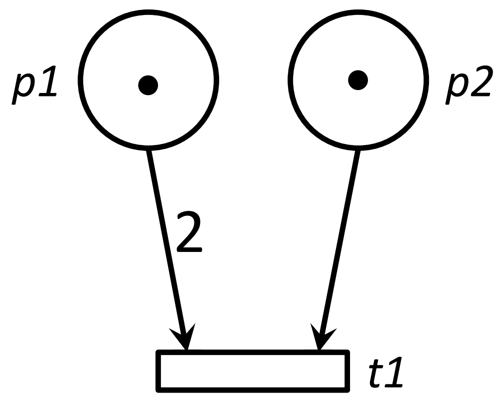
Evoluzione

Una transizione t è **abilitata** (in una certa marcatura M) se ogni posto a monte di t ha un numero di gettoni $\geq$ al peso dell'arco che lo collega a t.

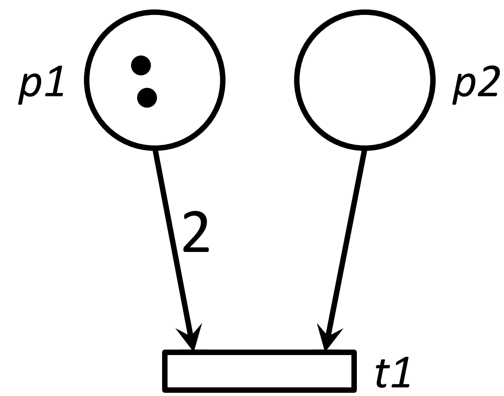
Questa condizione si indica con $M[t >$.



Transizione abilitata



Transizione non abilitata



Transizione non abilitata

Evoluzione

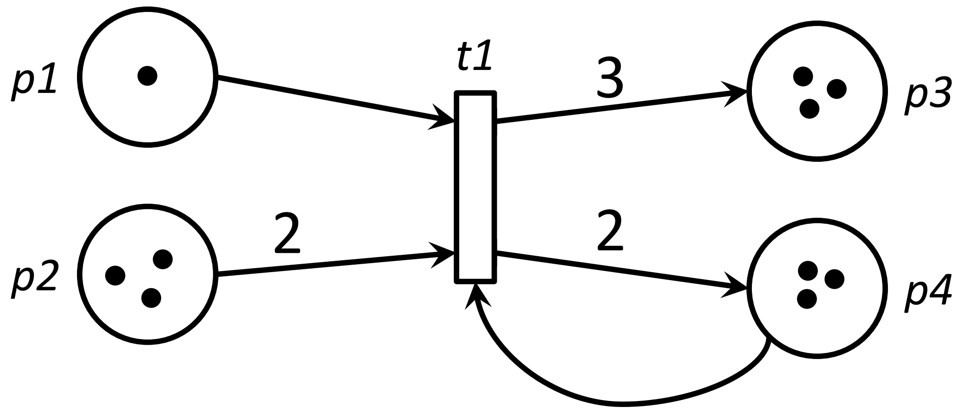
Lo scatto di una transizione t abilitata (supponendo nella marcatura M), porta la rete in un nuovo stato M^*.

Durante lo scatto vengono rimossi dai posti a monte di t, un numero di gettoni pari al peso dell'arco che connette il posto alla transizione.

Durante lo scatto vengono anche aggiunti, ad ogni posto a valle di t, un numero di gettoni pari al peso degli archi corrispondenti.

Ciò viene indicato con $\left[t > M^*\right.$.

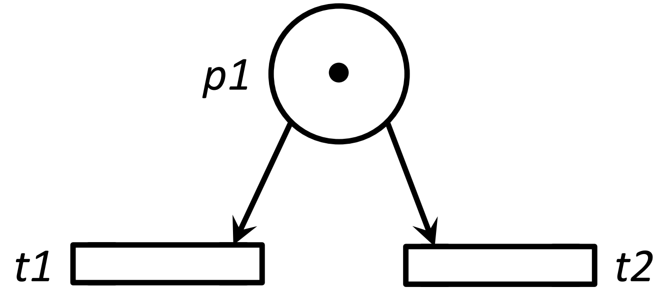
Evoluzione



Note:

- Durante l’evoluzione i gettoni spariscono e si creano
- Il numero di gettoni non è costante nella rete
- L’abilitazione della transizione è un fenomeno dovuto solo alle marcature dei posti a monte di essa
- Lo scatto è considerato istantaneo

Evoluzione



Cosa succede in questo caso se t1 e t2 si attivano insieme?

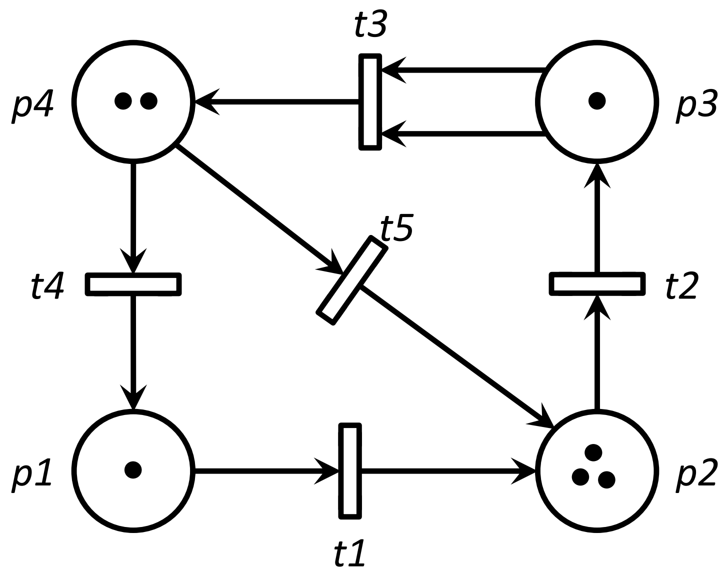
Questo caso è detto **conflitto** (lo dettagliamo più avanti).

L’attivazione di una transizione è un evento considerato idealmente istantaneo, per questo motivo, teoricamente, la transizione abilitata dovrà essere scelta in modo casuale (potremmo dire il primo che prende il gettone lo usa).

Nella realtà una scelta casuale non è adatta per la progettazione di un controllore di impianto.

Esempio

Si consideri la seguente rete:



Si determinino i pre-set e i post-set di *p2*, *p4*, *t3*

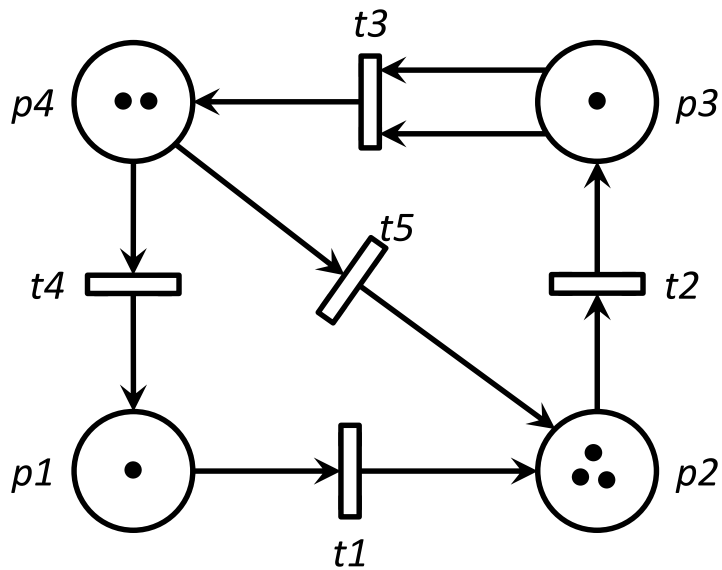
●*p2* = {*t1*, *t5*}; *p2*● = {*t2*};

●*p4* = {*t3*}; *p4*● = {*t4*,*t5*};

●*t3* = {*p3*}; *t3*● = {*p4*};

Esempio

Si consideri la seguente rete:

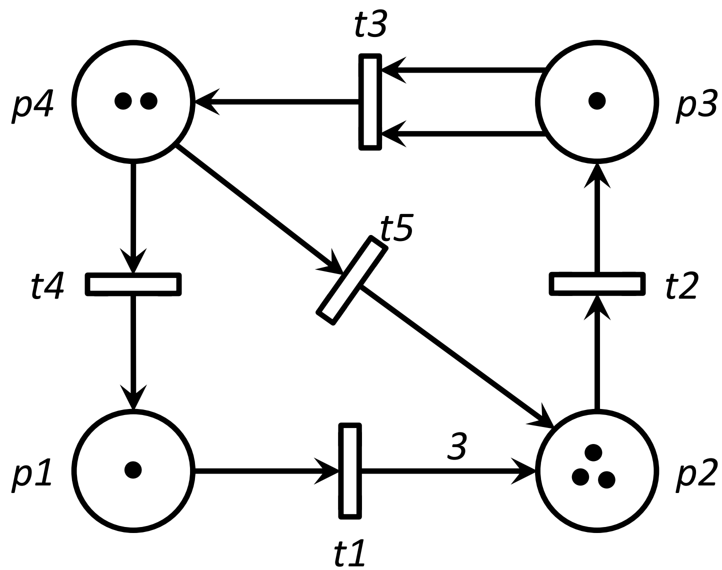


Si dica quali sono le transizioni abilitate

t1, *t2*, *t4*, *t5* sono abilitate, *t3* no

Esempio

Si consideri la seguente rete:



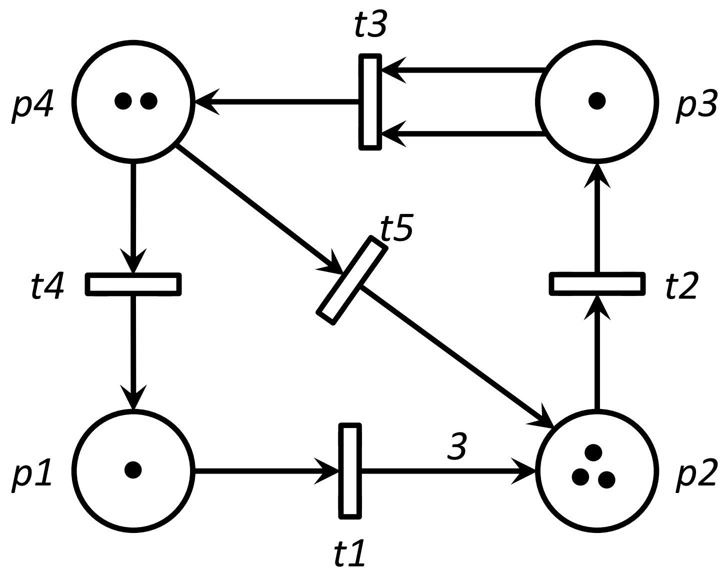
Si determinino quali sono le marcature conseguenti allo scatto delle transizioni considerate in precedenza

$M_0 = [1 \quad 3 \quad 1 \quad 2]^T$

$M_0[t1 > M_1 = [0 \quad 6 \quad 1 \quad 2]^T$

Esempio

Si consideri la seguente rete:



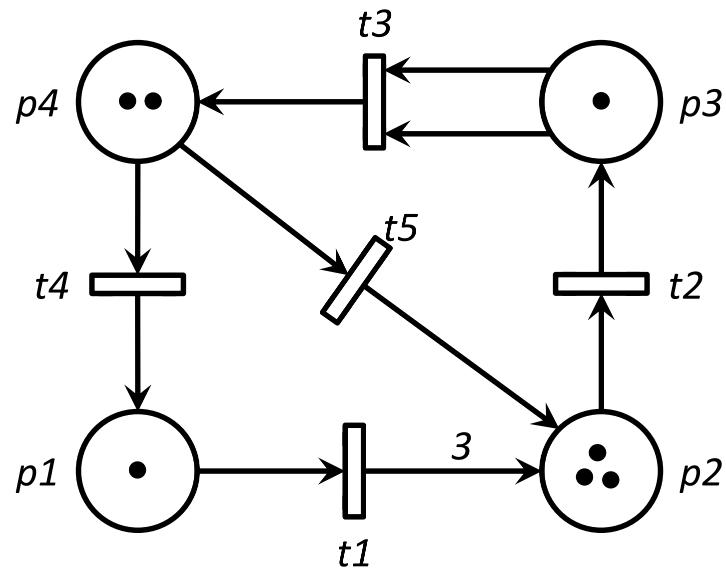
Si determinino quali sono le marcature conseguenti allo scatto delle transizioni considerate in precedenza

$M_0 = [1 \quad 3 \quad 1 \quad 2]^T$

$M_0[t2 > M_2 = [1 \quad 2 \quad 2 \quad 2]^T$

Esempio

Si consideri la seguente rete:



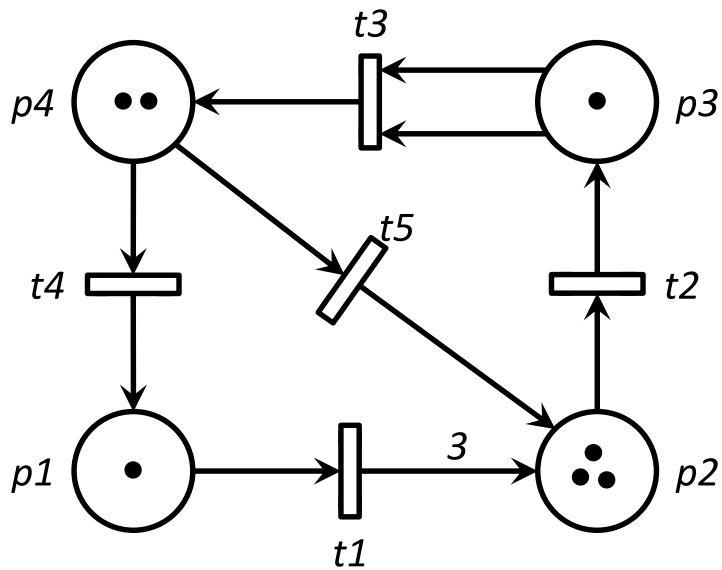
Si determinino quali sono le marcature conseguenti allo scatto delle transizioni considerate in precedenza

$M_0 = [1 \quad 3 \quad 1 \quad 2]^T$

$M_0[t4 > M_4 = [2 \quad 3 \quad 1 \quad 1]^T$

Esempio

Si consideri la seguente rete:



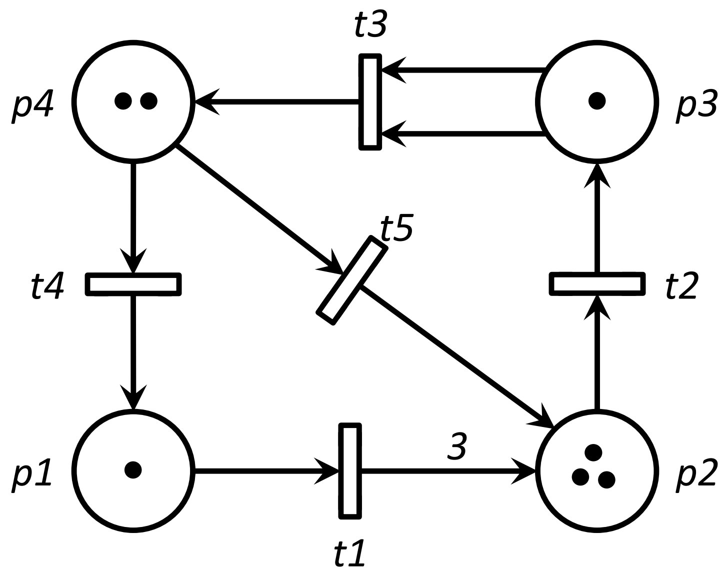
Si determinino quali sono le marcature conseguenti allo scatto delle transizioni considerate in precedenza

$M_0 = [1 \quad 3 \quad 1 \quad 2]^T$

$M_0[t5 > M_5 = [1 \quad 4 \quad 1 \quad 1]^T$

Esempio

Si consideri la seguente rete:

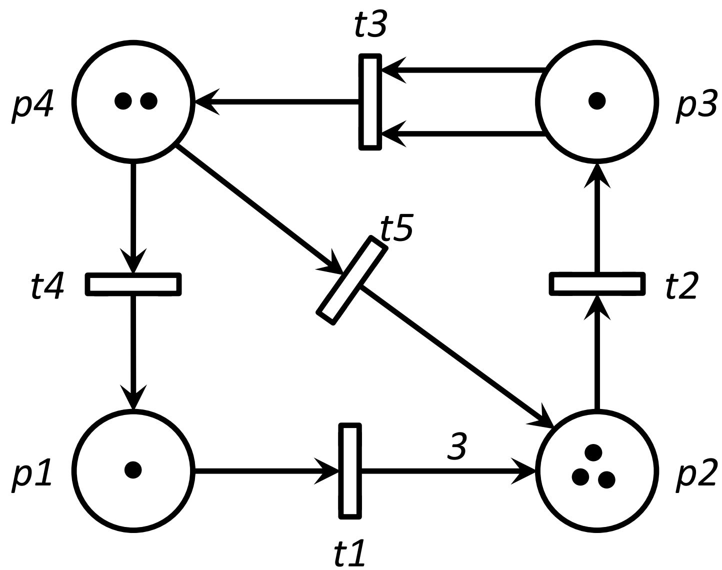


Si trovi una sequenza ammissibile di transizioni che porti la rete alla marcatura $M_f = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}^T$

t1, t4, t1, t2, t2, t2, t2, t2, t2, t3, t3

Esempio

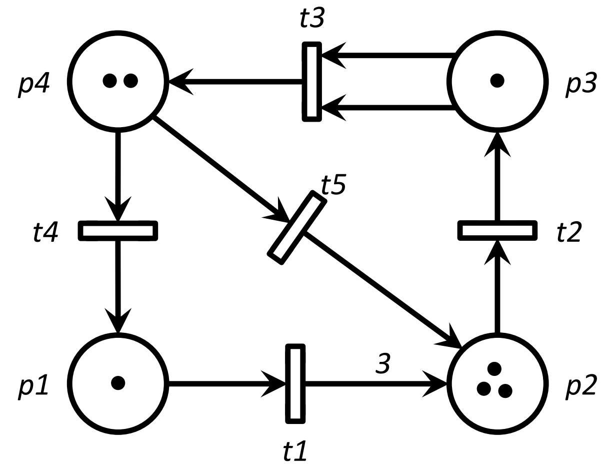
Si consideri la seguente rete:



Si verifichi che le sequenze (*t1*, *t2*, *t3*, *t4*, *t5*), (*t2*, *t3*, *t5*, *t4*, *t1*), (*t4*, *t2*, *t1*, *t5*, *t3*) sono ammissibili e portano alla medesima marcatura finale

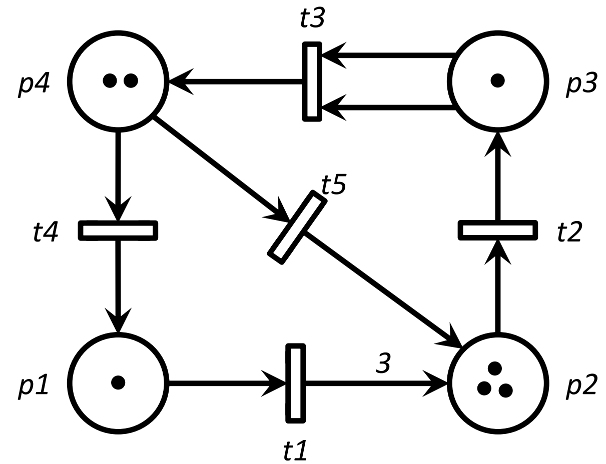
$M_0 = [1 \quad 3 \quad 1 \quad 2]^T$

Esempio



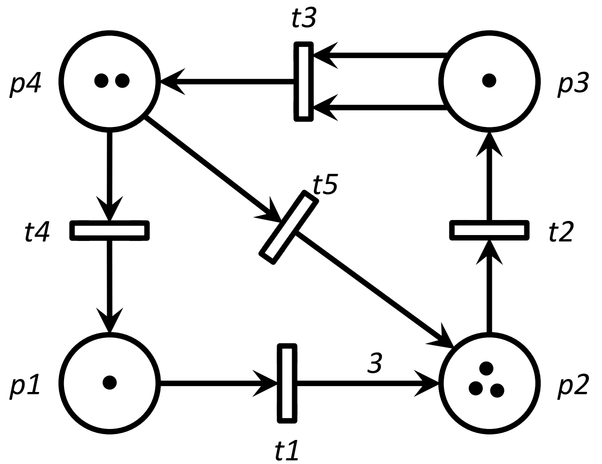
Trans.	*t1*	*t2*	*t3*	*t4*	*t5*
M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
1	0	0	0	1	1
3	6	5	5	5	6
1	1	2	0	0	0
2	2	2	3	2	1

Esempio



Trans.	*t2*	*t3*	*t4*	*t5*	*t1*
M_0	$M_{\mathbf{1}}$	$M_{\mathbf{2}}$	$M_{\mathbf{3}}$	$M_{\mathbf{4}}$	$M_{\mathbf{5}}$
1	1	1	2	2	1
3	2	2	2	3	6
1	2	0	0	0	0
2	2	3	2	1	1

Esempio

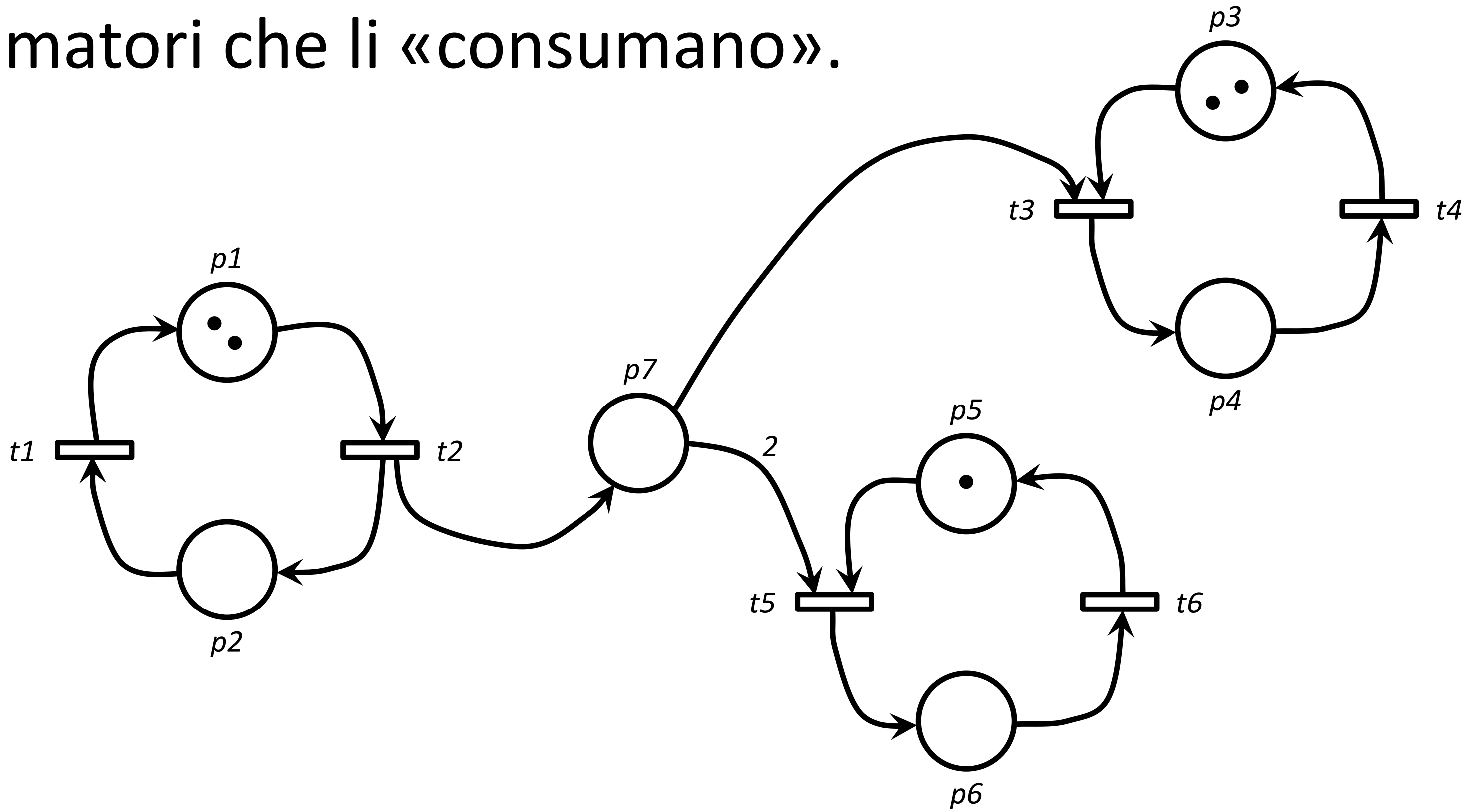


Trans.	*t4*	*t2*	*t1*	*t5*	*t3*
M_0	$M_{\mathbf{1}}$	$M_{\mathbf{2}}$	$M_{\mathbf{3}}$	$M_{\mathbf{4}}$	$M_{\mathbf{5}}$
1	2	2	1	1	1
3	3	2	5	6	6
1	1	2	2	2	0
2	1	1	1	0	1

Esempio

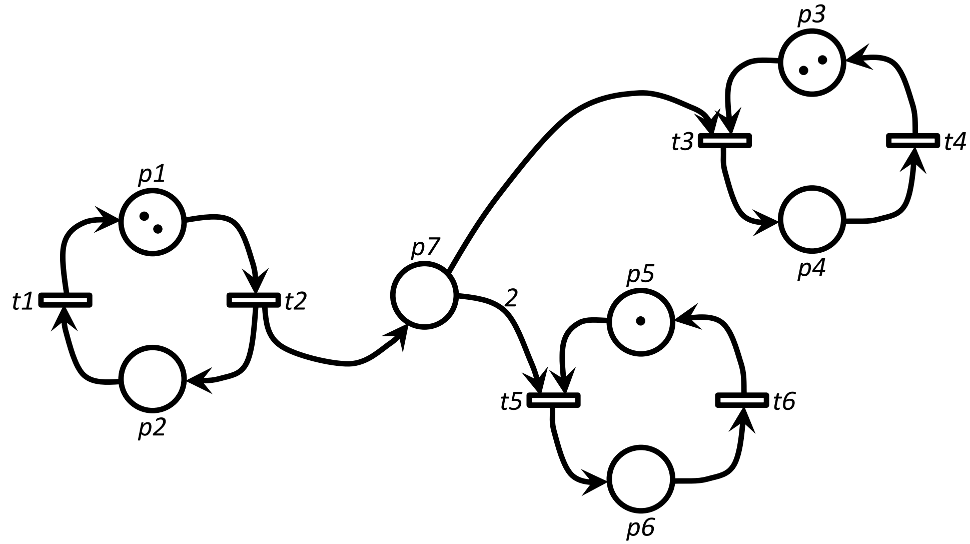
Sistema produttori / consumatori

Questo sistema ha un layout standard, sono presenti uno o più produttori che «generano» oggetti, e uno o più consumatori che li «consumano».



Esempio

Sistema produttori / consumatori

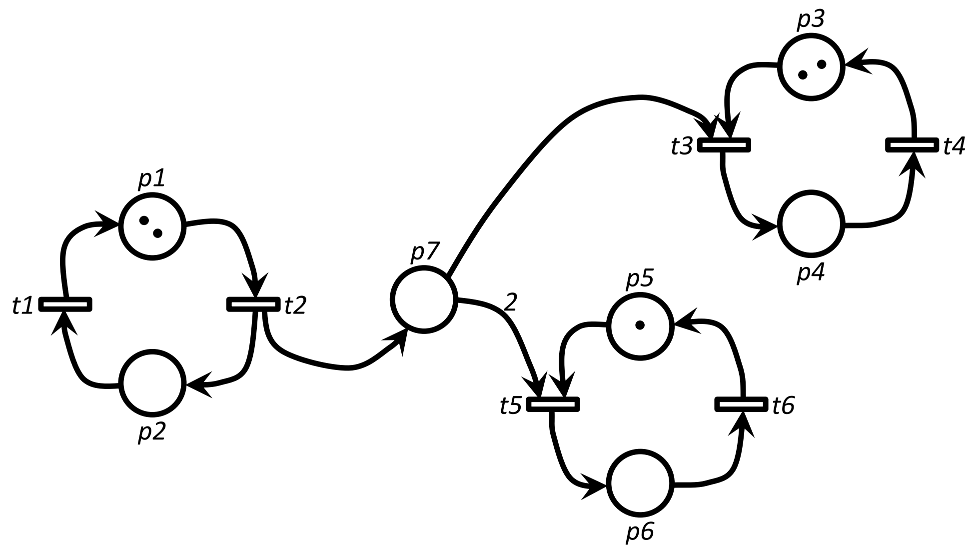


In questo caso sono presenti

- Produttore (*p1*, *p2*)
- Consumatori (*p3*, *p4*) e (*p5*, *p6*)
- Un buffer (*p7*)

Esempio

Sistema produttori / consumatori



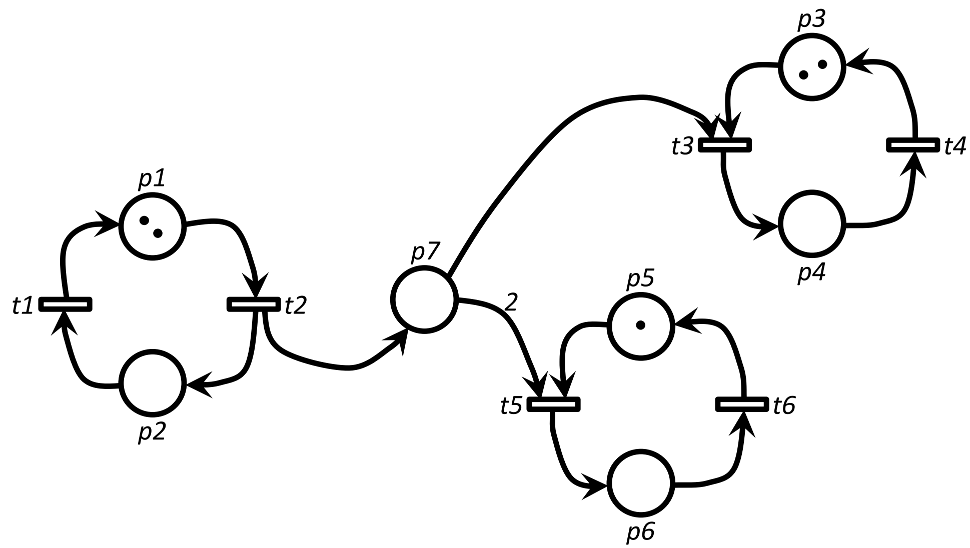
Il significato delle transizioni è:

t1: produzione; *t2*: consegna al buffer;

t3,t5: prelievo dal buffer; *t4,t6:* consumo prodotti

Esempio

Sistema produttori / consumatori



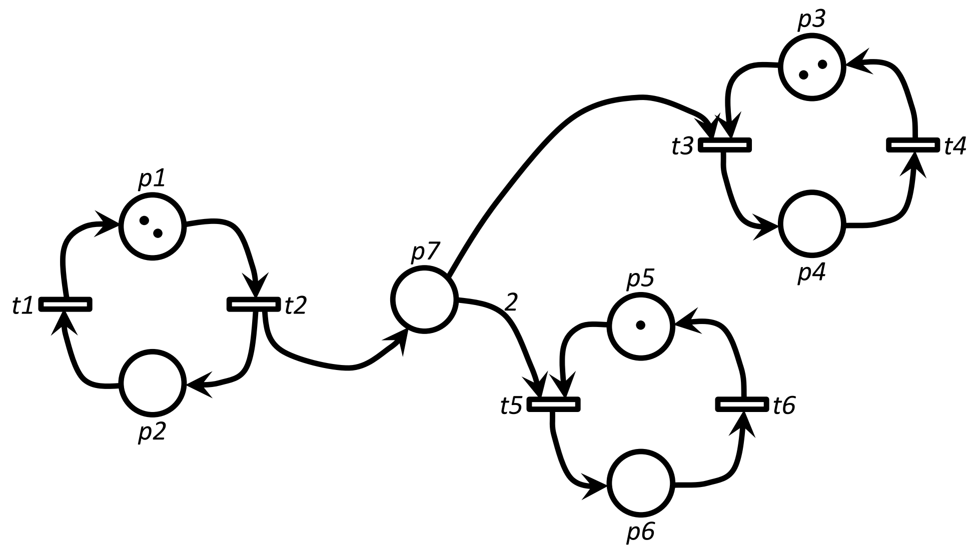
In questa rete sono presenti:

- 2 produttori (gettoni in *p1*)
- 3 consumatori (gettoni in *p3* e *p5*)

N.B.: in base a dove sono i gettoni, assumono valenza diversa!

Esempio

Sistema produttori / consumatori



La marcatura iniziale è $M_0 = [2\ 0\ 2\ 0\ 1\ 0\ 0]^T$

Con questa marcatura l'unica transizione abilitata è *t2*.

Allo scatto di *t2* la marcatura diventa $M_1 = [1\ 1\ 2\ 0\ 1\ 0\ 1]^T$

Allo scatto di *t3* la marcatura diventa $M_2 = [1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0]^T$

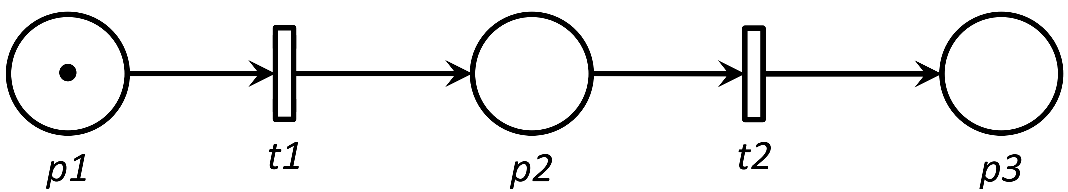
Esempio

Sistema produttori / consumatori - Osservazioni

- Il numero totale di gettoni delle sotto-reti è costante
- I cicli di produzione e consumo sono indipendenti tra loro
- Questo modello realizza la «concorrenza» tra processi indipendenti
- Per cambiare il numero di produttori / consumatori è possibile cambiare il numero d gettoni nella rete
- Con una particolare sequenza è sempre possibile tornare alla marcatura iniziale

Strutture fondamentali

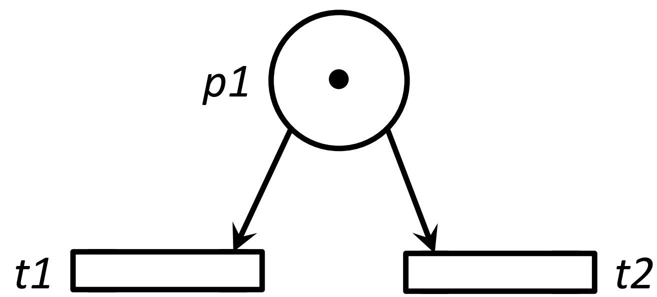
- Due transizioni *t1* e *t2* (con *t1* che precede *t2* nella marcatura) si dicono in **sequenza** se con *t1* abilitata e t2 no, lo scatto di *t1* abilita *t2*



Strutture fondamentali

- Due transizioni *t1* e *t2* si dicono in **conflitto strutturale** se hanno almeno un posto in ingresso comune.

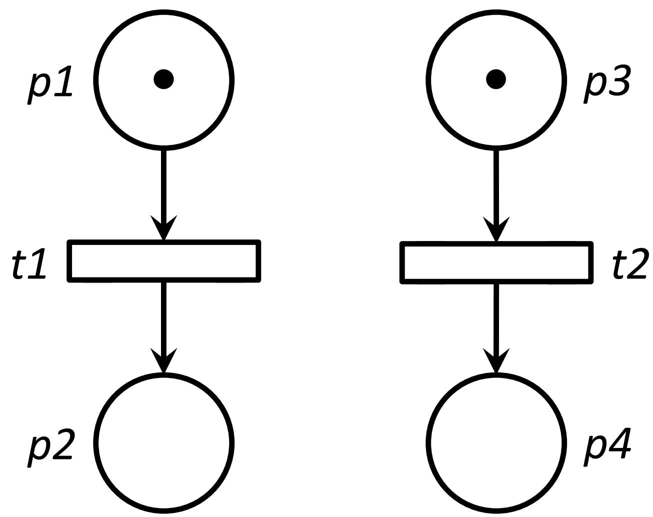
  Due transizioni si dicono in **conflitto effettivo** in una marcatura M se sono entrambe abilitate, ma lo scatto di una disabilita l'altra



Strutture fondamentali

- Due transizioni *t1* e *t2* si dicono in **concorrenza strutturale** se non condividono nessun posto in ingresso.

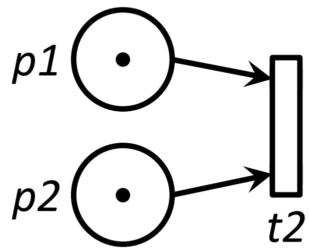
  Due transizioni in concorrenza strutturale, sono in **concorrenza effettiva** in una marcatura M se sono entrambe abilitate (lo scatto di una non disabilita l'altra)



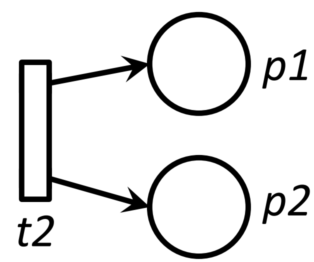
Strutture fondamentali

Esistono delle strutture legate ai concetti di concorrenza

- Transizione di **sincronizzazione**: con più posti a monte



- Transizione di **concorrenza**: con più posti a valle

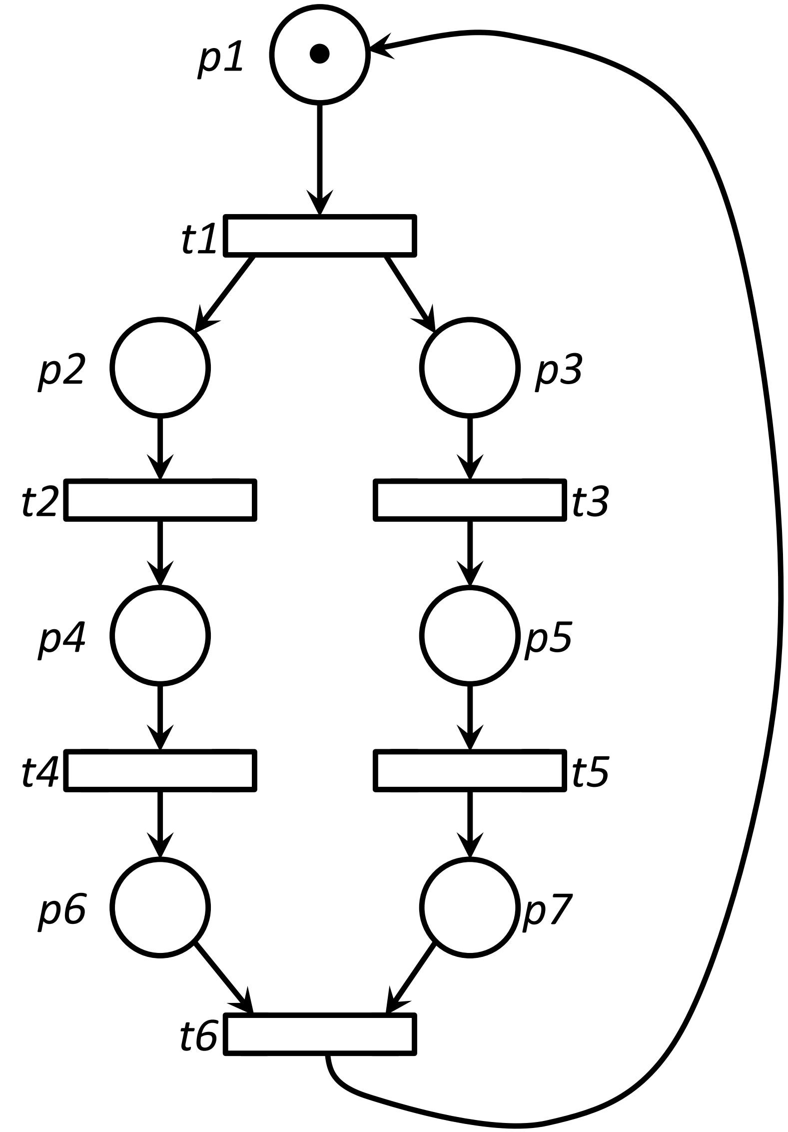


N.B.: solitamente l'ordine è concorrenza - sincronizzazione

Esempio

Riconosciamo le strutture base:

- Sequenze
  - *p1, p2, p4, p6*
  - *p1, p3, p5, p7*
- Transizioni di concorrenza
  - *t1*
- Transizioni di sincronizzazione
  - *t6*



Esempio

Cosa rappresenta il modello?

Potrebbe rappresentare un ciclo produttivo, con un'operazione effettuata per ogni posto.

Le operazioni 2, 4 e 6 sono da eseguire in successione (come le 3, 5 e 7). Tra i due gruppi l'esecuzione può essere parallela (non si deve attendere lo svolgimento delle azioni dell'altro ramo).

Il processo ricomincia quando sia l'operazione 6 che la 7 sono concluse (e si ritorna alla operazione 1.