Lezione 24.

Sistemi dinamici a tempo discreto

Funzione di trasferimento e stabilità

Schema

1. Definizione (operativa)
2. Interpretazione della funzione di trasferimento
3. Guadagno statico e guadagno della funzione di trasferimento
4. Stabilità di sistemi dinamici LTI a tempo discreto
5. Teoremi di stabilità
6. Sistemi FIR

1. Definizione (operativa)

Si consideri un sistema LTI SISO a tempo discreto

$$y(k) = \alpha_1 y(k-1) + \alpha_2 y(k-2) + \cdots + \alpha_n y(k-n) +$$
$$+ \beta_0 u(k) + \beta_1 u(k-1) + \cdots + \beta_m u(k-m) \qquad m \leq n$$

$$y(0) = y(1) = \cdots = y(n-1) = 0 \text{ condizioni iniziali nulle}$$

Eseguendo la trasformazione $\mathcal{Z}$ si ottiene a partire da condizioni iniziali nulle si ottiene:

$$Y(z) = \alpha_1 z^{-1} Y(z) + \alpha_2 z^{-2} Y(z) + \cdots + \alpha_n z^{-n} Y(z) +$$
$$+ \beta_0 U(z) + \beta_1 z^{-1} U(z) + \cdots + \beta_m z^{-m} U(z)$$

$$Y(z)\left(1 - \alpha_1 z^{-1} - \alpha_2 z^{-2} + \cdots - \alpha_n z^{-n}\right) = U(z)\left(\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \cdots + \beta_m z^{-m}\right)$$

$$Y(z) = \boxed{\frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \cdots + \beta_m z^{-m}}{1 - \alpha_1 z^{-1} - \alpha_2 z^{-2} + \cdots - \alpha_n z^{-n}}} U(z)$$

Funzione di trasferimento

Osservazione

La funzione di trasferimento viene espressa anche mediante potenze positive di z.

$$Y(z) = \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \cdots + \beta_m z^{-m}}{1 - \alpha_1 z^{-1} - \alpha_2 z^{-2} + \cdots - \alpha_n z^{-n}} U(z)$$

$$Y(z) = \frac{z^n}{z^n} \cdot \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \cdots + \beta_m z^{-m}}{1 - \alpha_1 z^{-1} - \alpha_2 z^{-2} + \cdots - \alpha_n z^{-n}} U(z)$$

$$Y(z) = \frac{\beta_0 z^n + \beta_1 z^{n-1} + \cdots + \beta_m z^{n-m}}{z^n - \alpha_1 z^{n-1} - \alpha_2 z^{n-2} + \cdots - \alpha_n} U(z)$$

Esempi

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{2 + z^{-1}}{1 + z^{-1} + 3z^{-2}} \Rightarrow F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2}{z^2} \cdot \frac{2 + z^{-1}}{1 + z^{-1} + 3z^{-2}} = \frac{2z^2 + z}{z^2 + z + 3}$$

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1} + 4z^{-2}}{1 + z^{-1} + 3z^{-2}} \Rightarrow F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2}{z^2} \cdot \frac{z^{-1} + 4z^{-2}}{1 + z^{-1} + 3z^{-2}} = \frac{z + 4}{z^2 + z + 3}$$

Esempio

E' possibile (ed a volte utile) passare dalla funzione di trasferimento all'equazione alle differenze.

Si consideri un sistema LTI con ingresso $u(k)$ ed uscita $y(k)$ descritto mediante la seguente funzione di trasferimento

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{4z^2 - z + 2}{z^2 + 2z + 2}$$

Si ha quindi: $$Y(z)\left(z^2 + 2z + 2\right) = \left(4z^2 - z + 2\right)U(z)$$

$$z^2Y(z) + 2zY(z) + 2Y(z) = 4z^2U(z) - zU(z) + 2U(z)$$

Antitrasformando:

$$y(k+2) + 2y(k+1) + 2y(k) = 4u(k+2) - u(k+1) + 2u(k)$$

$$y(k+2) = -2y(k+1) - 2y(k) + 4u(k+2) - u(k+1) + 2u(k)$$

$$y(k) = -2y(k-1) - 2y(k-2) + 4u(k) - u(k-1) + 2u(k-2)$$

2. Interpretazione della funzione di trasferimento

Si consideri un sistema con funzione di trasferimento $G(z)$

Siano

$$u(k) = \mathrm{imp}(k) \xrightarrow{\mathcal{Z}} U(z) = 1$$

cond. iniziali nulle

Allora

$$Y(z) = G(z)U(z) = G(z)$$

La funzione di trasferimento è la trasformata $\mathcal{Z}$ della risposta all'impulso del sistema

...in stretto parallelismo con i sistemi a tempo continuo

Proprietà

$G(z)$ è sempre razionale $\qquad G(z)=\dfrac{N(z)}{D(z)}$

Zeri : radici di $N(z)=0$

Poli : radici di $D(z)=0$

Il **numero di zeri è inferiore, al più uguale, al numero di poli**.

Se il numero di zeri è strettamente inferiore al numero di poli, il sistema LTI si dice **strettamente proprio**.

Altrimenti, si dice **proprio**.

...in stretto parallelismo con i sistemi a tempo continuo

Osservazione

La funzione di trasferimento di un sistema LTI SISO a tempo discreto viene rappresentata in uno dei seguenti modi

"filtro" $$Y(z)=\frac{\beta_0+\beta_1 z^{-1}+\cdots+\beta_m z^{-m}}{1-\alpha_1 z^{-1}-\alpha_2 z^{-2}+\cdots-\alpha_n z^{-n}}U(z)$$ *potenze negative*

"FdT" $$Y(z)=\frac{\beta_0 z^{n}+\beta_1 z^{n-1}+\cdots+\beta_m z^{n-m}}{z^{n}-\alpha_1 z^{n-1}-\alpha_2 z^{n-2}+\cdots-\alpha_n}U(z)$$ *potenze positive*

"poli/zeri" $$Y(z)=\frac{\beta_0\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)}{(z-1)^{g}\prod_{i=1}^{n}(z-p_i)}U(z)$$

z_i zeri p_i poli

g tipo

Come si nota in nessuna di queste viene evidenziato il parametro **guadagno della funzione di trasferimento** (come invece accadeva a tempo continuo). Si noti inoltre che non sono definiti neanche i parametri **costanti di tempo**.

3. Guadagno statico e guadagno della funzione di trasferimento

Se $g = 0$

il guadagno statico del sistema è dato da $\boxed{\mu = G(1)}$

In questo caso si definisce guadagno della funzione di trasferimento il guadagno statico del sistema.

Se $g \neq 0$

il guadagno della funzione di trasferimento si definisce così:

$$\mu = \lim_{z \to 1} (z-1)^g G(z)$$

Si dice **guadagno "generalizzato"** della funzione di trasferimento e non ha alcuna relazione con il guadagno statico del sistema.

Osservazione

Perché nel caso $g = 0$ il guadagno statico può essere calcolato come $\mu = G(1)$?

Il sistema è descritto dall'equazione alle differenze

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i y(k-i) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i u(k-i) \qquad \alpha_0 = 1$$

All'equilibrio, in corrispondenza di un ingresso costante $\bar{u}$ l'equazione diventa

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \bar{y} = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \bar{u} \qquad \alpha_0 = 1 \quad \text{da cui si ottiene il guadagno statico} \quad \mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = \frac{\sum_{i=0}^{m} \beta_i}{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i}$$

Similmente, nel dominio delle trasformate l'equazione diventa

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i z^{-i} Y(z) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i z^{-i} U(z) \qquad \alpha_0 = 1 \quad \text{da cui si ottiene la fdt } G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \beta_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i z^{-i}}$$

E' facile quindi verificare che per $z = 1$ si ha che $G(1) = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} \beta_i}{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i} = \mu$

4. Stabilità dei sistemi LTI SISO a tempo discreto

Esempio esplicativo (sistema I ordine)

$y(k) = ay(k-1) + bu(k-1)$ Sistema LTI SISO del primo ordine

Si calcoli il movimento del sistema ponendo $u(k) = 0$ per $k \geq 0$ con condizione iniziale $y(0) = y_0$ (il "movimento libero")

$$y(1) = ay_0$$
$$y(2) = a \cdot ay_0 = a^2 y_0$$
$$y(3) = a \cdot a^2 y_0 = a^3 y_0 \Rightarrow \boxed{y(k) = a^k y_0}$$

$\boxed{|a| < 1} \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} a^k y_0 = 0$ qualsiasi sia y_0 [*il movimento libero converge a* 0]

$\boxed{|a| > 1} \Leftrightarrow$ esiste almeno un valore di y_0 per cui $\lim_{k\to\infty} a^k y_0 = \infty$ [*il movimento libero diverge*]

$\boxed{|a| = 1} \Leftrightarrow y(k) = \pm y_0$ [*il movimento libero è limitato*]

$\boxed{|a| < 1}$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{k \to \infty} a^k y_0 = 0$ qualsiasi sia y_0 $\Leftrightarrow$ **Asintotica stabilità**

$\boxed{|a| > 1}$ $\Leftrightarrow$ esiste almeno un valore di y_0 per cui $\lim_{k \to \infty} a^k y_0 = \infty$ $\Leftrightarrow$ **Instabilità**

$\boxed{|a| = 1}$ $\Leftrightarrow$ $y(k) = y_0$ $\Leftrightarrow$ **Stabilità**

Osservazione

Il sistema $y(k) = ay(k-1) + bu(k-1)$ ha funzione di trasferimento

$$G(z) = \frac{bz^{-1}}{1 - az^{-1}} = \frac{b}{z - a}$$

Si noti che $z = a$ è il **polo della funzione di trasferimento** del sistema.

5. Teoremi sulla stabilità dei sistemi LTI a tempo discreto

Teorema 1

Un sistema LTI è **asintoticamente stabile** **se e solo se** la sua FdT ha tutti i **poli con modulo inferiore ad 1**.

$$|z_i| < 1 \,,\ \forall i \quad \Longleftrightarrow \quad \textbf{Asintotica stabilità}$$

Teorema 2

Un sistema LTI è **instabile** **se** la sua FdT ha **almeno un polo con modulo superiore ad 1**.

$$\exists\, i^* : \ |z_{i^*}| > 1 \quad \Longrightarrow \quad \textbf{Instabilità}$$

Teorema 3

Un sistema LTI è **stabile** **se** la sua FdT ha **tutti i poli con modulo inferiore ad 1 tranne uno che abbia modulo unitario**.

$$\begin{array}{l} |z_i| \le 1 \,,\ \forall i \\ \exists!\, i^* : \ |z_{i^*}| = 1 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \textbf{Stabilità}$$

Osservazione 1 (sul Teorema 3)

$|z_i| \leq 1 \,, \forall i$

$\exists\, i : \; |z_i| = 1$

⇒ **non asintoticamente stabile**

(ma stabile o instabile?)

- **singolo** polo con $|z_i| = 1$ ⇒ **semplicemente stabile**

- **più** poli con $|z_i| = 1$ ⇒ **semplicemente stabile** / **instabile**

? *In questo corso non si impara a trattare questo caso.*

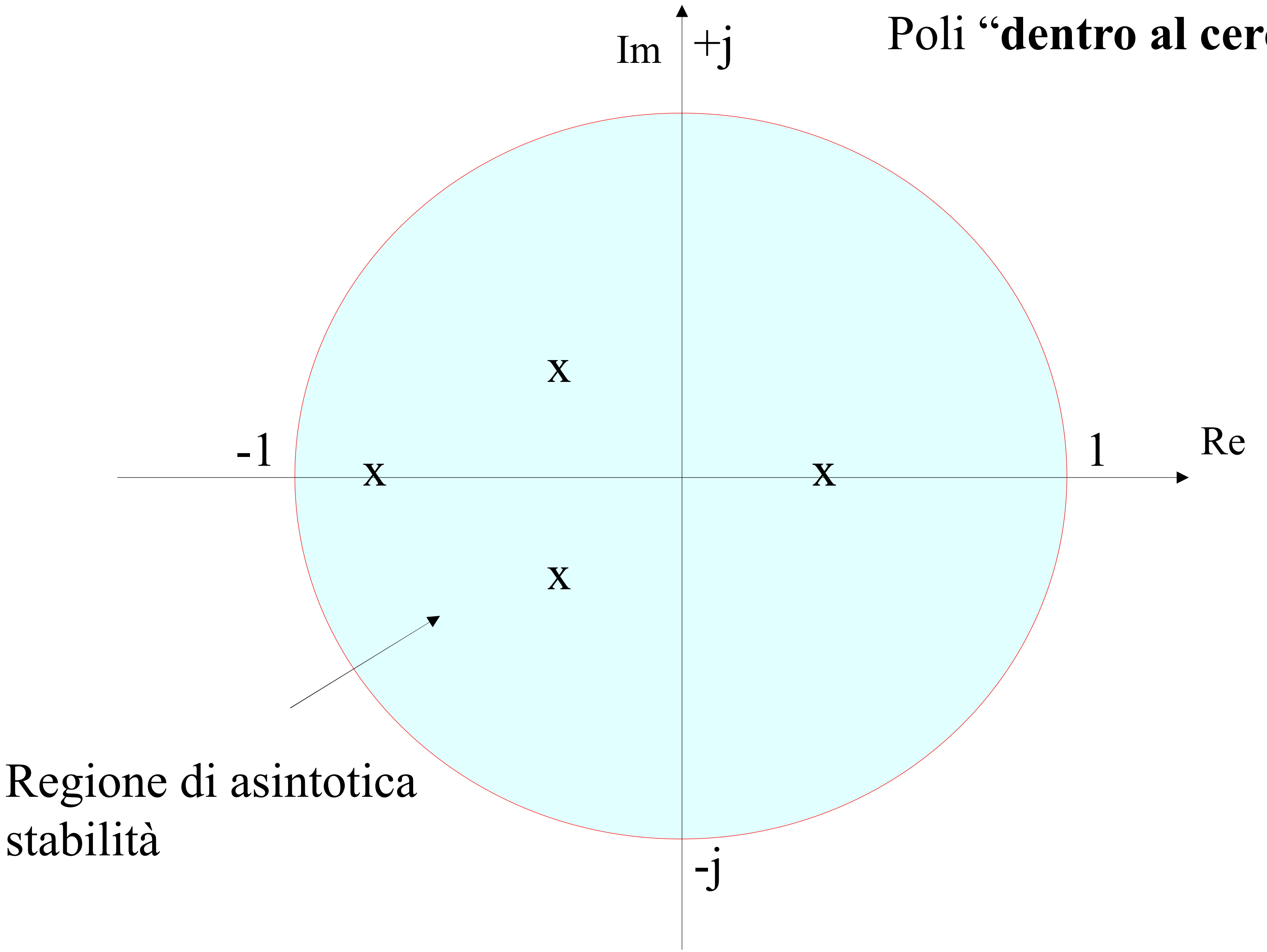
Osservazione 2 (sul Teorema 3)

Una coppia di poli complessi coniugati "conta" come uno solo. Quindi, un sistema con una sola una coppia di poli complessi coniugati con modulo unitario (e tutti gli altri poli con modulo inferiore ad 1) è stabile (semplicemente).

Osservazione 3 (sui Teoremi 2 & 3)

Quel che si deduce dall'Osservazione 1 è che ci sono sistemi con più di un polo con modulo unitario (e tutti gli altri con modulo inferiore ad 1) che sono **stabili (semplicemente)** ed altri sistemi con più di un polo con modulo unitario (e tutti gli altri con modulo inferiore ad 1) che sono **instabili**.

Poli “**dentro al cerchio**”



6. Sistemi FIR (Finite Impulse Response)

Sono sistemi dinamici LTI a tempo discreto
con **tutti e soli i poli nell'origine**.

Questi sistemi hanno la caratteristica che **la loro risposta allo scalino raggiunge il valore di regime in un tempo finito**.
In particolare, se n è l'ordine del sistema, il valore di regime viene raggiunto dopo n passi.

Tale proprietà non vale per i sistemi LTI a tempo continuo, la cui risposta a scalino non raggiunge mai il valore di regime, ma vi tende asintoticamente.

Un sistema FIR di ordine *n* è quindi definito dalla seguente funzione di trasferimento:

$$F(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_1 z+b_0}{z^n} \qquad m=n$$

$$z^n Y(z)=\left(b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_1 z+b_0\right)U(z)$$

$$y(k+n)=b_n u(k+n)+b_{n-1}u(k+n-1)+\cdots+b_1 u(k+1)+b_0 u(k)$$

$$y(k)=b_n u(k)+b_{n-1}u(k-1)+\cdots+b_1 u(k-n+1)+b_0 u(k-n)$$

L'uscita al tempo *k* dipende dai campioni dell'ingresso fino al più al tempo *k*–*n*.

Si calcoli la risposta allo scalino:

$$u(k) = \text{sca}(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$$

$$y(0) = b_n u(0) = b_n$$

$$y(1) = b_n u(1) + b_{n-1} u(0) = b_n + b_{n-1}$$

$$y(2) = b_n u(2) + b_{n-1} u(1) + b_{n-2} u(0) = b_n + b_{n-1} + b_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$y(n) = b_n u(n) + b_{n-1} u(n-1) + \cdots + b_1 u(1) + b_0 u(0) = b_n + b_{n-1} + \cdots + b_1 + b_0 = F(1) = \mu$$

$$y(n+1) = b_n u(n+1) + b_{n-1} u(n) + \cdots + b_1 u(2) + b_0 u(1) = b_n + b_{n-1} + \cdots + b_1 + b_0 = F(1) = \mu$$

$$\vdots$$

$$y(n+m) = b_n + b_{n-1} + \cdots + b_1 + b_0 = F(1) = \mu \qquad \forall\, m \geq 1$$

Esempio

$$F(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{z^2+\frac{5}{4}z+\frac{3}{8}}{z^3}$$

Calcolare i primi quattro campioni della risposta allo scalino del sistema.

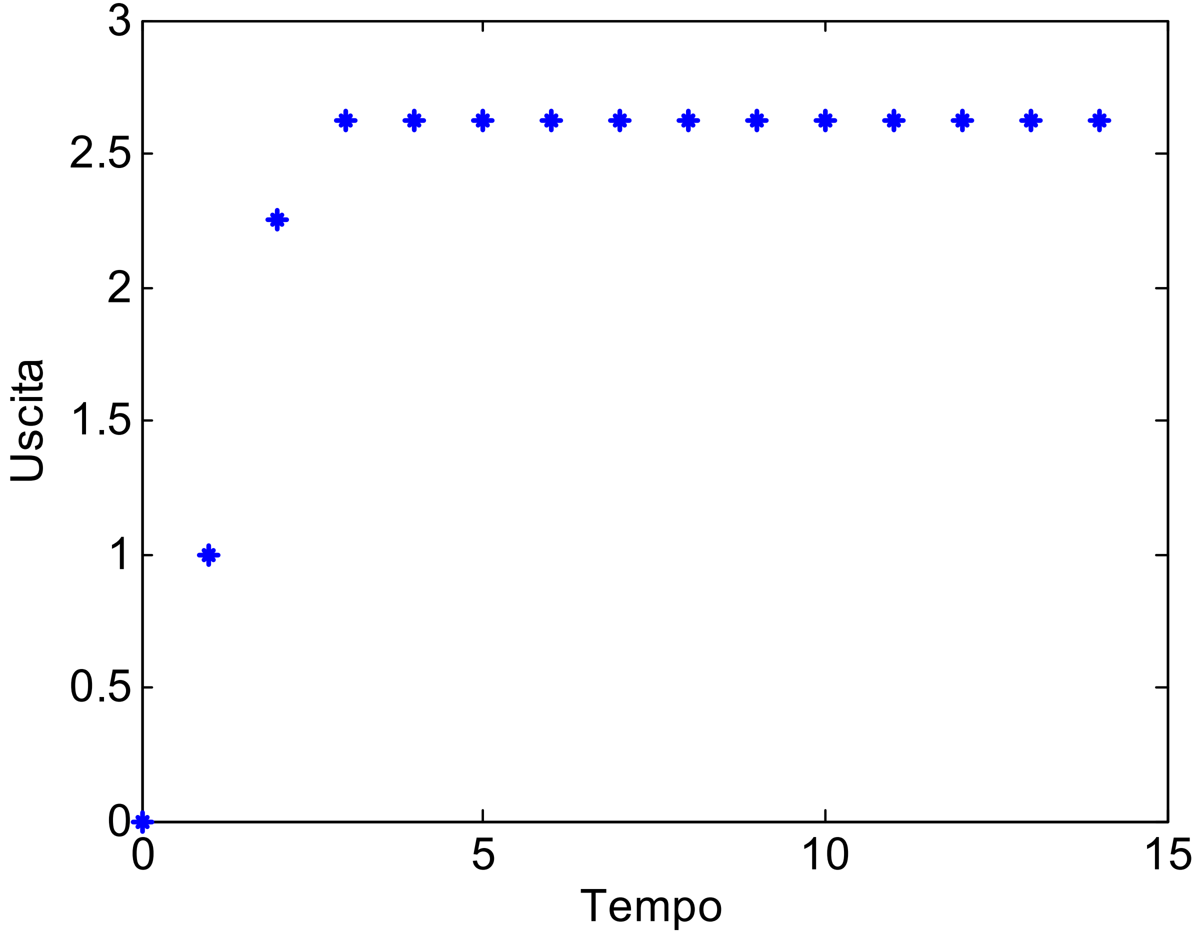
$$z^3Y(z)=\left(z^2+\frac{5}{4}z+\frac{3}{8}\right)U(z)$$

$$y(k+3)=u(k+2)+\frac{5}{4}u(k+1)+\frac{3}{8}u(k)$$

$$y(k)=u(k-1)+\frac{5}{4}u(k-2)+\frac{3}{8}u(k-3)$$

$$u(k)=\text{sca}(k)=\begin{cases}0 & k<0\\ 1 & k\geq 0\end{cases} \Rightarrow$$

k	$u(k)$	$y(k)$
0	1	$y(0)=0+\frac{5}{4}\cdot 0+\frac{3}{8}\cdot 0=0$
1	1	$y(1)=1+\frac{5}{4}\cdot 0+\frac{3}{8}\cdot 0=1$
2	1	$y(2)=1+\frac{5}{4}\cdot 1+\frac{3}{8}\cdot 0=\frac{9}{4}$
3	1	$y(3)=1+\frac{5}{4}\cdot 1+\frac{3}{8}\cdot 1=\frac{21}{8}$
4	1	$y(4)=1+\frac{5}{4}\cdot 1+\frac{3}{8}\cdot 1=\frac{21}{8}$


Uscita
Tempo
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
0
5
10
15

Esempio

Strategie «reactive» per il trading

Stock trading

E' la compravendita di titoli azionari o prodotti derivati.

L'obiettivo è, in generale, ottenere un profitto possibilmente nel breve termine, grazie alle oscillazioni del prezzo.

Fondamentalmente, le metodologie di trading si dividono in due grandi macrocategorie.

- ✓ I metodi basati su **analisi tecnica**, che partono dal presupposto che l'andamento passato del prezzo (e del volume degli scambi) contiene tutta l'informazione sul valore del titolo, incorporando anche informazioni non razionali (il «sentiment» del mercato). Sulla base di questo assunto, i metodi di analisi tecnica cercano di **predire l'andamento futuro del prezzo sulla base dell'andamento passato**.

- ✓ I metodi basati su **analisi fondamentale** che stimano il valore del titolo sulla base di dati ed indicatori legati ai dati di bilancio. Sulla base di questa stima si decidono le azioni di compravendita.

I metodi della prima categoria sono certamente più adatti all'investimento di breve-medio periodo, mentre l'analisi fondamentale è più utile per guidare l'investitore nel lungo periodo.

Un esempio di metodo basato sull'analisi tecnica è quello delle **Medie mobili.**

Reactive trading

L'idea alla base del reactive trading è **rinunciare a cercare di modellare o predire la dinamica del prezzo**, **«reagendo» in tempo reale ai guadagni o alle perdite causati dagli investimenti**.

Sinteticamente, il processo è il seguente:

- ✓ Effettuo un investimento iniziale I_0 per comprare un titolo ad un prezzo $p(0) = p_0$.
- ✓ Se dopo un certo intervallo di tempo, al tempo t, la variazione del prezzo è positiva, cioè $p(t) > p(0)$, rivendendolo realizzerei un guadagno $g(t) > 0$.
- ✓ Quindi, «**reagisco**» in tempo reale al guadagno (anche solo potenziale) ottenuto aumentando il mio livello di investimento sul titolo, effettuando un ulteriore investimento $\delta I(t)$, proporzionale al guadagno, cioè $\delta I(t) = Kg(t)$ con $K > 0$.
- ✓ Si noti che la strategia è coerente anche nel caso di perdita, cioè per $g(t) < 0$. Infatti, in questo caso andrei a diminuire il livello di investimento poiché $\delta I(t) = Kg(t) < 0$.

Semplificando, l'idea alla base è «**compra quando sale e vendi quando scende**».

Per ricavare il **modello matematico** della strategia reactive procediamo passo passo:

1) Il capitale iniziale è $C(0) = C_0$ e lo investo totalmente per comprare un titolo ad un prezzo $p(0) = p_0$. La quantità è pari a $n(0) = n_0 = \frac{C_0}{p_0}$.

2) Al tempo successivo $t = 1$, il valore del titolo è $p(1)$.

Il guadagno (o perdita se $p(1) < p(0)$) è quindi

$$g(1) = \big(p(1) - p(0)\big)n(0)$$

3) Quindi, seguendo la strategia reactive, effettuerò una variazione del capitale investito $\delta I(1) = Kg(1)$.

Questa variazione potrà essere sia positiva che negativa, a seconda del segno di $g(1)$.

Quindi il capitale investito al tempo $t = 1$ sarà $C(1) = C(0) + \delta I(1)$ e corrisponderà ad una quantità in portafoglio $n(1) = \frac{C(1)}{p(1)}$.

Generalizzando i passi 2) e 3) al generico tempo t si ottiene

$$g(t) = \big(p(t) - p(t-1)\big)n(t-1) \equiv \frac{p(t) - p(t-1)}{p(t-1)} C(t-1)$$

Defininendo $\rho(t) = \frac{p(t)-p(t-1)}{p(t-1)}$ il tasso di variazione del prezzo si ha

$$\boxed{\begin{aligned} g(t) &= \rho(t) C(t-1) \\ C(t) &= C(t-1) + \delta I(t) \\ \delta I(t) &= K g(t) \end{aligned}}$$

Modello matematico «base» della strategia di reactive trading

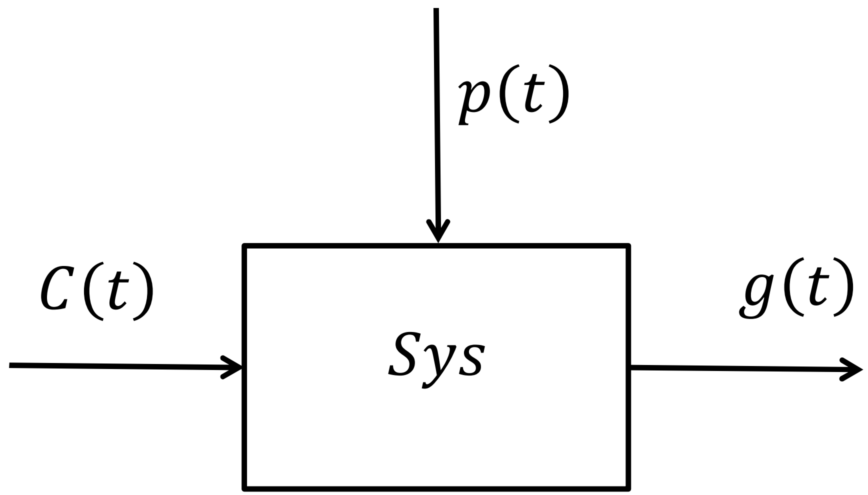
Osservazione 1

La prima equazione rappresenta un sistema dinamico **non lineare** con **ingresso** il capitale investito $C(t)$ ed **uscita** il guadagno $g(t)$. Il prezzo $p(t)$ è un **disturbo** (misurabile).

E' il sistema sotto controllo.

L'**obiettivo di controllo** (indipendentemente dal "reactive trading") potrebbe essere formulato come segue (per esempio):

scegliere l'andamento di $C(t)$ per mantenere $g(t)$ crescente
a fronte del disturbo $p(t)$ il cui andamento non è noto.



Osservazione 2

Nella strategia "reactive trading" si agisce sul capitale investito secondo la logica descritta nelle altre due equazioni.

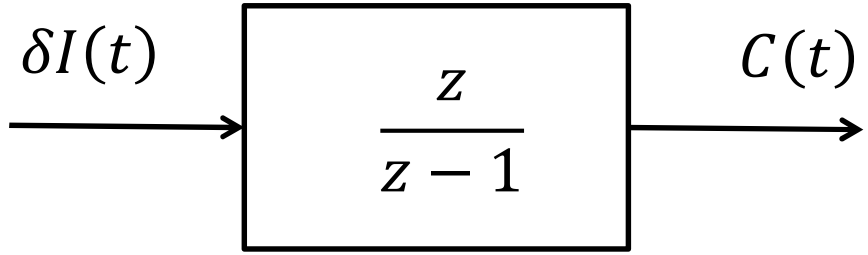
In particolare, la seconda equazione descrive un sistema **lineare** con **ingresso** $\delta I(t)$ ed **uscita** $C(t)$. Esso rappresenta semplicemente la variazione del capitale investito che si ottiene in seguito ad un'azione di compravendita.

$$C(t) = C(t-1) + \delta I(t)$$

Trasformando

$$C(t) = z^{-1}C(t) + \delta I(t)$$

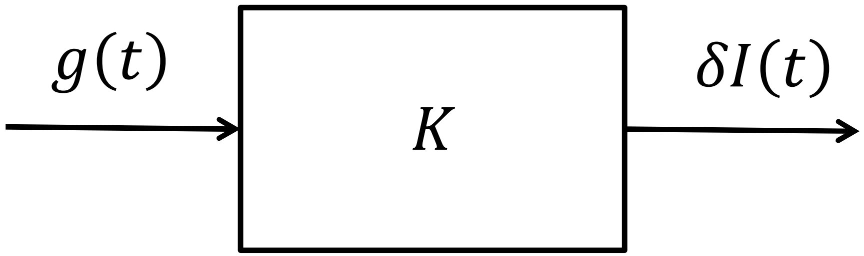
$$C(t) = \frac{1}{1-z^{-1}}\delta I(t) = \frac{z}{z-1}\delta I(t)$$



Osservazione 3

Infine, la terza equazione rappresenta un sistema **lineare non dinamico** (statico):

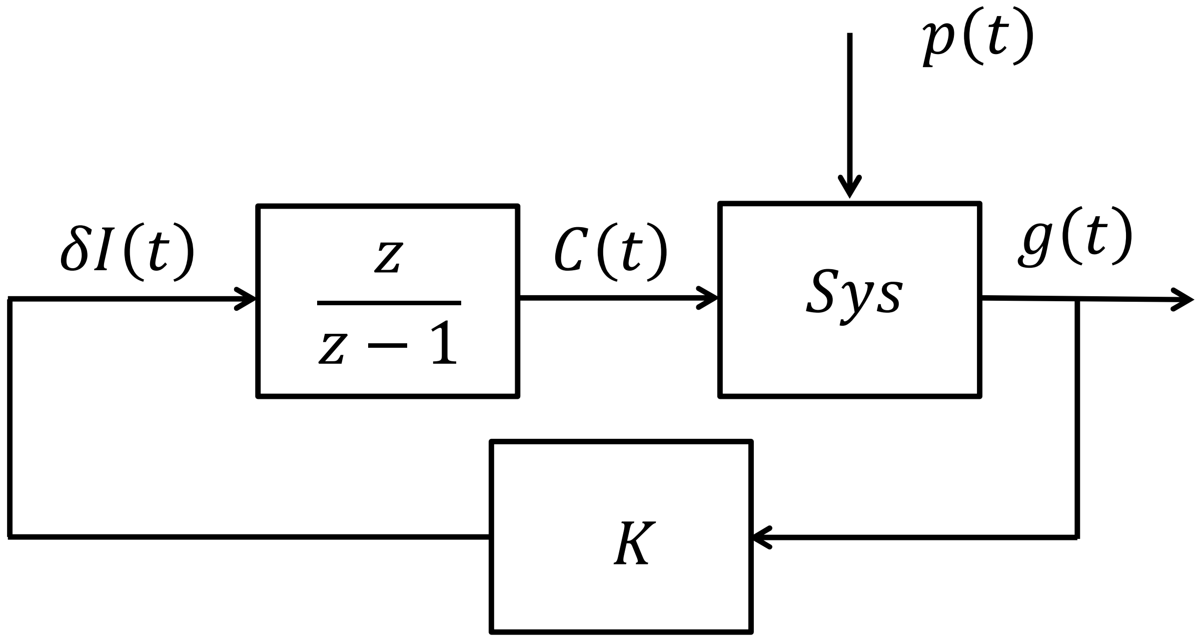
$$\delta I(t) = Kg(t)$$



Questa terza equazione è quella caratterizzante della strategia «reactive trading». Le altre due descrivono solo la «fisica» del sistema, cioè: la prima come varia il capitale al variare del prezzo; la seconda come varia il capitale per effetto delle operazioni di compravendita. Solo questa terza equazione **è una nostra scelta**.
In particolare, la scelta di K è determinante per il comportamento del sistema.

Modello complessivo

E' possibile disegnare lo schema a blocchi complessivo.

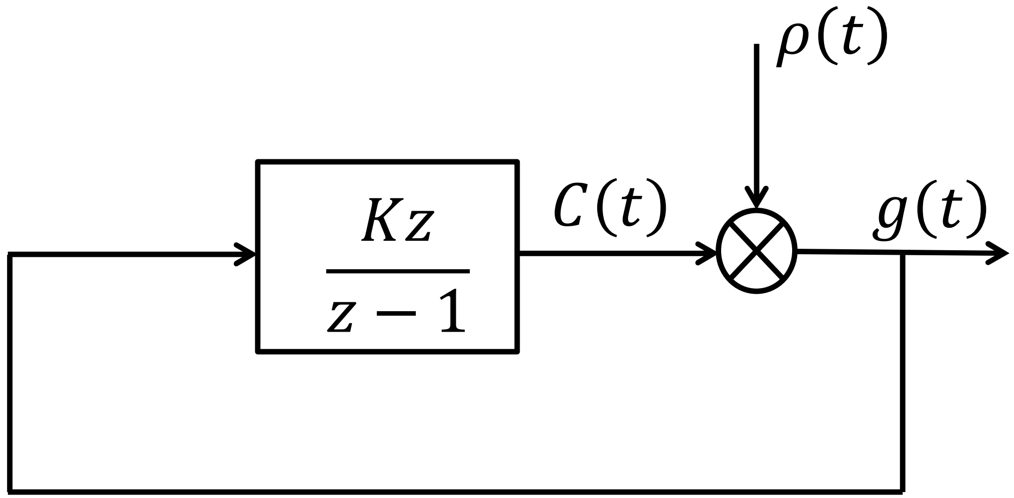


E' un **sistema retroazionato**!

Non ha un **ingresso esogeno** (non è un problema), è "eccitato" dal disturbo il cui effetto sull'uscita va compensato, eliminato. Un altro esempio: sospensioni per veicoli.

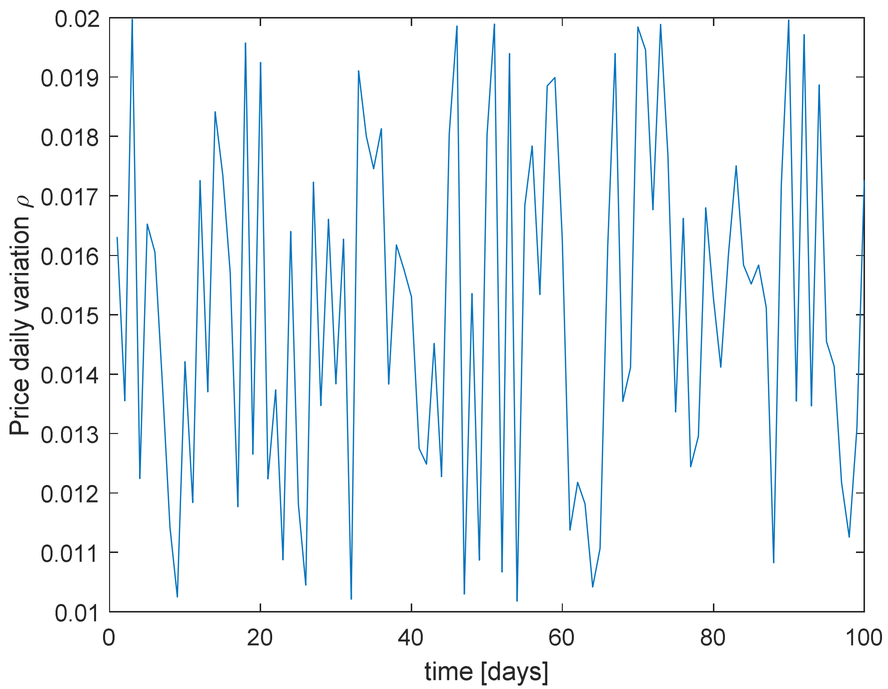
L'**azione di controllo** è $\delta I(t)$ ed è decisa dal regolatore K: una legge di controllo molto semplice, proporzionale all'uscita.

In modo un po' improprio è possibile rappresentare lo schema a blocchi come segue

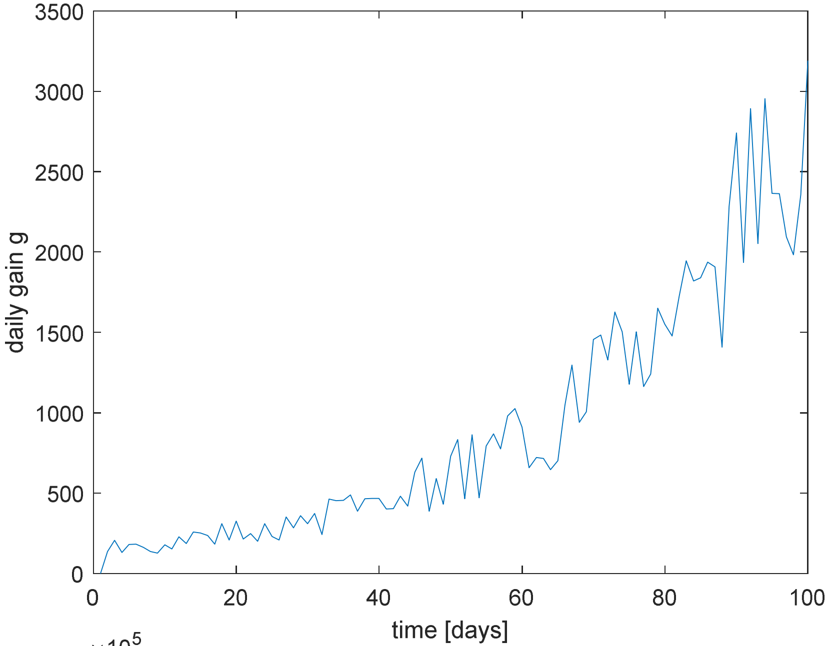


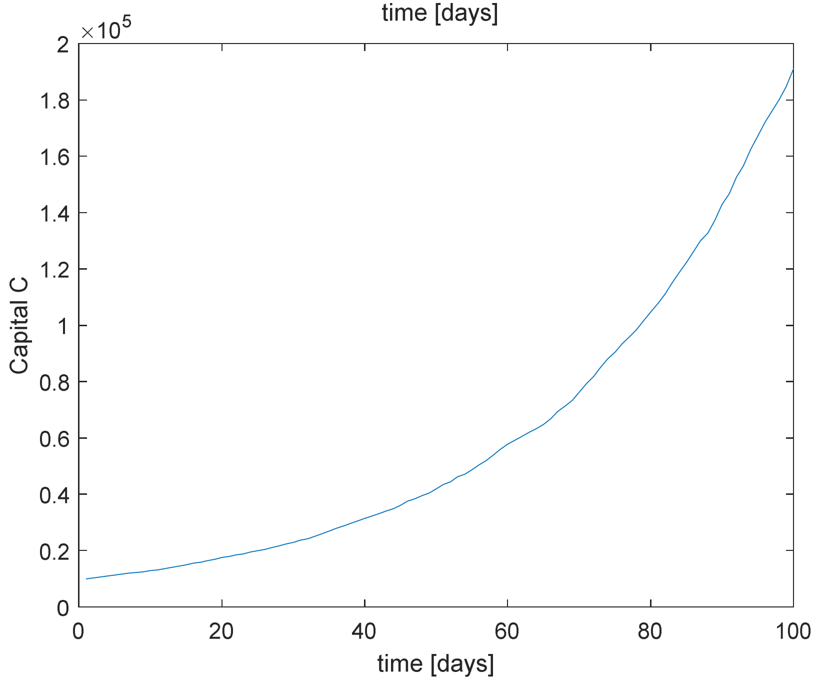
Esso è un sistema non lineare retroazionato che contiene un integratore

Per capire bene il funzionamento della strategia reactive facciamo un esempio "estremo".
Supponiamo di avere il titolo della **Growth inc.** che in un certo periodo, ogni giorno è cresciuto dell'1-2%. Supponiamo di applicare la strategia reactive ogni giorno alla chiusura del mercato.
Nella figura è raffigurato l'andamento di $\rho(t)$ per questo titolo.



In queste figure si vedono i risultati della strategia reactive con $\boldsymbol{K = 2}$.





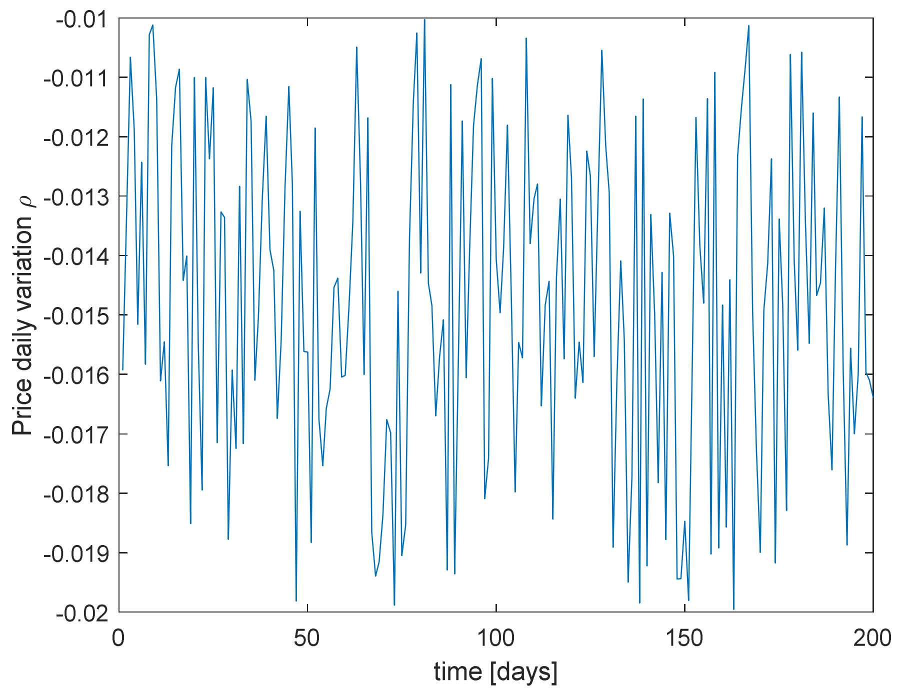
Il **guadagno giornaliero** amplifica sempre più le variazioni positive del prezzo (l'**investimento giornaliero** sarà identico al guadagno a parte il fattore 2). Più guadagno, più investo, più cresce il capitale e di conseguenza il guadagno. Quindi il **capitale investito** cresce continuamente: **aumento sempre più l'esposizione sul titolo**.

Di fatto funziona come un **integratore di rumore a media positiva.**

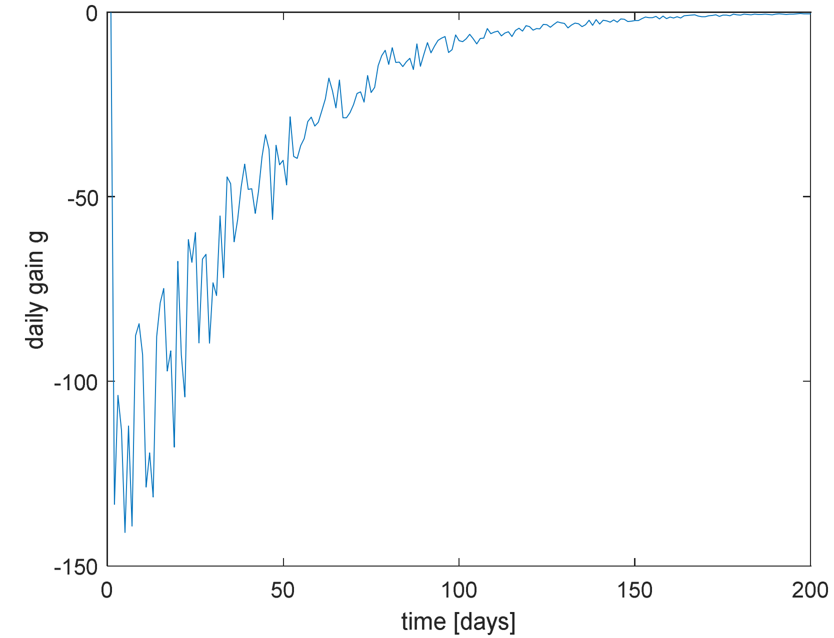
Ora il caso opposto.

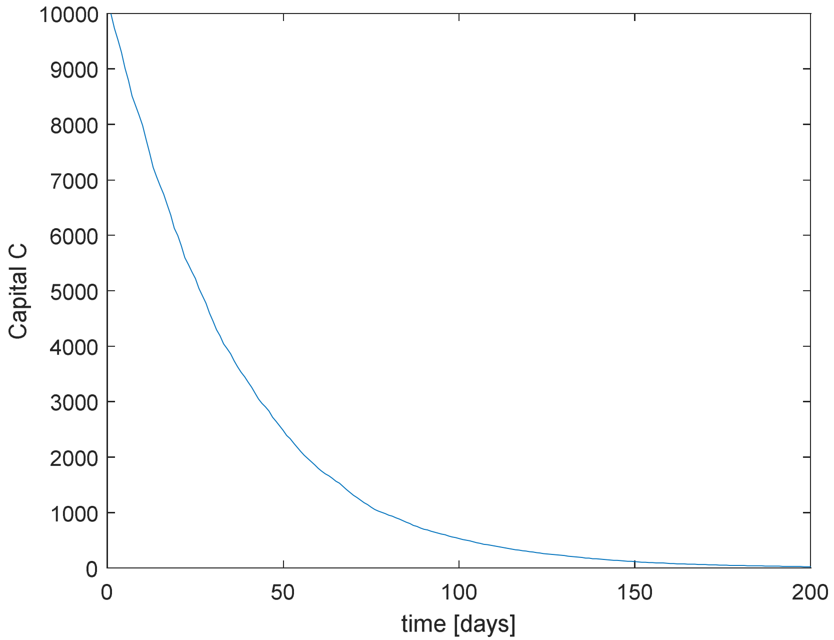
Supponiamo di avere il titolo della **Depression inc.** che in un certo periodo, ogni giorno ha perso circa l'1-2% e supponiamo di applicare la strategia reactive come prima.

Nella figura è raffigurato l'andamento di $\rho(t)$ per questo titolo.



In queste figure si vedono i risultati della strategia reactive con $\boldsymbol{K = 2}$.





Il **guadagno giornaliero** è in realtà una **perdita** e quindi l'**investimento giornaliero** sarà anch'esso negativo, cioè **diminuisco il capitale investito**.

Siccome perdo investo di meno, il capitale investito diminuisce e di conseguenza il guadagno.

Quindi il **capitale investito** diminuisce continuamente fino a ridursi a zero: **diminuisco sempre più l'esposizione sul titolo fino ad annullarla**.

In sintesi, abbiamo una **strategia automatica** che, quando il titolo cresce, aumenta il capitale investito in esso mentre, quando il titolo cala, abbassa l'esposizione su quel titolo in modo automatico.

Note

1) E' possibile definire un'analoga strategia per i **trend negativi**, basata sulla **vendita allo scoperto**. L'uso simultaneo della strategia **Long** e di quella **Short** "promette" performance idealmente sempre positive.

2) Questa strategia funziona tanto meglio tanto più il **trend è ben definito**. Per andamenti "stabili" le performance possono non essere positive.

3) L'approccio presentato non tiene conto dei **costi** di transazione, del costo del denaro, del costo dello scoperto (nel caso di strategia short).

4) Una buona scelta di K è molto importante. Le strategie migliori sono quelle basata su K variabile, in particolare dipendente dal prezzo e dal suo trend.

5) E' possibile usare **regolatori più complessi** (dinamici) ed impostare problemi di inseguimento.