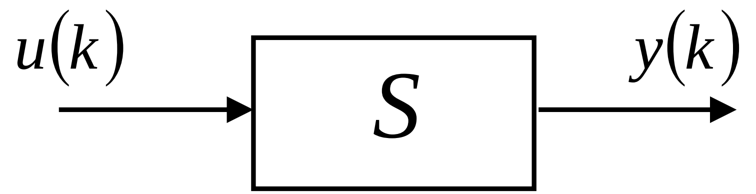
Lezione 23.

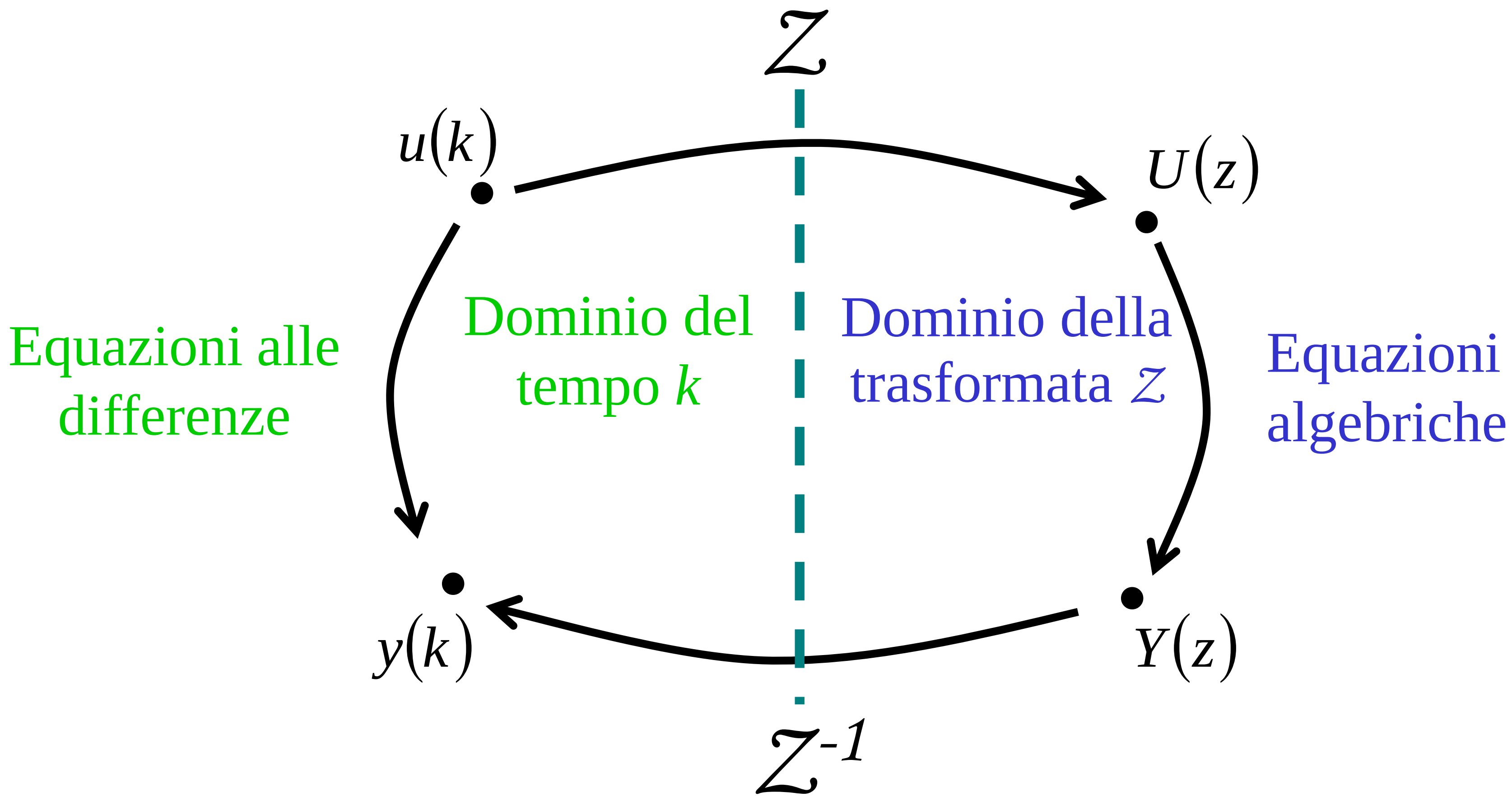
Trasformazione $\mathcal{Z}$

Schema

1. Introduzione
2. Definizione
3. Proprietà
4. Calcolo dell'antitrasformata $\mathcal{Z}$

1. Introduzione





2. Definizione

$$f(k): Z \rightarrow \Re$$

$$\Big\downarrow \mathcal{Z}$$

$$F(z): C \rightarrow \Re$$

Trasforma una funzione reale di variabile intera in una funzione reale di variabile complessa.

$$\boxed{F(z) = \mathcal{Z}\left[f(k)\right] \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = f(0) + f(1) z^{-1} + f(2) z^{-2} + \ldots}$$

Osservazioni

$\mathcal{Z}[f(k)]$ È una funzione reale della variabile complessa z

$\mathcal{Z}[f(k)]$ Non dipende dai valori assunti da $f(k)$ per $k<0$

Esempio - Trasformata dello scalino

$$f(k) = \mathrm{sca}(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$$

$$F(z) = \mathcal{Z}\left[f(k)\right] \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(z^{-1}\right)^{k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

Esempio - Trasformata dell'impulso

$$f(k) = \mathrm{imp}(k) = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

$$F(z) = \mathcal{Z}\left[f(k)\right] \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = f(0) = 1$$

Esempio - Trasformata dell'esponenziale

$$f(k) = a^k$$

$$F(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (az^{-1})^k = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

3. Proprietà

3.1 Linearità

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$$

$$G(z) = \mathcal{Z}[g(k)]$$

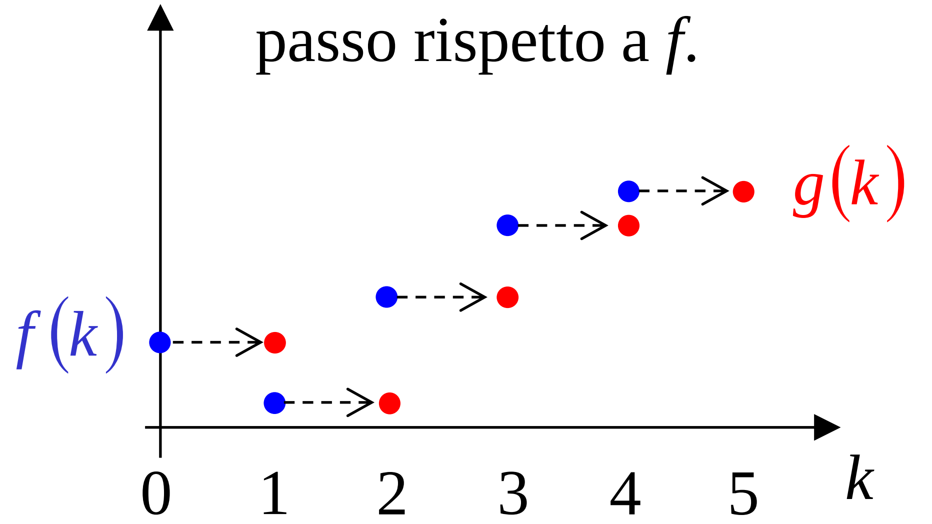
$$\boxed{\mathcal{Z}[\alpha f(k) + \beta g(k)] = \alpha F(z) + \beta G(z)} \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

3.2 Ritardo

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$$

Sia $g(k) = f(k-1)$

g è "in ritardo" di un passo rispetto a f.



Allora $\boxed{G(z) = z^{-1}F(z)}$

Infatti:

$$G(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k-1)z^{-k} = f(-1) + f(0)z^{-1} + f(1)z^{-2} + \cdots =$$

$$= 0 + f(0)z^{-1} + f(1)z^{-2} + \cdots = z^{-1}\left(f(0) + f(1)z^{-1} + \cdots\right) =$$

$$= z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = z^{-1}F(z)$$

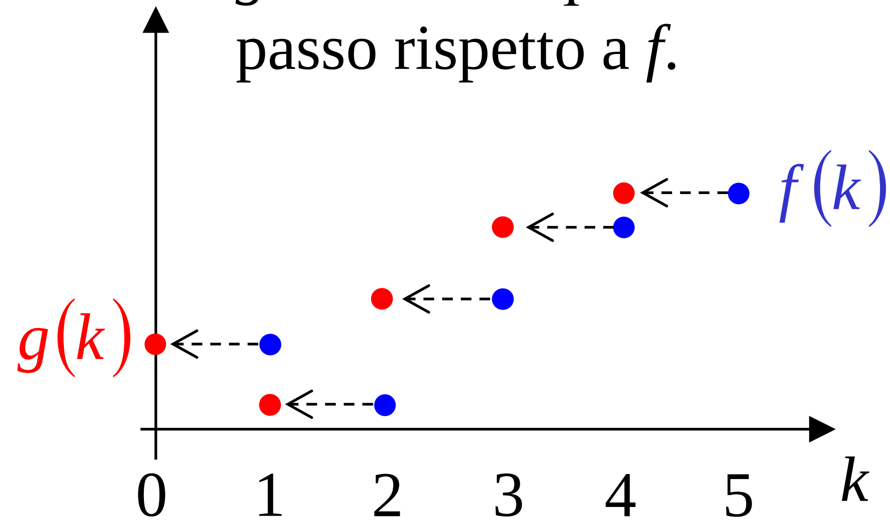
3.3 Anticipo

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$$

Sia $g(k) = f(k+1)$

con $f(0) = 0$

g è “in anticipo” di un passo rispetto a *f*.



Allora $\boxed{G(z) = zF(z)}$

Infatti:

$$G(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k+1) z^{-k} = f(1) + f(2) z^{-1} + f(3) z^{-2} + \cdots$$

$$= z\left(f(1) z^{-1} + f(2) z^{-2} + \cdots\right) = z \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = zF(z)$$

Tabella trasformate notevoli

$\mathrm{imp}(k)$	1
$\mathrm{sca}(k)$	$\dfrac{z}{z-1}$
$\mathrm{ram}(k)$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
$\mathrm{par}(k)$	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
a^k	$\dfrac{z}{z-a}$
$\sin(\vartheta k)$	$\dfrac{z\sin(\vartheta)}{z^2-2\cos(\vartheta)\,z+1}$
$\cos(\vartheta k)$	$\dfrac{z(z-\cos(\vartheta))}{z^2-2\cos(\vartheta)\,z+1}$

4. Calcolo dell'antitrasformata

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)]$$

- ~~Formula esplicita~~
- Teorema del valore iniziale $\Rightarrow$ $f(0)$
- Teorema del valore finale $\Rightarrow$ $f(\infty)$
- ~~Sviluppo di Heaviside~~
- Lunga divisione

(solo per $F(z)$ razionali)

new!

4.1 Teorema del valore iniziale

$$f(0) = \lim_{z\to\infty} \frac{z-1}{z} F(z) = \lim_{z\to\infty} F(z)$$

Infatti:

$$F(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \cdots \xrightarrow[z\to\infty]{} f(0)$$

4.2 Teorema del valore finale

Ipotesi: i poli di $F(z)$ devono avere tutti modulo <1
oppure essere in z=1

$$f(\infty) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} F(z) = \lim_{z\to 1} (z-1) F(z)$$

4.3 Antitrasformata $\mathcal{Z}$ mediante lunga divisione

Si consideri una $F(z)$ razionale

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \quad \text{con} \quad n \leq m$$

Facendo la divisione di polinomi si ottengono tanti campioni di $f(k)$ quanti sono i "colpi" di lunga divisione che si fanno.

Infatti:

$$\begin{array}{l|l} N(z) & D(z) \\ \cline{2-2} & f(0) + f(1) z^{-1} + f(2) z^{-2} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} \end{array}$$

Con la lunga divisione non si ottiene un'espressione analitica di $f(k)$, ma <u>solo i suoi primi campioni</u>.

Esempio

$$F(z)=\frac{4z^2-z+2}{z^2+2z+2}$$

$$\begin{array}{r|l}
4z^2-\ z+2 & z^2+2z+2 \\ \cline{2-2}
-4z^2-8z-8 & 4-9z^{-1}+12z^{-2}+\ \cdots \\ \cline{1-1}
-9z-6 & \\
9z+18+18z^{-1} & \\ \cline{1-1}
12+18z^{-1} &
\end{array}$$

$$f(2)=12$$

$$f(1)=-9$$

$$f(0)=4$$