Lezione 22.

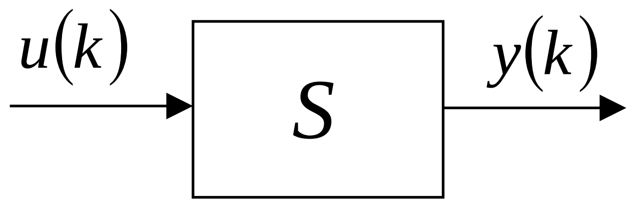
Sistemi dinamici a tempo discreto

Introduzione

Schema

1. Introduzione
2. Segnali a tempo discreto
3. Sistemi LTI SISO a tempo discreto
4. Movimento dell'uscita di un sistema LTI SISO a tempo discreto
5. Equilibrio di un sistema LTI SISO a tempo discreto
6. Guadagno statico di un sistema LTI SISO a tempo discreto

1. Introduzione



Esprimono relazioni causa/effetto (come i sistemi a tempo continuo) tra **segnali discreti**.

Ingresso ed uscita dipendono **dall'indice (temporale) discreto *k***.

Essi sono definiti mediante **equazioni alle differenze**.

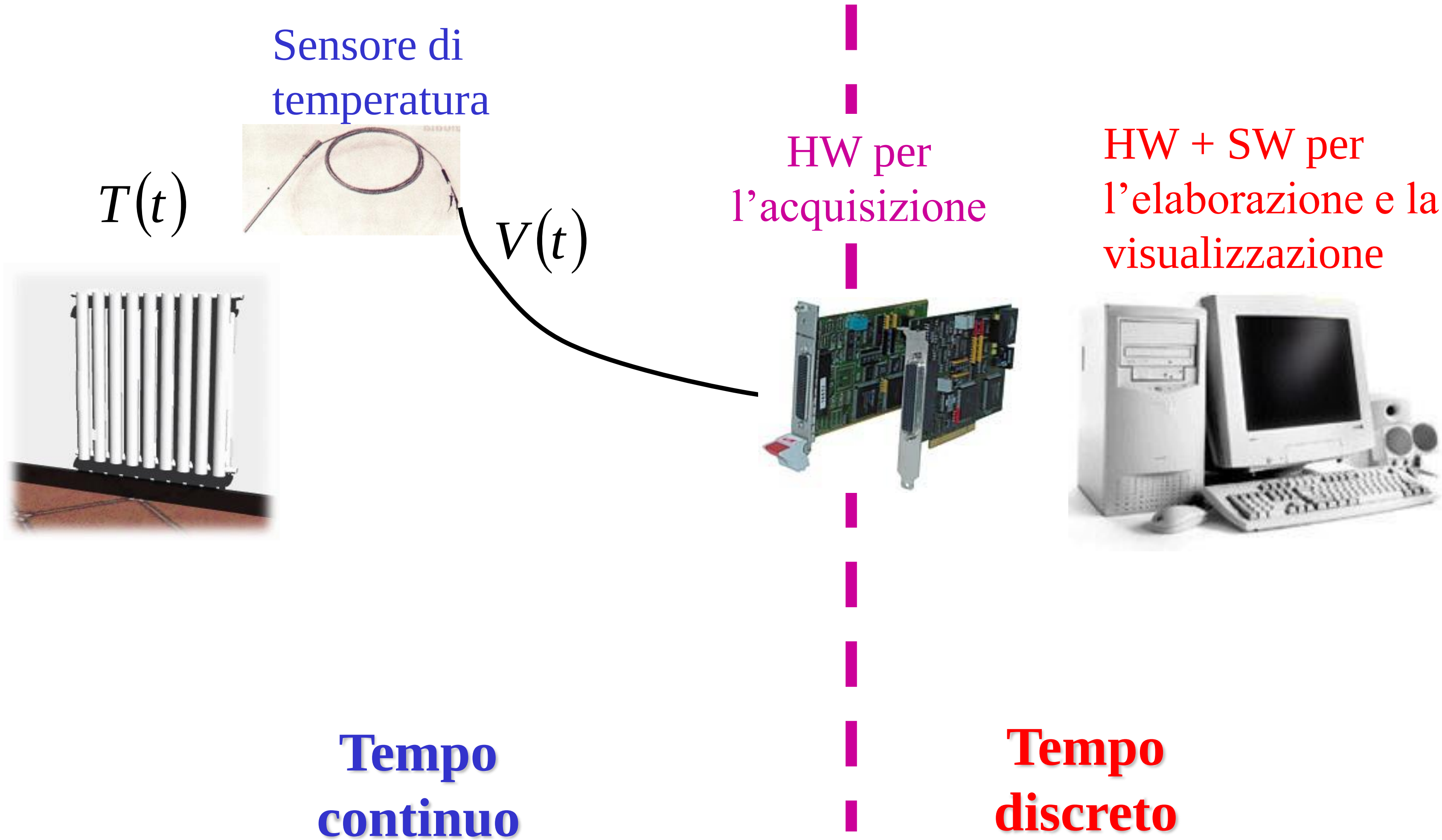
2. Segnali a tempo discreto

Il tempo evolve **con continuità**. Ciò significa che non è possibile definire un intervallo di tempo minimo: sarà sempre possibile concepire un intervallo di tempo più breve.

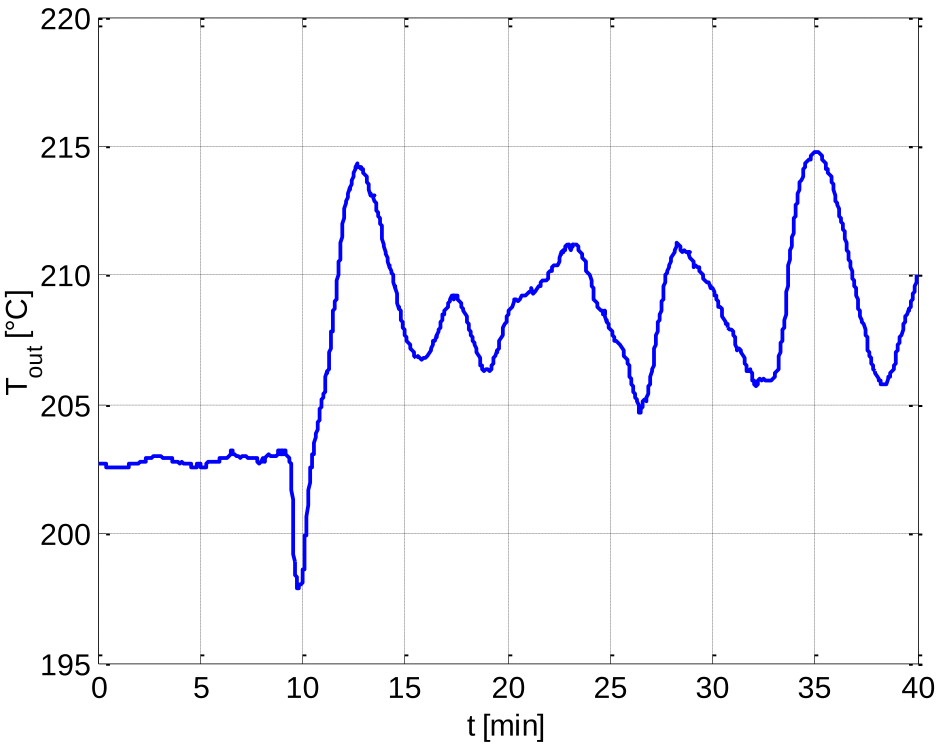
Coerentemente con questo fatto è stata definita e studiata la teoria dei sistemi a tempo continuo, dove le variabili in gioco (ingresso, stato, uscita) sono funzioni del tempo continuo, cioè: ad ogni istante t è possibile definire e assegnare il valore della variabile in quell'istante.

E' possibile definire delle variabili che assumono valori solo in corrispondenza di un indice discreto.

C’è una motivazione molto forte (per le applicazioni di natura ingegneristica) che richiede l’uso di variabili che assumono valori solo in corrisondenza di precisi istanti di tempo.



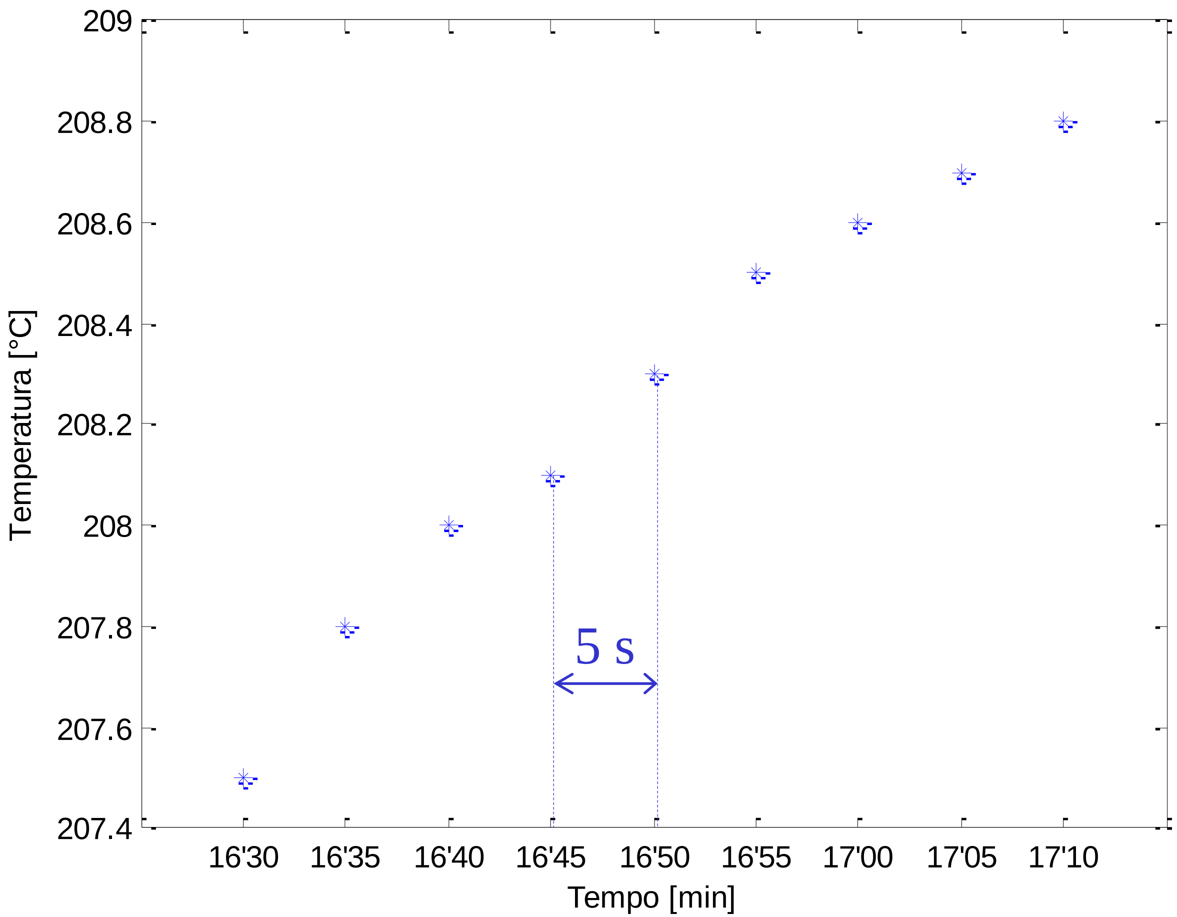
Andamento temporale **continuo** della temperatura



ACQUISIZIONE

Valori **numerici** acquisiti

Tempo [min]	T [°C]
. . .	. . .
16’30”	207.5
16’35”	207.8
16’40”	208.0
16’45”	208.1
16’50”	208.3
16’55”	208.5
17’00”	208.6
17’05”	208.7
17’10”	208.8
. . .	. . .



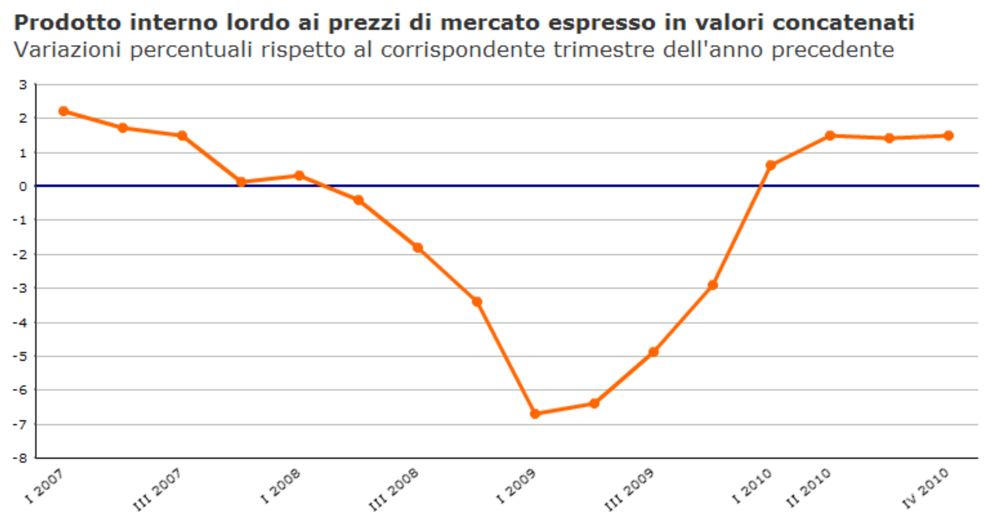
Ogni 5'' è stato acquisito un valore di temperatura.

Il segnale di temperatura che è stato acquisito e memorizzato nel calcolatore assume valori solo ogni 5 s.
E' un **segnale campionato**.

Nota

I dati di natura economica e finanziaria sono intrinsecamente a tempo discreto.

un dato al giorno

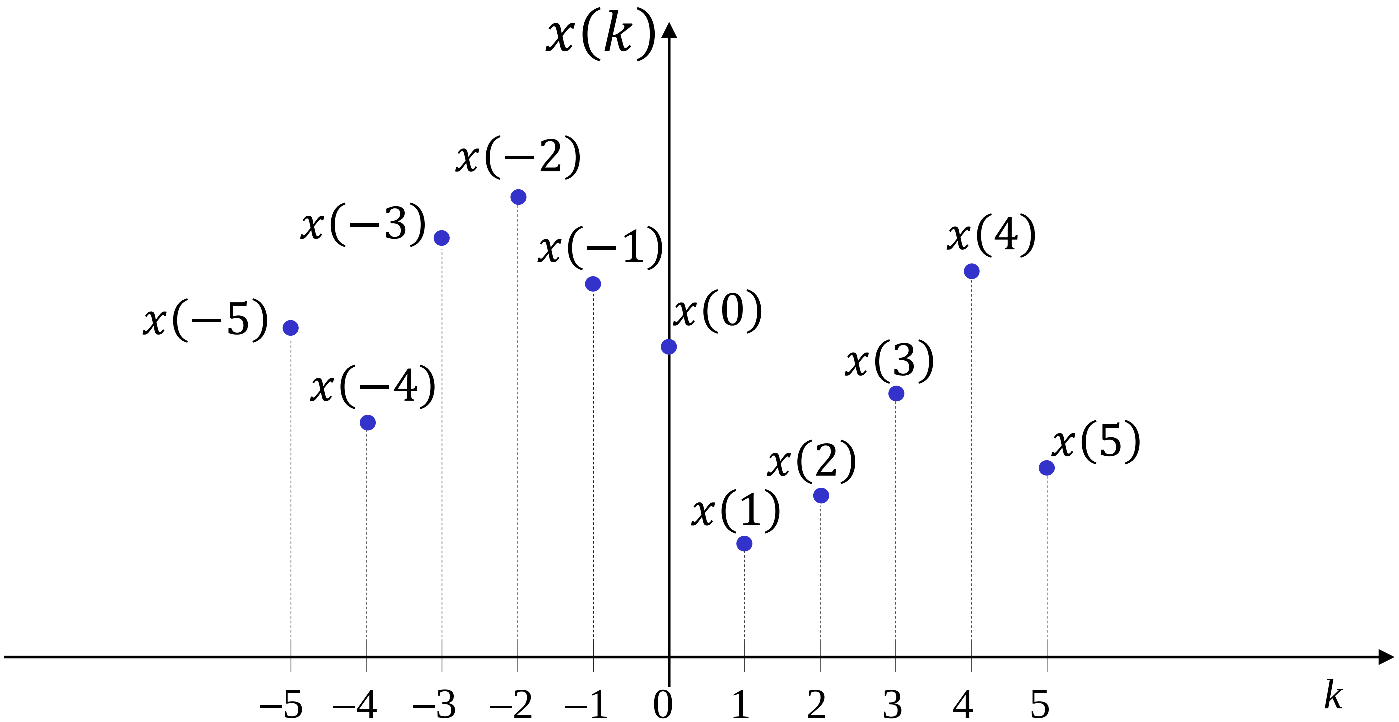


un dato al trimestre

I segnali a tempo discreto sono sequenze di valori reali, ordinate secondo un indice (temporale) intero (relativo).

Vengono usati per descrivere segnali campionati.

$$x(k) \colon \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$



Normalmente l'indice temporale parte da 0, cioè $k \in Z^{+}$.

Sono utilizzate ugualmente le seguenti due notazioni:

$$u_k \quad y_k$$

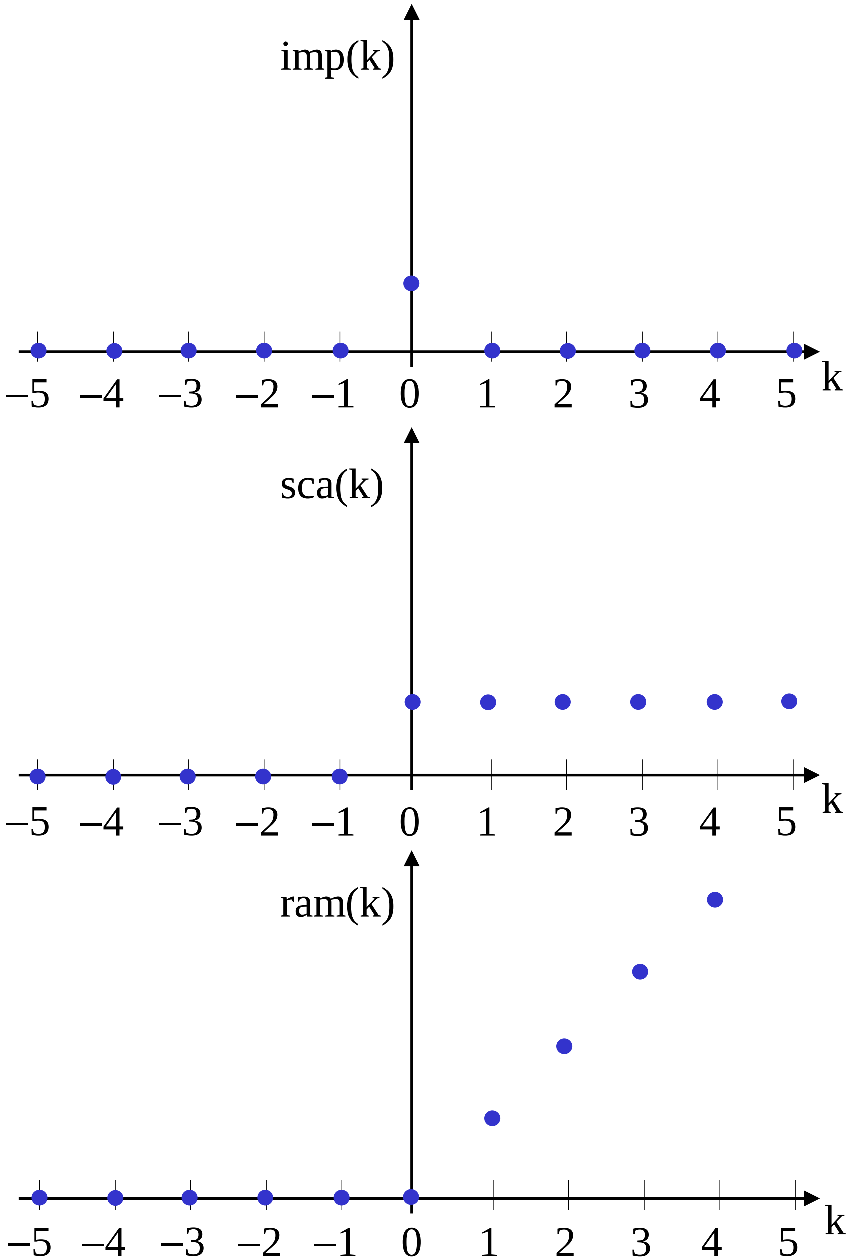
$$u(k) \quad y(k)$$

Segnali canonici

$$\mathrm{imp}(k)=\begin{cases}0 & k\neq 0\\ 1 & k=0\end{cases}$$

$$\mathrm{sca}(k)=\begin{cases}0 & k<0\\ 1 & k\geq 0\end{cases}$$

$$\mathrm{ram}(k)=\begin{cases}0 & k<0\\ k & k\geq 0\end{cases}$$



3. Sistemi LTI SISO a tempo discreto

Un sistema dinamico LTI SISO a tempo discreto con ingresso $u(k)$ scalare ed uscita $y(k)$ scalare è descritto da **equazioni alle differenze lineari a coefficienti costanti** (ottenute per es. per discretizzazione di equazioni differenziali).

$$y(k) = \alpha_1 y(k-1) + \alpha_2 y(k-2) + \cdots + \alpha_n y(k-n) + \\ + \beta_0 u(k) + \beta_1 u(k-1) + \cdots + \beta_m u(k-m)$$

$$y(0) = y_0; y(1) = y_1; \cdots ; y(n-1) = y_{n-1} \quad \text{condizioni iniziali}$$

In un'equazione alle differenze, il valore dell'uscita al tempo k viene calcolato sulla base del valore dell'uscita ai tempi passati k-1,k-2,…e dell'ingresso ai tempi k,k-1,k-2,… .

Osservazione

Convenzionalmente i segnali a tempo discreto sono nulli per tempi negativi, cioè si pone $y(k)=0$, $u(k)=0$ per $k<0$ e quindi le condizioni iniziali possono essere omesse.

Infatti, dato un sistema descritto dall'equazione alle differenze

$$
\begin{aligned}
y(k) = \alpha_1 y(k-1) + \alpha_2 y(k-2) + \cdots + \alpha_n y(k-n) + \\
+ \beta_0 u(k) + \beta_1 u(k-1) + \cdots + \beta_m u(k-m)
\end{aligned}
$$

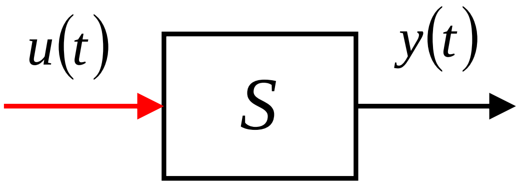
si ha: $y(0) = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \cdots + \alpha_n \cdot 0 +$

$$
+ \beta_0 u(0) + \beta_1 \cdot 0 + \cdots + \beta_m \cdot 0 = \beta_0 u(0)
$$

$$
\begin{aligned}
y(1) = \alpha_1 y(0) + \alpha_2 \cdot 0 + \cdots + \alpha_n \cdot 0 + \\
+ \beta_0 u(1) + \beta_1 u(0) + \ldots + \beta_m \cdot 0 = \alpha_1 \beta_0 u(0) + \beta_0 u(1) + \beta_1 u(0)
\end{aligned}
$$

etc…

4. Movimento dell'uscita di un sistema LTI a tempo discreto



$$y(k) = \alpha_1 y(k-1) + \alpha_2 y(k-2) + \cdots + \alpha_n y(k-n) +$$
$$+ \beta_0 u(k) + \beta_1 u(k-1) + \cdots + \beta_m u(k-m)$$

$y(0) = y_0; y(1) = y_1; \cdots ; y(n-1) = y_{n-1}$ condizioni iniziali

Assegnato un andamento dell'ingresso $u(k)$ [la "forzante"] e assegnate le condizioni iniziali, è possibile integrare l'equazione alle differenze e ottenere l'andamento

$$y(k),\ k \geq 0$$

movimento dell'uscita

In realtà, normalmente, non si integra l'equazione alle differenze, ma si preferisce calcolare i primi campioni del movimento dell'uscita $y(0), y(1), y(2), y(3), \ldots.$

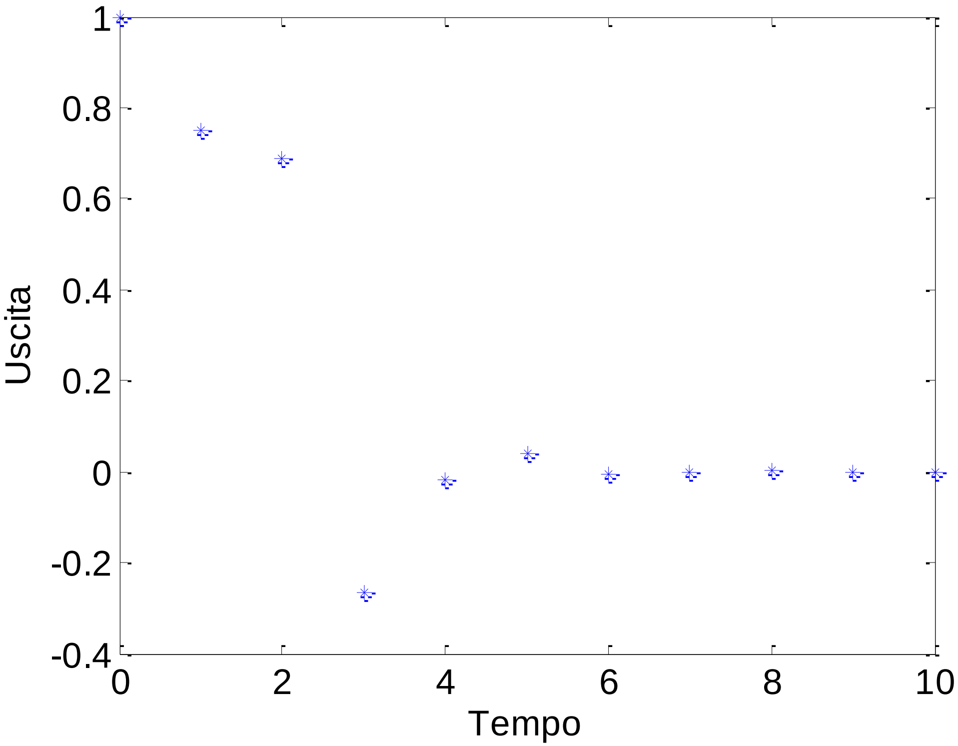
Esempio

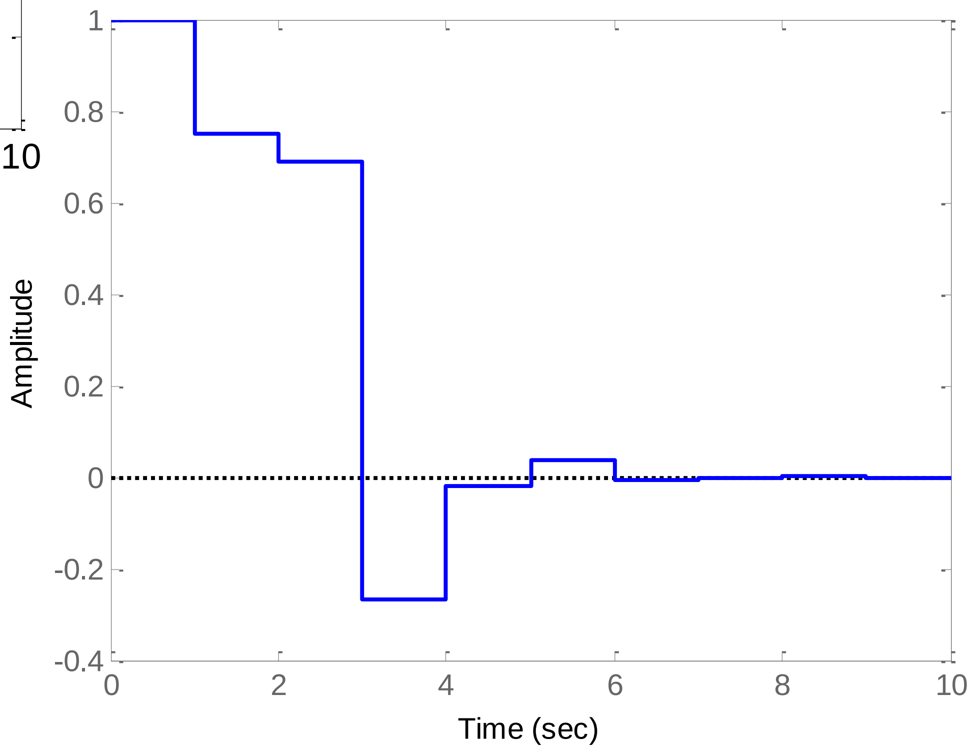
Calcolare $y(0), y(1), y(2), y(3)$ della risposta impulsiva del sistema descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y(k) = -\frac{1}{4}y(k-1) - \frac{1}{8}y(k-2) + u(k) + u(k-1) + u(k-2)$$

$$u(k) = \mathrm{imp}(k) = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

k	$u(k)$	$y(k)$
0	1	$y(0) = -\frac{1}{4}y(-1) - \frac{1}{8}y(-2) + u(0) + u(-1) + u(-2) = 1$
1	0	$y(1) = -\frac{1}{4}y(0) - \frac{1}{8}y(-1) + u(1) + u(0) + u(-1) = \frac{3}{4}$
2	0	$y(2) = -\frac{1}{4}y(1) - \frac{1}{8}y(0) + u(2) + u(1) + u(0) = -\frac{3}{16} - \frac{1}{8} + 1 = \frac{11}{16}$
3	0	$y(3) = -\frac{1}{4}y(2) - \frac{1}{8}y(1) + u(3) + u(2) + u(1) = -\frac{11}{64} - \frac{3}{32} = -\frac{17}{64}$


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
Uscita
0
2
4
6
8
10
Tempo


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
Amplitude
0
2
4
6
8
10
Time (sec)

5. Equilibrio di un sistema LTI SISO a tempo discreto

Si definisce **uscita di equilibrio** di un sistema dinamico lineare tempo-inviariante SISO a tempo discreto il **valore costante dell’uscita** $y(k) = \bar{y}$ (se esiste) che si ottiene in corrispondenza di un assegnato valore costante $u(k) = \bar{u}$, $t \geq 0$ dell’ingresso.

Operativamente si tratta di risolvere l’**equazione algebrica** che si ottiene dall’equazione alle differenze imponendo

$$y(k) = y(k-1) = \cdots = \bar{y}$$

$$u(k) = u(k-1) = \cdots = \bar{u}$$

Esempio

$$y(k) = -0.5y(k-1) + u(k-1) + u(k-2)$$

Calcolare l'uscita di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso costante $\bar{u} = 2, \quad k \geq 0$

Bisogna risolvere l'equazione algebrica

$$\bar{y} = -0.5\bar{y} + \bar{u} + \bar{u} \quad \Rightarrow \quad 1.5\bar{y} = 4 \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = \frac{8}{3}$$

Uscita di equilibrio

(per $u(k) = \bar{u} = 2$)

Osservazione

L'uscita di equilibrio è diversa per diversi valori costanti dell'ingresso, per questo si sottolinea "**in corrispondenza di**".

Osservazione

Non è sempre detto che esista o sia unica l'uscita di equilibrio.
Per es. il sistema dinamico LTI

$$y(k) = y(k-1) + u(k-1) + u(k-2)$$

Non ammette alcuna uscita di equilibrio in corrispondenza di valori costanti dell'ingresso non nulli $\bar{u} \neq 0$

Teorema

Un sistema LTI SISO può avere (in corrispondenza di un dato $\bar{u}$):

- una sola uscita di equilibrio
- infinite uscite di equilibrio
- nessuna uscita di equilibrio

...in stretto parallelismo con i sistemi a tempo continuo

6. Guadagno statico di un sistema LTI SISO

Dato un sistema LTI SISO che ammette un'unica uscita di equilibrio $\bar{y}$ in corrispondenza di un ingresso costante assegnato $\bar{u}$, si dice **guadagno statico del sistema** il rapporto tra l'uscita di equilibrio ed il corrispondente ingresso costante:

$$\boxed{\mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}}}$$

...in stretto parallelismo con i sistemi a tempo continuo