

Lezione 21.

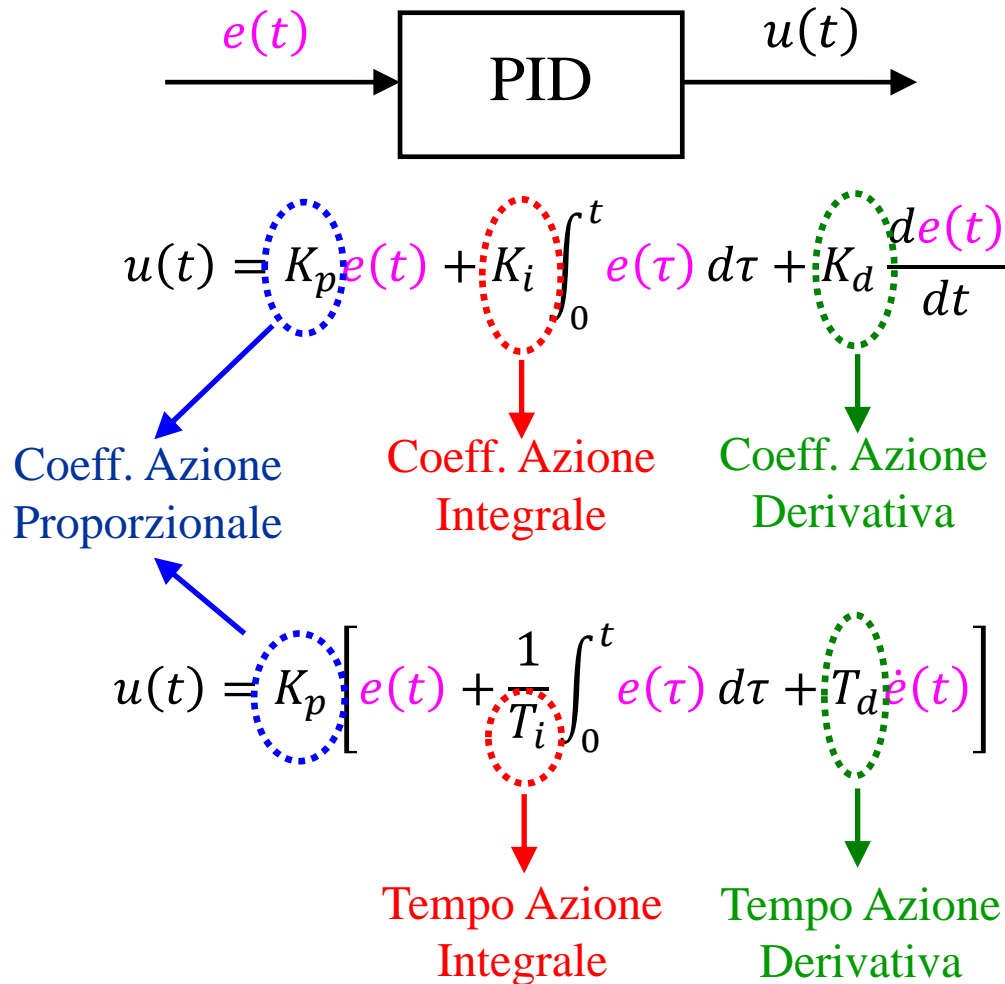
Legge di controllo PID

Schema

1. Definizione
2. Funzione di trasferimento di un PID “ideale”
3. Funzione di trasferimento di un PID “reale”
4. Diagrammi di Bode di un PID “reale”
5. Casi particolari

1. Definizione

Controllori **PID** → ad azione **Proporzionale**, **Integrale**, **Derivativa**.

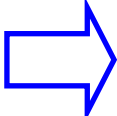


$$T_i = \frac{K_p}{K_i}$$

$$T_d = \frac{K_d}{K_p}$$

Interpretazione delle tre azioni


P → **entità dell'errore**

più errore  più controllo

I → **valor medio dell'errore**

polarizzazione (storia passata)

D → **tendenza dell'errore**

errore crescente  più controllo (storia futura)

2. Funzione di trasferimento di un PID “ideale”

L'azione di controllo nel dominio del tempo è

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \dot{e}(t) \right]$$

Applicando la trasformazione di Laplace si ha

$$U(s) = K_p \left[E(s) + \frac{1}{T_i s} E(s) + T_d s E(s) \right]$$

Derivatore ideale

da cui

$$R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \frac{1 + T_i s + T_i T_d s^2}{T_i s} = K_i \frac{1 + T_i s + T_i T_d s^2}{s}$$

Se $T_i^2 - 4T_i T_d \geq 0$ cioè se $T_i \geq 4T_d$ i due zeri sono reali e quindi

$$R(s) = K_i \frac{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}{s}$$

Funzione di trasferimento del PID “ideale”

- ✓ un polo nell'origine \Rightarrow precisione statica
- ✓ due zeri \Rightarrow precisione dinamica
- ✓ guadagno \Rightarrow guadagno d'anello

3. Funzione di trasferimento di un PID “reale”

❑ azione derivativa “ideale” $\Rightarrow T_d s$ **Non realizzabile**

❑ azione derivativa “reale” $\Rightarrow \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d s}{N}}$ **Realizzabile**
polo in alta frequenza

$$s = -\frac{N}{T_d}, \quad N = 5 \div 20$$

$$U(s) = K_p \left[1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d s}{N}} \right] E(s)$$

Derivatore reale

$$R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \frac{T_i s \left(1 + \frac{T_d}{N} s\right) + \left(1 + \frac{T_d}{N} s\right) + T_i T_d s^2}{T_i s \left(1 + \frac{T_d}{N} s\right)} =$$

$$= K_i \frac{1 + \left(\frac{T_d}{N} + T_i\right) s + \left(\frac{1}{N} + 1\right) T_i T_d s^2}{s \left(1 + \frac{T_d}{N} s\right)}$$

$$R(s) = K_i \frac{(1 + s\bar{\tau}_1)(1 + s\bar{\tau}_2)}{s(1 + s\bar{\tau}_3)}$$

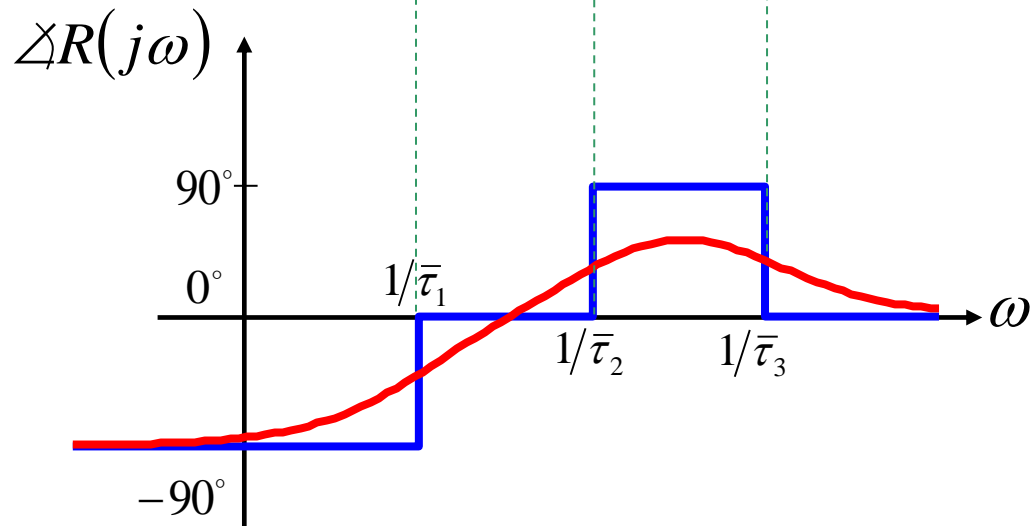
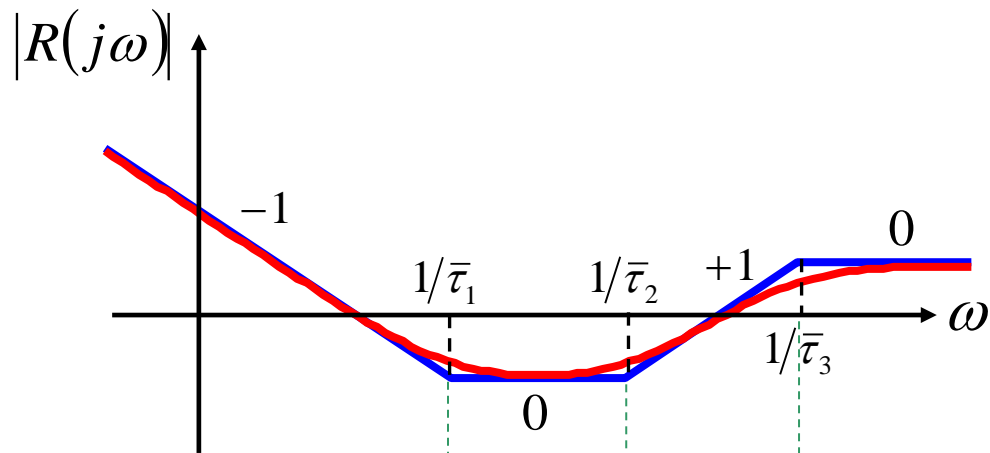
**Funzione di trasferimento
del PID “reale”**

Con una scelta opportuna di N (grande) :

$\bar{\tau}_3 \ll \bar{\tau}_1, \bar{\tau}_3 \ll \bar{\tau}_2$ **polo in alta frequenza**

$\bar{\tau}_1 \cong \tau_1, \bar{\tau}_2 \cong \tau_2$ **zeri prossimi a quelli del PID “ideale”**

4. Diagrammi di Bode di un PID “reale”



Rete “a sella” o
Rete a ritardo e anticipo

5. Casi particolari

P \longrightarrow controllore proporzionale

$$R(s) = K_p$$

I \longrightarrow controllore integrale

$$R(s) = \frac{K_i}{s}$$

PI \longrightarrow controllore proporzionale-integrale

$$R(s) = K_i \frac{(1 + sT_i)}{s}$$

PD \longrightarrow controllore proporzionale-derivativo

$$R(s) = K_p(1 + sT_d)$$

FdT “ideale”

Esempio

Tarare un controllore PI per un sistema con fdt $G(s) = \frac{100}{1+s}$ in modo tale da avere $1 \leq \omega_c \leq 10$

La funzione di trasferimento del controllore è:

$$R(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) = K_p \frac{1 + sT_i}{T_i s} = \frac{K_p}{T_i} \frac{1 + sT_i}{s} = K_i \frac{1 + sT_i}{s}$$

Quindi la funzione d'anello è:

$$L(s) = R(s)G(s) = K_i \frac{1 + sT_i}{s} \frac{100}{1+s}$$

La scelta è “obbligata”: si usa lo zero del regolatore per cancellare il polo dominante del sistema. Scelgo $T_i = 1$ da cui ottengo

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{100K_i}{s}$$

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{100K_i}{s} \quad \Rightarrow \quad \omega_c = 100K_i \text{ rad/s}$$

Per es. per avere $\omega_c = 5 \text{ rad/s}$ bisogna scegliere $K_i = 0.05$

Essendo $K_i = \frac{K_p}{T_i}$ si avrà $K_p = 0.05$

Quindi i parametri del controllore (quelli da scrivere nel codice del PLC) sono $K_p = 0.05$ $K_i = 0.05$

Understanding PID Control, Part 1: What Is PID Control?

<https://www.youtube.com/watch?v=wkfEZmsQqiA>

Understanding PID Control, Part 2: Expanding Beyond a Simple Integral

<https://www.youtube.com/watch?v=NVLXCwc8HzM>

Understanding PID Control, Part 3: Expanding Beyond a Simple Derivative

<https://www.youtube.com/watch?v=7dUVdrs1e18>

Understanding PID Control, Part 4: A PID Tuning Guide

<https://www.youtube.com/watch?v=sFOEsA0Irjs>

Understanding PID Control, Part 6: Manual and Automatic Tuning Methods

<https://www.youtube.com/watch?v=qj8vTO1eIHo>