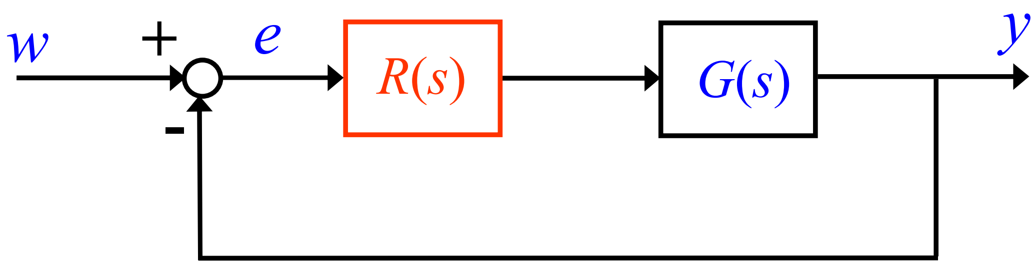
Lezione 20.
Progetto per sistemi a fase minima

Introduzione

Il progetto di controllori mediante "loop shaping" lascia al progettista molti gradi di libertà, in particolare nella scelta della parte dinamica del controllore.

In questa lezione saranno presentate alcune strategie e delle linee guida attraverso esempi (senza alcuna pretesa di esaustività).

Esempio 1 – cancellazione del polo dominante



$$G(s)=\frac{10}{(1+2s)(1+0.1s)}$$

Specifiche di progetto

- $e(\infty)=0$ a fronte di variazioni a scalino del riferimento di ampiezza qualunque.
- $\omega_c \geq 10$ rad/s
- $\varphi_m \geq 30°$

Progetto statico

Per prima cosa si scrive la funzione di trasferimento d'anello

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2\,(s)G(s) = \frac{\mu_R}{s^r}\frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)}\frac{10}{(1+2s)(1+0.1s)} =$$

$$= \frac{10\mu_R}{s^r}\frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)}\frac{1}{(1+2s)(1+0.1s)}$$

Il guadagno d'anello è $\mu = 10\mu_R$.

Il tipo dell'anello è $g = r$.

La scelta è obbligata.
Solo introducendo un polo nell'origine nella funzione d'anello si può avere errore nullo a regime a fronte di variazioni a scalino del riferimento.

Scegliendo $r = 1$ si avrà errore nullo a transitorio esaurito a fronte di variazioni a scalino (di qualunque ampiezza) degli ingressi (riferimento e disturbo in andata)

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s}$$

μ_R verrà scelto dopo

parte statica

Progetto dinamico

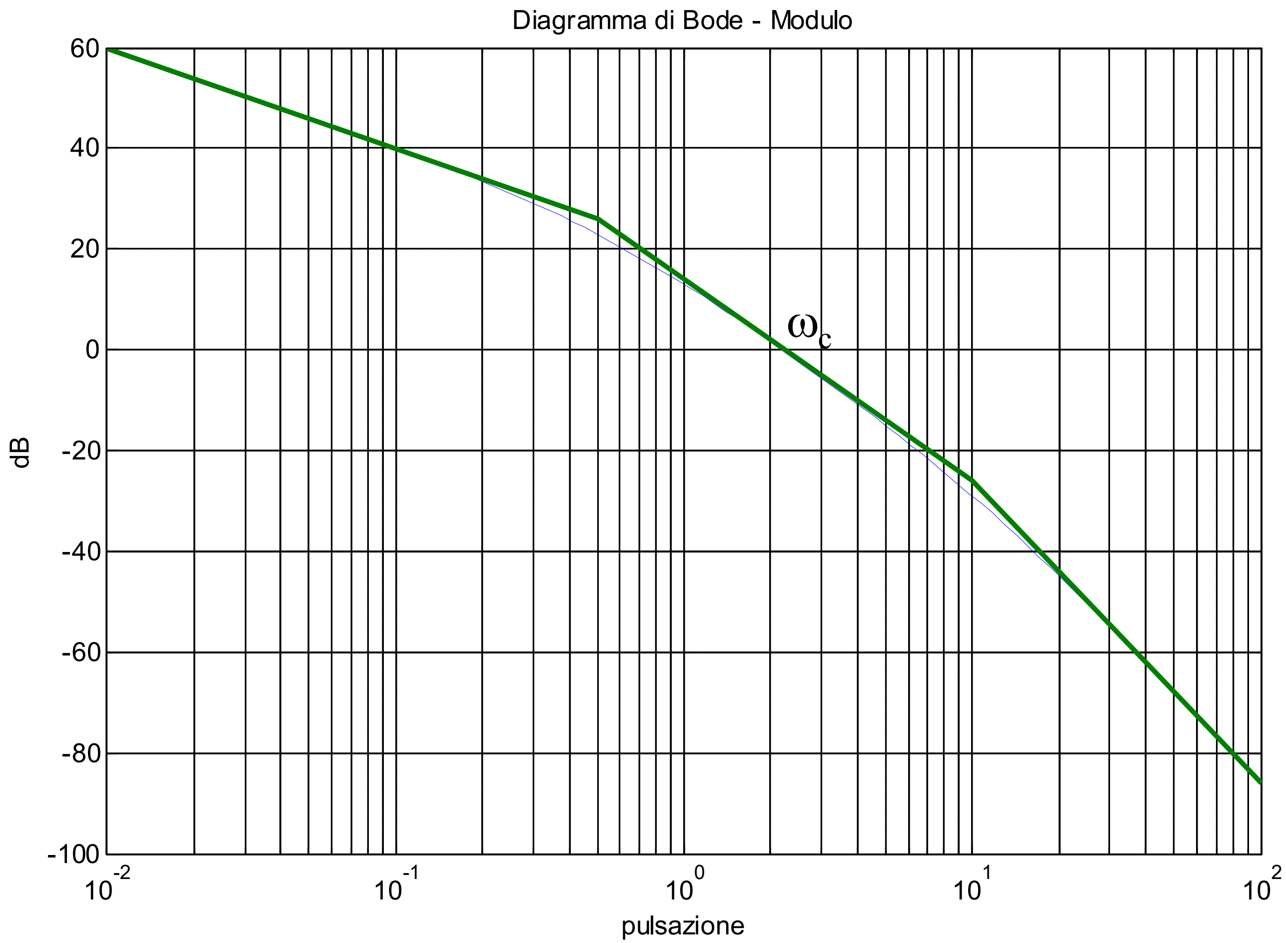
$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2\,(s)G(s) = \frac{\mu_R}{s}R_2\,(s)\frac{10}{(1+2s)(1+0.1s)} =$$

$$= \frac{10\mu_R}{s}R_2\,(s)\frac{1}{(1+2s)(1+0.1s)}$$

Primo tentativo $R_2(s) = 1$ $\mu_R = 1$

$$L'(s) = \frac{10}{s(1+2s)(1+0.1s)}$$

Si tracci il diagramma di Bode del modulo di $L'(j\omega)$



$\omega_c \cong 2{,}2$ rad/s no !

Fase critica sicuramente superiore a 150° no !

Secondo tentativo $R_2(s) = 1 + 2s \quad \mu_R = 1$

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2\,(s)G(s) = \frac{\mu_R}{s}R_2\,(s)\frac{10}{(1+2s)(1+0.1s)} =$$

$$= \frac{10\mu_R}{s}R_2\,(s)\frac{1}{(1+2s)(1+0.1s)}$$

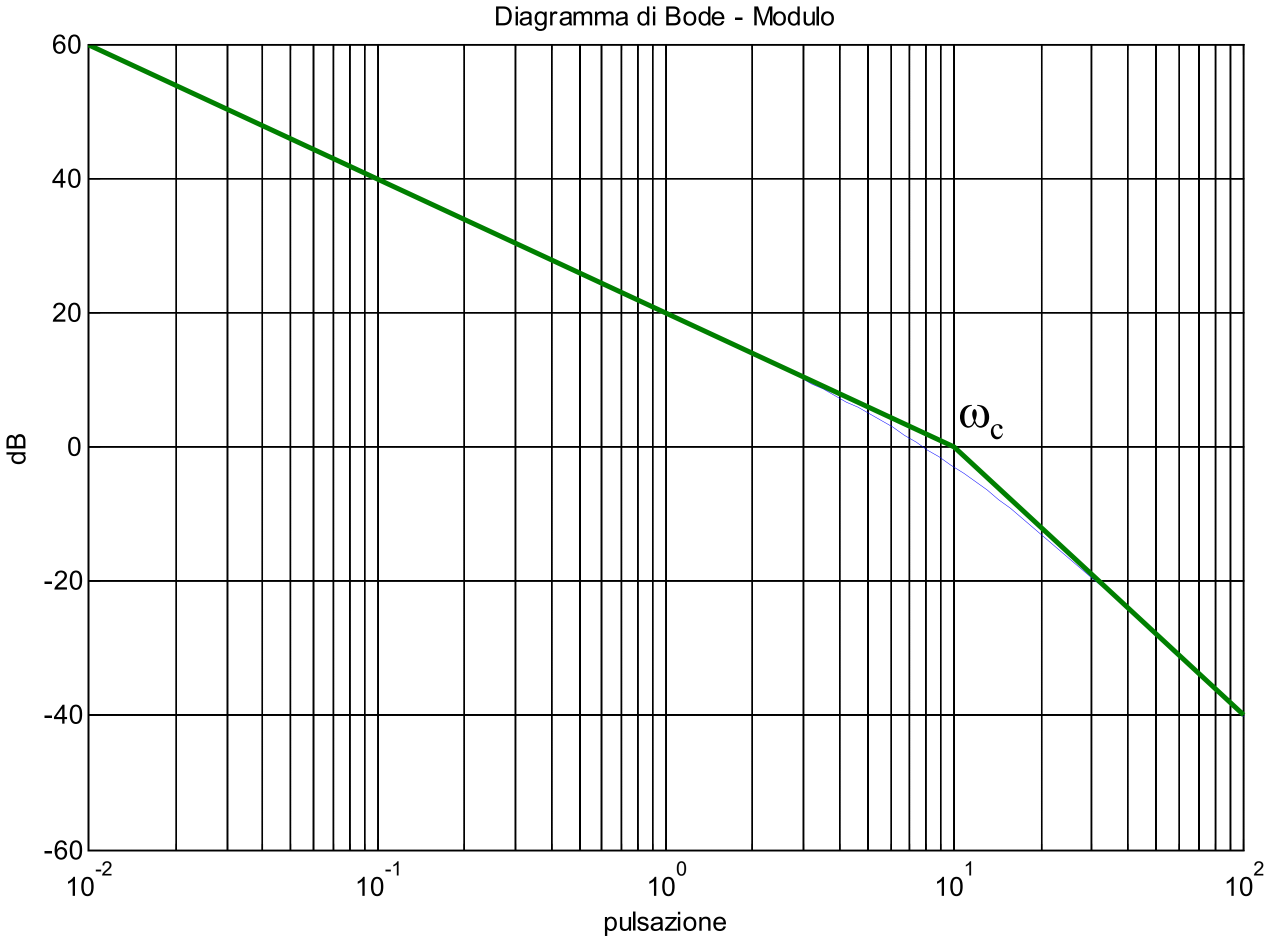
$$L''(s) = \frac{10}{s}(1+2s)\frac{1}{(1+2s)(1+0.1s)} = \frac{10}{s(1+0.1s)}$$

Si tracci il diagramma di Bode del modulo di $L''(j\omega)$

Nota bene

E' lecito scegliere <u>uno zero soltanto</u> come parte dinamica del regolatore?

Sì perché c'è un polo (nell'origine) nella parte statica e quindi il regolatore sarà proprio (un polo ed uno zero).



$\omega_c \cong 10$ rad/s ✓

Fase critica pari a 135° quindi margine di fase

$\varphi_m = 45°$ ✓

Non serve scegliere un valore del guadagno del regolatore μ_R diverso da 1. Quindi la soluzione è

$$\boxed{R(s) = \frac{1+2s}{s}}$$

Nota bene (per i “puristi”)

Ai fini delle attività didattiche fa fede il diagramma asintotico.

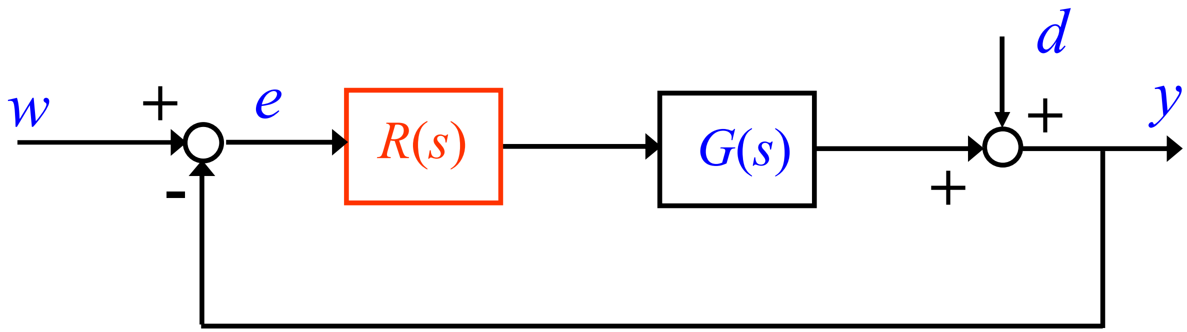
E’ però evidente che la pulsazione critica effettiva sarà inferiore a 10 rad/s.

E’ quindi lecito (per i “puristi”, appunto) correggere il progetto scegliendo un valore del guadagno del regolatore μ_R tale che la pulsazione critica effettiva sia superiore a 10 rad/s.

Il valore minimo necessario perché ciò accada è (ovviamente)

$$\mu_R = 3\,\mathrm{dB} \quad \Rightarrow \quad \mu_R = 1.41$$

Esempio 2 – raccordi in AF e BF



$$G(s)=\frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

Specifiche di progetto

- $|e(\infty)| \leq 0.1$ con $w(t)=\mathrm{sca}(t)$, $d(t)=5\mathrm{sca}(t)$
- $\omega_c \geq 0.2$ rad/s
- $\varphi_m \geq 60°$

Progetto statico

Per prima cosa si scrive la funzione di trasferimento d'anello

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2\,(s)G(s) = \frac{\mu_R}{s^r}\frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)}\frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)} =$$

$$= \frac{10\mu_R}{s^r}\frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)}\frac{1}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

Il guadagno d'anello è $\mu = 10\mu_R$.

Il tipo dell'anello è $g = r$.

Ricordiamo che si applica la disuguaglianza di «caso pessimo»

$$|e(\infty)| = |e_w(\infty) + e_d(\infty)| \leq |e_w(\infty)| + |e_d(\infty)|$$

I singoli contributi valgono (vedi prima colonna della tabellina)

$$|e_w(\infty)| = \begin{cases} \dfrac{1}{1+10\mu_R} & \text{se } r = 0 \\ 0 & \text{se } r > 0 \end{cases}$$

$$|e_d(\infty)| = \begin{cases} \dfrac{5}{1+10\mu_R} & \text{se } r = 0 \\ 0 & \text{se } r > 0 \end{cases}$$

- scegliendo $r = 1$

$$e(\infty) = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1(s) = \frac{\mu_R}{s}$$

μ_R verrà scelto dopo

- scegliendo $r = 0$

$$|e_w(\infty)| + |e_d(\infty)| \leq 0.1$$

da cui

$$\frac{6}{1 + 10\mu_R} \leq 0.1 \quad \Rightarrow \quad \mu_R \geq 5.9$$

Scegliamo

$$r = 0$$
$$\mu_R = 10$$

Quindi

$$R_1(s) = 10$$

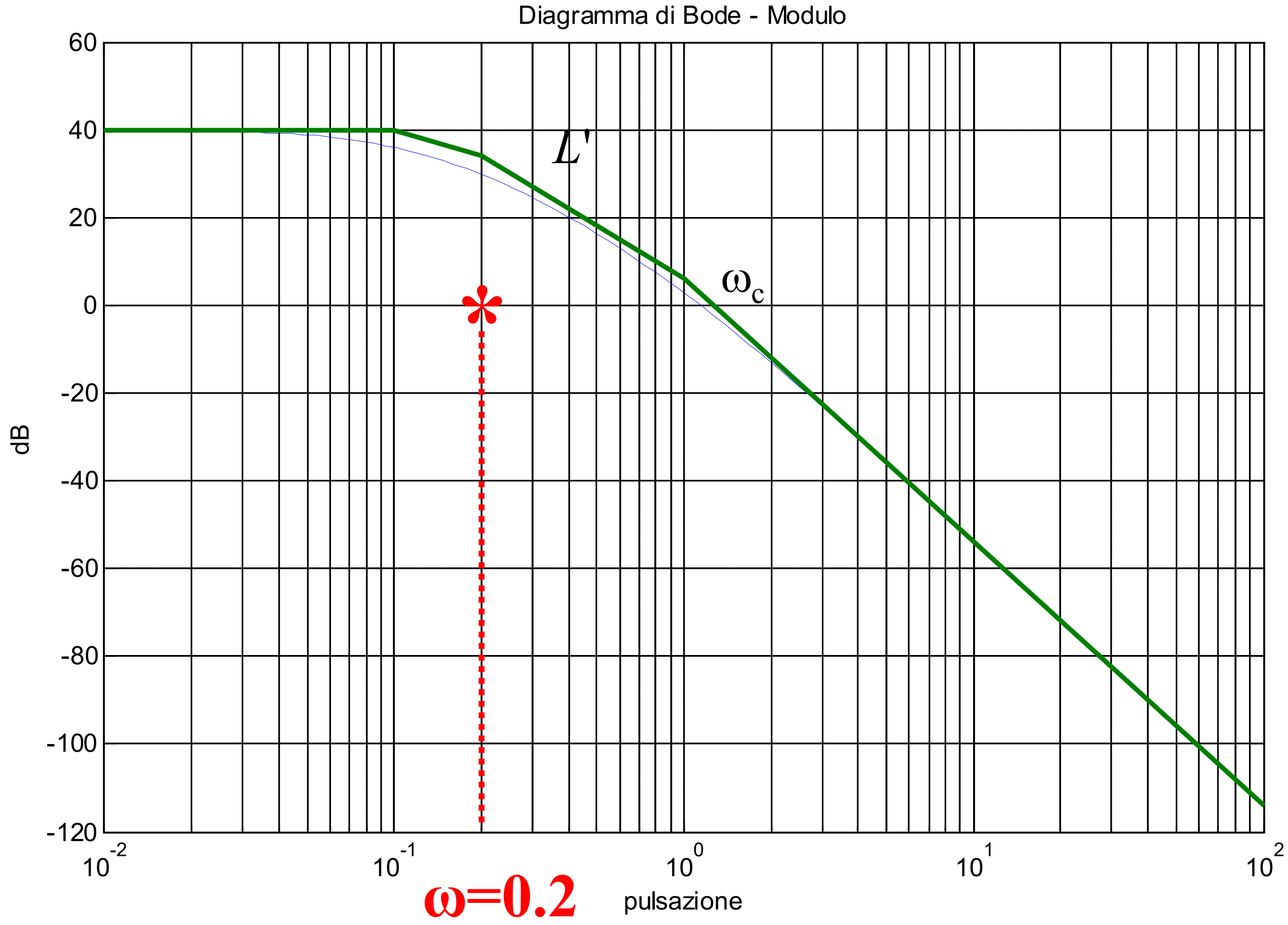
Progetto dinamico

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2\,(s)G(s) = 10R_2\,(s)\frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

Primo tentativo $R_2(s) = 1$

$$L'(s) = \frac{100}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

Si tracci il diagramma di Bode del modulo di $L'(j\omega)$



$\omega_c \cong 1{,}3$ rad/s ✓

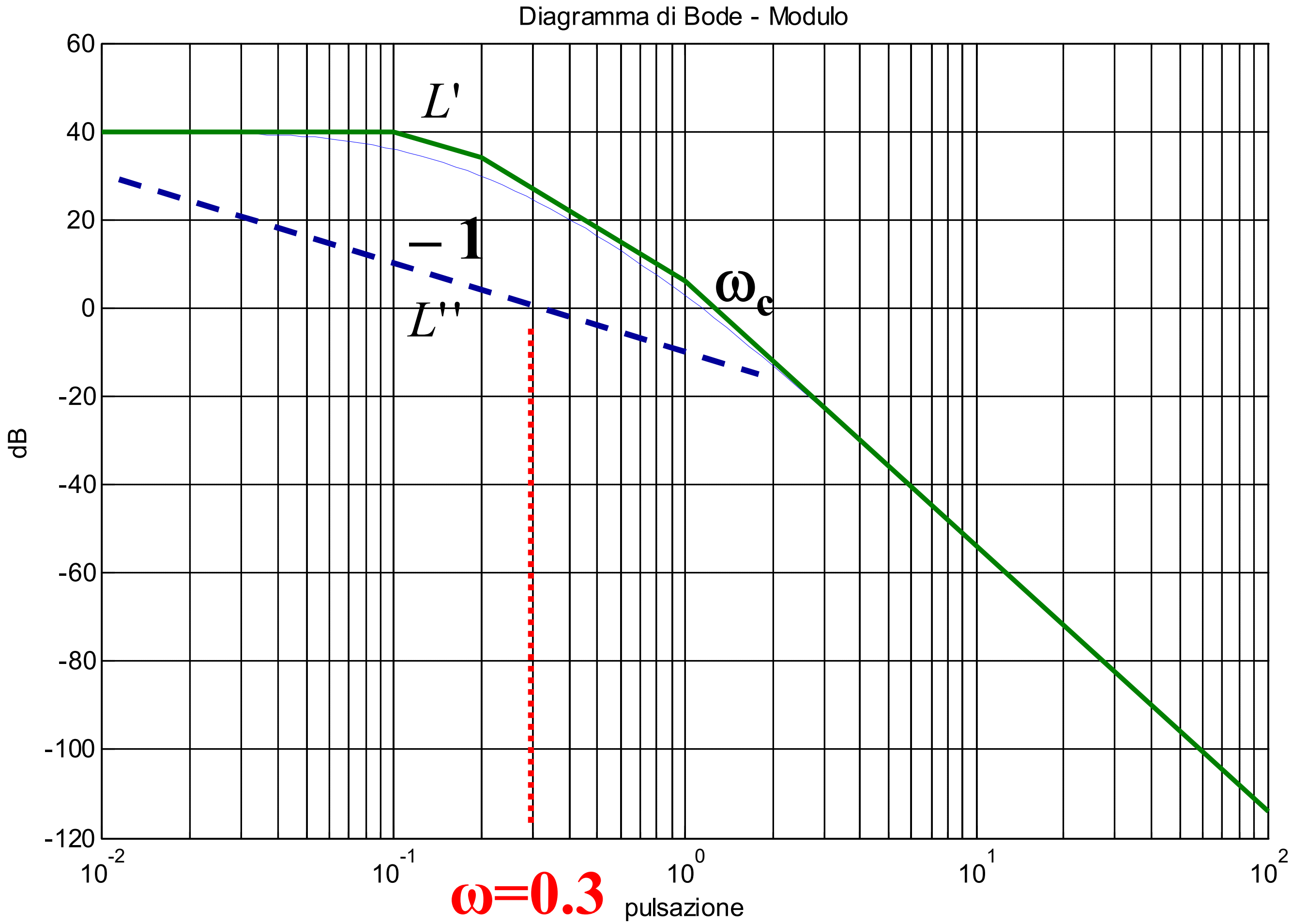
Fase critica sicuramente superiore a 120° no !

Nota bene

Sarebbe un errore gravissimo modificare il guadagno d'anello, perché si altererebbe il progetto statico.

Secondo tentativo

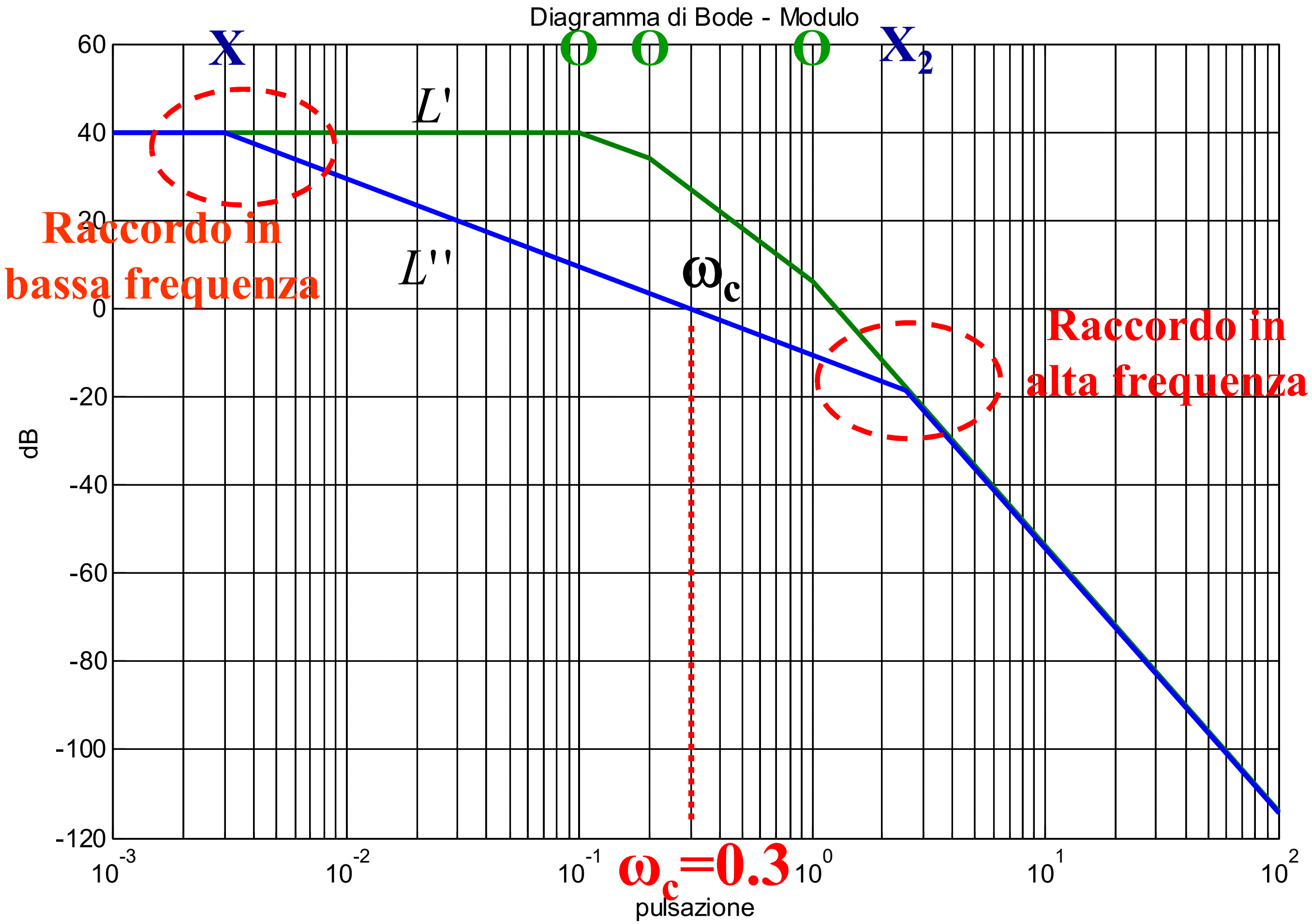
Costruire $L''(s)$ in modo che $|L''(j\omega)|$ tagli l'asse a 0 dB in $\omega_c \cong 0.3$ con pendenza – 1 (–20 dB/dec)



Ciò si può ottenere:

✓ cancellando (con **tre zeri**) i tre poli di $G(s)$

✓ raccordando il diagramma di $|L''(j\omega)|$ con il diagramma di $|L'(j\omega)|$ in bassa frequenza ed in alta frequenza, mediante l'introduzione in $L''(s)$ di **tre poli** in posizioni opportune.



Quindi:

$$R_2(s) = \frac{(1+10s)(1+5s)(1+s)}{\left(1+\tau_{bf}s\right)\left(1+\tau_{af}s\right)^2}$$

La posizione dei poli di raccordo si desume dal grafico:
- il polo in bassa frequenza non può che essere in 0.003;
- la coppia di poli in alta frequenza è in circa 2.5.

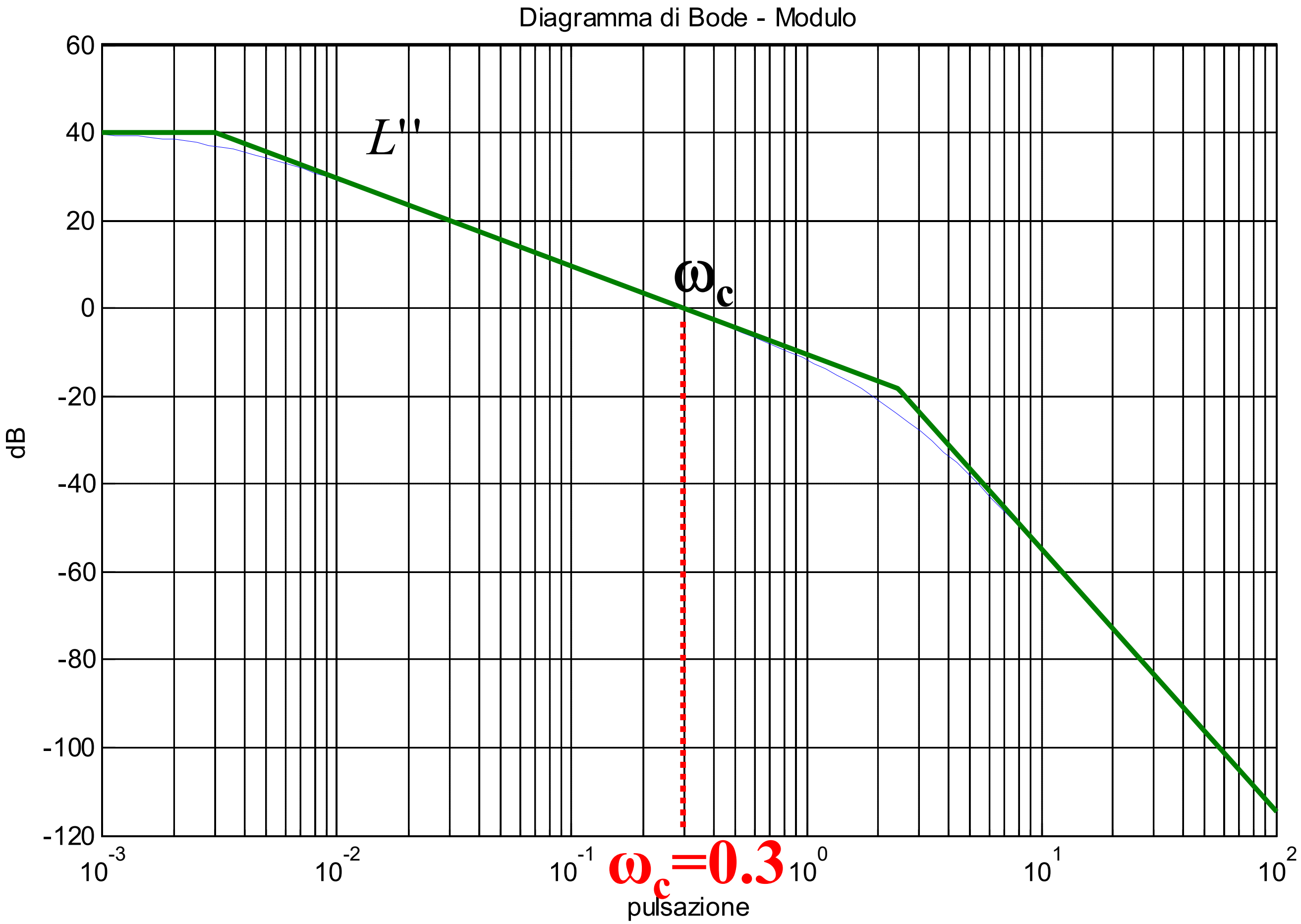
Cioè:

$$R_2(s) = \frac{(1+10s)(1+5s)(1+s)}{(1+333s)(1+0.4s)^2}$$

$$L''(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = 10\frac{(1+10s)(1+5s)(1+s)}{(1+333s)(1+0.4s)^2}\frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)} =$$

$$= \frac{100}{(1+333s)(1+0.4s)^2}$$

Si tracci il diagramma di Bode del modulo di $L''(j\omega)$



$\omega_c \cong 0.3$ ✓

$$\varphi_c = -\mathrm{atan}(333 \cdot 0.3) - 2\mathrm{atan}(0.4 \cdot 0.3) =$$
$$= -89.4° - 2 \cdot 6.8° = -103°$$

$$\boxed{R(s) = 10\frac{(1+10s)(1+5s)(1+s)}{(1+333s)(1+0.4s)^2}}$$

$$\Rightarrow \varphi_m = 77°$$ ✓

Nel progetto statico era possibile un'altra scelta, cioè inserire un integratore nell'anello scegliendo $R_1(s) = \frac{\mu_R}{s}$. Vediamo come sarebbe cambiato il progetto dinamico.

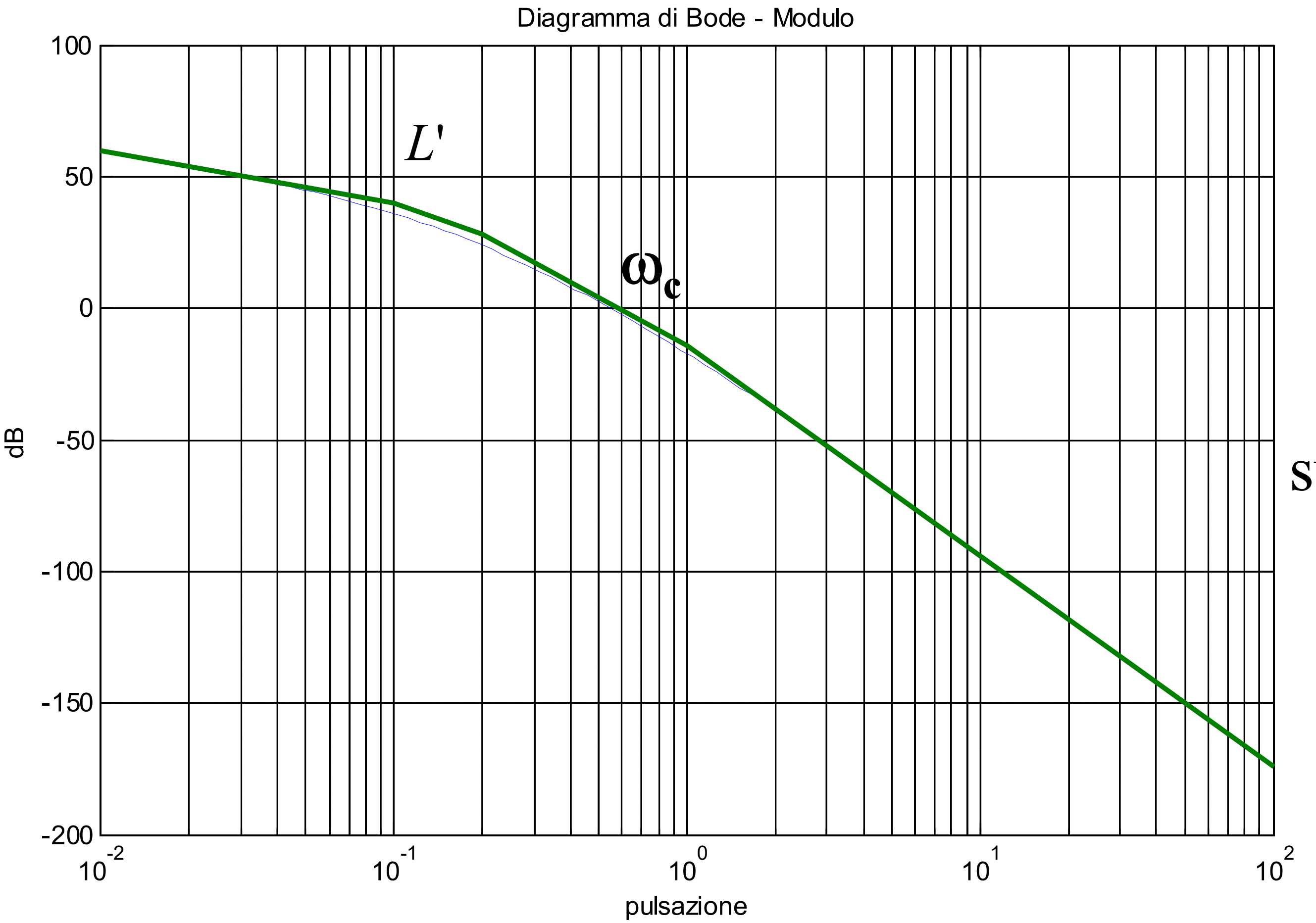
Progetto dinamico (seconda opzione)

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2\,(s)G(s) = \frac{\mu_R}{s}R_2\,(s)\frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

Primo tentativo $R_2(s) = 1$ $\mu_R = 1$

$$L'(s) = \frac{10}{s(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

Si tracci il diagramma di Bode del modulo di $L'(j\omega)$



$\omega_c \cong 0.6$ ✓

Fase critica sicuramente superiore a 120° no !

Secondo tentativo $R_2(s) = 1 + 10s$ $\mu_R = 1$

Questa scelta corrisponde ad eliminare il polo dominante.

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = \frac{1}{s}(1+10s)\frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

da cui si ottiene

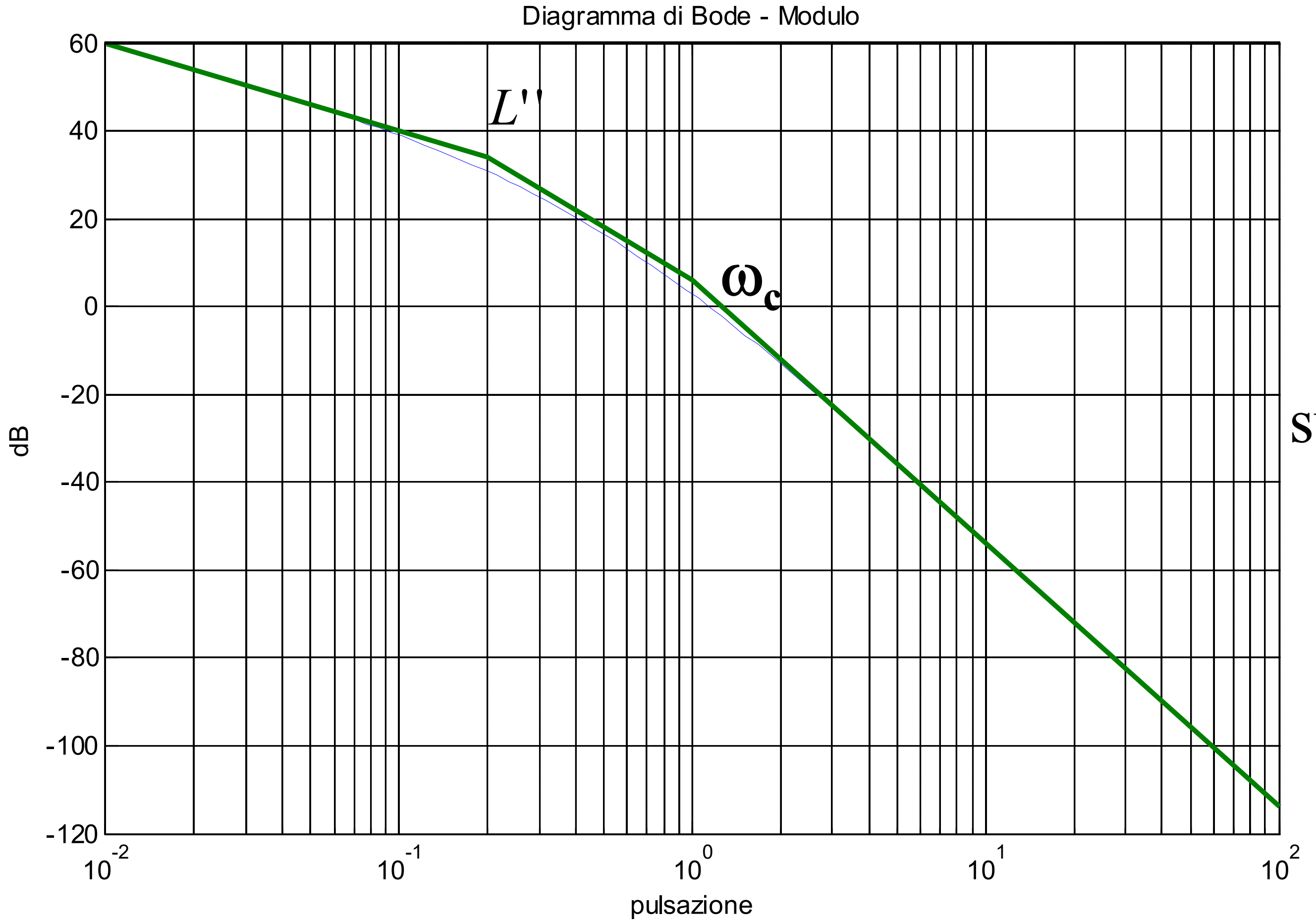
$$L''(s) = \frac{10}{s(1+5s)(1+s)}$$

Si tracci il diagramma di Bode del modulo di $L''(j\omega)$

Nota bene

E' lecito scegliere uno zero soltanto come parte dinamica del regolatore?

Sì perché c'è un polo (nell'origine) nella parte statica e quindi il regolatore sarà proprio (un polo ed uno zero).

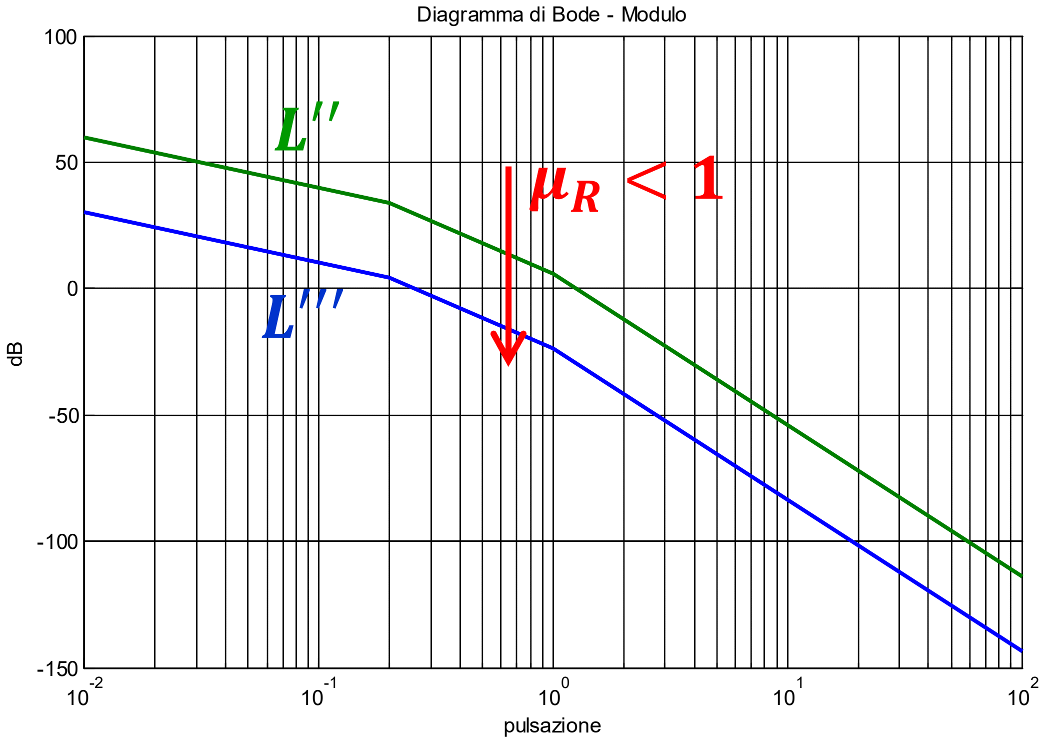


$\omega_c \cong 1.3$ ✓

Fase critica sicuramente superiore a 120° no !

$$\varphi_c = -90° - arctg(6.5) - arctg(1.3) =$$
$$= -90° - 81.2° - 52.4° = -223.6°$$ sistema instabile

Ora bisogna decidere se **cancellare un altro polo** oppure **scegliere un valore del guadagno del controllore μ_R** tale che le specifiche siano rispettate.



Supponiamo di scegliere μ_R tale che $\omega_c = 0.2\ rad/s$ che è esattamente il limite della specifica.
Quanto vale il margine di fase?

$$\varphi_c = -90° - arctg(1) - arctg(0.2) =$$
$$= -90° - 45° - 11.3° = -146.3°$$
$$\varphi_m = 33.7° < 60°$$

Non è possibile rispettare le specifiche modificando solo il guadagno.

Terzo tentativo $R_2(s) = \frac{(1+10s)(1+5s)}{1+s}$ $\mu_R = 1$

Introducendo uno zero nel controllore si cancella un secondo polo della $G(s)$. Però, perché il controllore $R(s)$ sia **proprio**, è necessario introdurre nel controllore, oltre allo zero, anche un altro polo.

Questo secondo polo, il cui scopo è solo quello di avere nel controllore lo stesso numero di poli e zeri, può essere posizionato (abbastanza) liberamente e conviene sceglierlo in alta frequenza (oltre la pulsazione critica ω_C) in modo che esso dia un contributo piccolo alla fase critica.

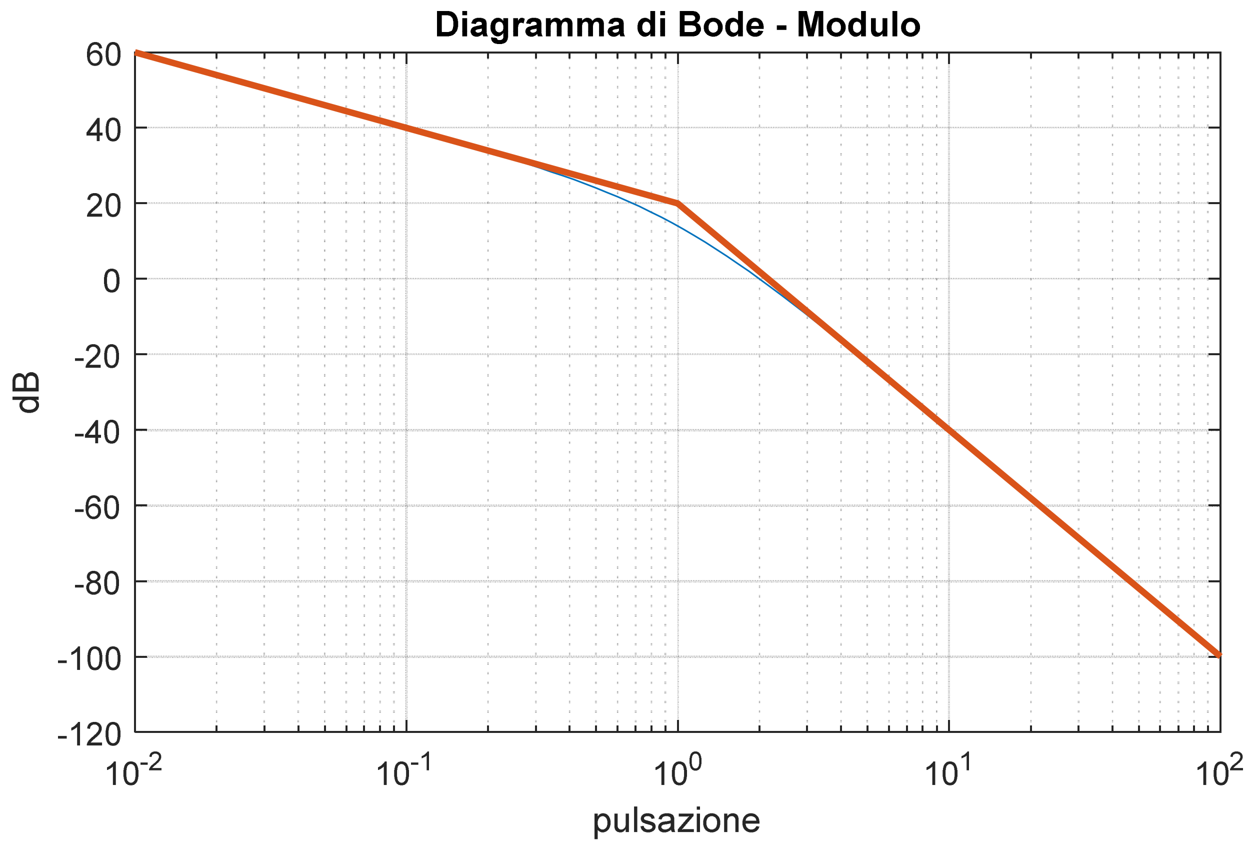
$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) =$$

$$= \frac{1}{s}\frac{(1+10s)(1+5s)}{1+s}\frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

da cui si ha

$$L'''(s) = \frac{10}{s(1+s)^2}$$

Si traccino i diagrammi di Bode di $L'''(j\omega)$



$\omega_c \cong 2$ rad/s ✓

$$\varphi_c = -90° - 2arctg(2) =$$
$$= -90° - 126.9° = -216.9°$$

sistema instabile

Quarto tentativo $R_2(s) = \frac{(1+10s)(1+5s)}{1+s}$ μ_R da scegliere

Ora possiamo scegliere un valore di μ_R (se esiste) tale da rispettare le specifiche. Quale valore scegliere?

Osserviamo che con $L'''(s) = \frac{10}{s(1+s)^2}$ per avere $\varphi_m > 60°$, cioè $\varphi_c > -120°$,

deve valere questa relazione

$$\varphi_c = argL'''(j\omega_c) = -90° - 2arctg(\omega_c) > -120°$$

da cui si ottiene

$$arctg(\omega_c) < 15°$$

cioè

$$\omega_c < 0.27 \text{ rad/s}$$

Quindi bisogna scegliere μ_R tale che la pulsazione critica sia inferiore a questo valore.

Scegliendo $\mu_R = 0.025$ si ha $\omega_c = 0.25$ rad/s.

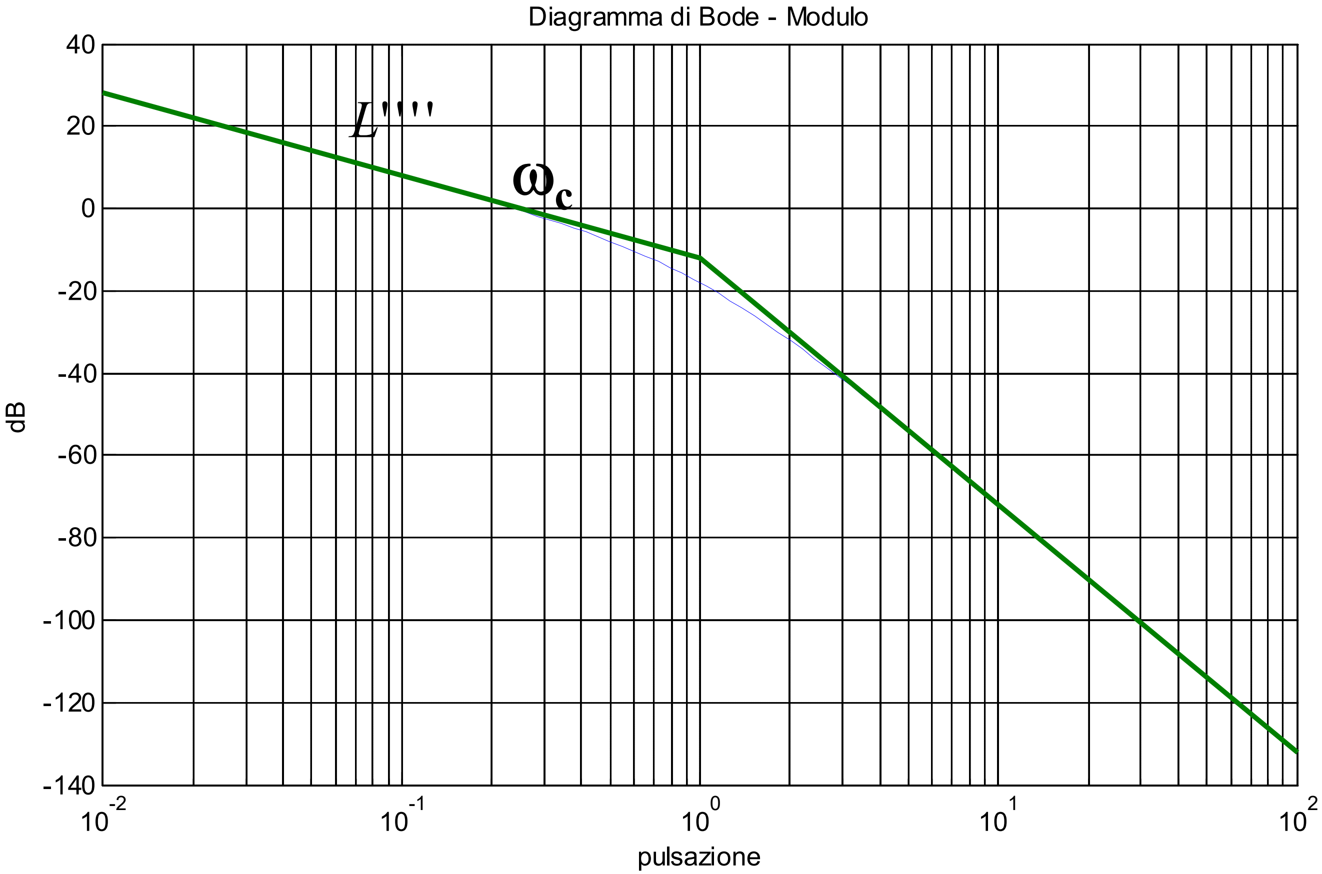
Infatti si ha che

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2\,(s)G(s)$$

$$= \frac{0.025}{s}\,\frac{(1+10s)(1+5s)}{1+s}\,\frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

da cui si ha

$$L''''(s) = \frac{0.25}{s(1+s)^2}$$



$\omega_c \cong 0.25$ ✓

$$\varphi_c = -90° - 2arctg(0.25) = \\ = -90° - 28.1° = -118.1°$$

$$R(s) = 0.025\frac{(1+10s)(1+5s)}{s(1+s)}$$

$\varphi_m = 61.9°$ ✓