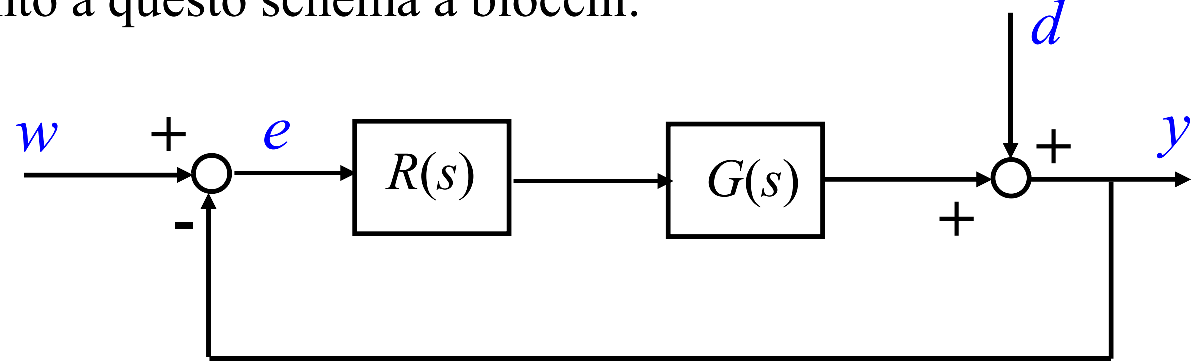
Lezione 19.
Introduzione al progetto

Schema

1. Il problema del progetto
2. Specifiche di progetto
3. Formulazione delle specifiche
4. Loop shaping
5. Progetto statico
6. Progetto dinamico

1. Il problema del progetto

Per presentare i metodi di progettazione dei sistemi di controllo, faremo riferimento a questo schema a blocchi.



$G(s)$ è la **funzione di trasferimento del sistema sotto controllo** (NOTA)
$R(s)$ è la **funzione di trasferimento del controllore** (NON NOTA).

L'obiettivo è determinare $R(s)$ in modo che il sistema retroazionato soddisfi alcune specifiche assegnate a fronte di andamenti assegnati degli ingressi.

Nel seguito si assumerà che la funzione di trasferimento d'anello

$$L(s) = R(s)G(s)$$

soddisfi le condizioni di applicabilità del criterio di Bode.

2. Specifiche di Progetto

Facendo riferimento alla funzione d'anello $L(s)$ ed in particolare:

- al suo **guadagno** $\boldsymbol{\mu}$,
- al suo **tipo** $\boldsymbol{g}$,
- alla sua **pulsazione critica** $\boldsymbol{\omega_C}$
- al **margine di fase** $\boldsymbol{\varphi_m}$ ed al **margine di guadagno** $\boldsymbol{k_m}$ **del sistema retroazionato**

✓ **As. stabilità del sistema retroazionato (in condizioni nominali)** ➡ Criterio di Bode $\mu>0°$ & $\varphi_m>0$

✓ **Stabilità robusta** ➡ φ_m e/o k_m elevati

✓ **Precisione statica** → $g>0$ e/o μ elevato

✓ **Precisione dinamica**

- velocità → ω_c elevata

- smorzamento → φ_m elevato

✓ **Attenuazione disturbi in andata** → $|L(j\omega)| >> 0$ dB per $\omega < \omega_c$ (ω_c elevata)

✓ **Realizzabilità del regolatore** → $R(s)$ almeno propria

3. Formulazione delle specifiche di progetto

Specifiche statiche

$|e(\infty)| \leq \bar{e}$ con $w(t)$ e $d(t)$ dati

$e(\infty) = 0$ (di solito scalini e/o rampe)

Specifiche dinamiche

- ✓ $\omega_{min} \leq \omega_c \leq \omega_{max}$ $\longrightarrow$ specifica di velocità
- ✓ $\varphi_m \geq \bar{\varphi}_m$
- ✓ $k_m \geq \bar{k}_m$

$\longrightarrow$ specifica di robustezza

4. Loop Shaping

1. Trasformare le specifiche di progetto in vincoli su L(s).
2. Progetto statico (rispetto delle specifiche statiche)
3. Progetto dinamico (rispetto delle specifiche dinamiche)
   a. Si procede per tentativi
   b. Al termine di ogni tentativo si verifica se il controllore scelto rispetta le specifiche dinamiche

Progetto statico e progetto dinamico

La funzione di trasferimento del controllore viene fattorizzata

$$R(s) = R_1(s)R_2\,(s)$$

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^r}$$

Parte statica

Progetto statico

(soddisfare le specifiche statiche)

$$R_2(s) = \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)}$$

Parte dinamica

(rete stabilizzatrice)

Progetto dinamico

(soddisfare le specifiche dinamiche)

5. Progetto statico

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^r}$$ Parte statica

La specifica statica viene formulata mediante valori desiderati per l'**errore a transitorio esaurito $\boldsymbol{e}(\infty)$**.

Bisogna garantire la specifica statica **a fronte di andamenti assegnati per gli ingressi** (nel nostro caso il riferimento $w(t)$ ed il disturbo sulla linea di andata $d(t)$).

L'obiettivo è **scegliere il tipo del controllore $\boldsymbol{r}$** ed eventualmente, se necessario, **calcolare il valore di $\boldsymbol{\mu_R}$** minimo per il rispetto delle specifiche (applicando il teorema del valore finale o le «tabelline» delle lezioni precedenti).

L'errore a transitorio esaurito, per il principio di sovrapposizione degli effetti, è dato dalla somma dei contributi dovuti agli ingressi (riferimento e disturbo sulla linea di andata)

$$e(\infty) = e_w(\infty) + e_d(\infty)$$

Di norma, per avere un po' di margine, ci si mette nel caso pessimo, per cui vale sempre la seguente disuguaglianza

$$|e(\infty)| = |e_w(\infty) + e_d(\infty)| \leq |e_w(\infty)| + |e_d(\infty)|$$

Ci si riconduce quindi a **calcolare i valori del modulo dell'errore a transitorio esaurito dovuti a ciascun ingresso**. Tali valori si possono leggere nelle tabelle delle lezioni precedenti oppure calcolare applicando il teorema del valore finale.

Di norma, nell'ambito dei problemi presentati in questo corso, si procede come segue.

1) Si calcola la funzione di trasferimento d'anello con $G(s)$ nota e $R(s)$ non nota

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2\,(s)G(s) = \frac{\mu_R}{s^r}\frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)}G(s) =$$

$$= \frac{\mu_R}{s^r}\frac{\mu_G}{s^m}\frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)}\frac{\prod_k(1+sT_k)}{\prod_k(1+s\tau_k)}$$

dove

$\mu = \mu_R\mu_G$ è il **guadagno d'anello** (con μ_G noto e μ_R da scegliere)

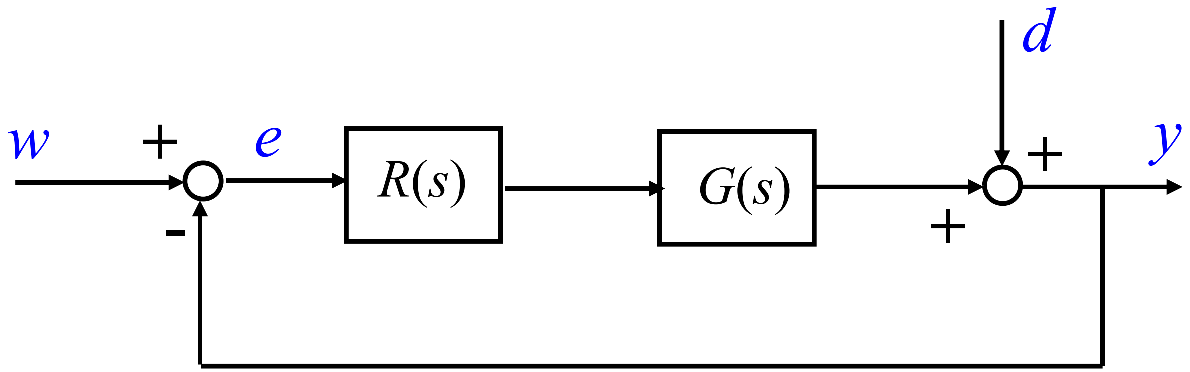
$g = r + m$ è il **tipo della funzione d'anello** (con m noto e r da scegliere)

2) Ai fini del progetto statico è utile solo la parte statica della funzione d'anello, (la parte dinamica non conta, siamo nel limite per $s \to 0$!) e quindi, sulla base delle caratteristiche degli ingressi (**riferimento** e **disturbo sulla linea di andata**), si sceglieranno i valori più opportuni per il **tipo dell'anello g** (e di conseguenza per r, dal momento che m è noto) e **per il guadagno d'anello μ** (e di conseguenza per μ_R dal momento che μ_G) utilizzando le «tabelline» o applicando il teorema del valore finale.

3) Nel caso ci fossero altri ingressi, per esempio disturbi di carico o disturbi sulla linea di retroazione, bisogna calcolare anche il loro contributo (di norma applicando il teorema del valore finale).

Alcuni esempi

Gli esempi qui presentati faranno sempre riferimento a questo schema di controllo.



Le funzioni di trasferimento sono

$$R(s) = R_1(s)R_2\,(s) = \frac{\mu_R}{s^r}\frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)}$$ **Non NOTA**

$$G(s) = \frac{\mu_G}{s^m}\frac{\prod_k(1+sT_k)}{\prod_k(1+s\tau_k)}$$ **NOTA**

Esempio 1

Sistema sotto controllo

$$G(s) = \frac{10(1 + 0.1s)}{(1 + s)^2}$$

Quindi, guadagno del sistema $\mu_G = 10$ e tipo del sistema $m = 0$.

Specifica statica:

$$|e(\infty)| \leq 0.1 \quad \text{per} \;\; w(t) = sca(t) \;\; \text{e} \;\; d(t) = -2sca(t)$$

Per prima cosa si scrive la funzione di trasferimento d'anello

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2\,(s)G(s) = \frac{\mu_R}{s^r}\frac{\prod_i(1 + sT_i)}{\prod_i(1 + s\tau_i)}\frac{10(1 + 0.1s)}{(1 + s)^2} =$$

$$= \frac{10\mu_R}{s^r}\frac{\prod_i(1 + sT_i)}{\prod_i(1 + s\tau_i)}\frac{(1 + 0.1s)}{(1 + s)^2}$$

Il **guadagno d'anello** è $\mu = 10\mu_R$.

Il **tipo dell'anello** è $g = r$.

Riprendiamo la «tabellina» che ci fornisce il valore del modulo dell'errore a regime a fronte di ingressi a scalino e rampa.

Valore di regime $|e(\infty)|$

in risposta a $w(t)$ oppure a $d(t)$

	$A\,\mathrm{sca}(t)$	$A\,\mathrm{ram}(t)$
$g=0$	$\dfrac{A}{1+\mu}$	∞
$g=1$	0	$\dfrac{A}{\mu}$
$g=2$	0	0
$g=3$	0	0

Gli ingressi sono scalini, quindi guardo la **prima colonna**.

Scegliendo $g = r = 0$ (prima riga) avrò

$$|e_w(\infty)| = \frac{1}{1 + 10\mu_R}$$

$$|e_d(\infty)| = \frac{2}{1 + 10\mu_R}$$

Per rispettare la specifica deve essere

$$|e(\infty)| \leq |e_w(\infty)| + |e_d(\infty)| \leq 0.1$$

cioè

$$\frac{3}{1 + 10\mu_R} \leq 0.1$$

da cui

$$\mu_R \geq 2.9$$

Quindi il progetto statico si conclude con le scelte di $r = 0$ e di un valore di μ_R che rispetti il vincolo $\mu_R \geq 2.9$ (per esempio $\mu_R = 4$).

Scegliendo $g = r = 1$ (seconda riga) avrò

$$e_w(\infty) = 0$$

$$e_d(\infty) = 0$$

per qualsiasi valore del guadagno d'anello $\mu = 10\mu_R$.

La presenza di un integratore nell'anello mi garantisce errore nullo a transitorio esaurito a fronte di andamento a scalino (di qualunque ampiezza) degli ingressi (riferimento e disturbo sulla linea di andata).

La specifica

$$|e(\infty)| \leq |e_w(\infty)| + |e_d(\infty)| \leq 0.1$$

è quindi sempre rispettata per qualunque valore di μ_R si voglia scegliere.

Quindi il progetto statico si conclude con la scelta di $r = 1$.

Il guadagno del controllore μ_R verrà scelto durante il progetto dinamico (è una «carta in più da giocare» dopo).

Quindi, concludendo, ci sono due possibili scelte per il progettista.

Progetto statico A

$$r = 0 \quad \& \quad \mu_R = 4$$

$$R_1(s) = 4$$

Progetto statico B

$$r = 1$$

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s}$$

Esempio 2

Sistema sotto controllo

$$G(s) = \frac{8(1+0.5s)}{s(1+2s)(1+0.1s)}$$

Quindi, guadagno del sistema $\mu_G = 8$ e tipo del sistema $m = 1$.

Specifica statica:

$$|e(\infty)| < 0.05 \quad \text{per} \;\; w(t) = 4sca(t) \;\; \text{e} \;\; d(t) = sca(t)$$

Per prima cosa si scrive la funzione di trasferimento d'anello

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2\,(s)G(s) = \frac{\mu_R}{s^r}\frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)}\frac{8(1+0.5s)}{s(1+2s)(1+0.1s)} =$$

$$= \frac{8\mu_R}{s^{r+1}}\frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)}\frac{(1+0.5s)}{(1+2s)(1+0.1s)}$$

Il **guadagno d'anello** è $\mu = 8\mu_R$.

Il **tipo dell'anello** è $g = r + 1$.

Riprendiamo la «tabellina» che ci fornisce il valore del modulo dell'errore a regime a fronte di ingressi a scalino e rampa.

Valore di regime $|e(\infty)|$

in risposta a $w(t)$ oppure a $d(t)$

	$A\,\mathrm{sca}(t)$	$A\,\mathrm{ram}(t)$
$g=0$	$\frac{A}{1+\mu}$	∞
$g=1$	0	$\frac{A}{\mu}$
$g=2$	0	0
$g=3$	0	0

Gli ingressi sono scalini, quindi guardo la **prima colonna**.

Però so che $g = r + 1$ e quindi **è sufficiente scegliere $r = 0$ per essere sulla seconda riga** ed avere quindi valori nulli per i contributi all'errore a regime.

Quindi il progetto statico si conclude con la scelta di $r = 0$, mentre il guadagno del controllore μ_R verrà scelto durante il progetto dinamico.

Esempio 3

Sistema sotto controllo

$$G(s) = \frac{22}{(1+5s)(1+0.1s)^2}$$

Quindi, guadagno del sistema $\mu_G = 22$ e tipo del sistema $m = 0$.

Specifica statica:

$$e(\infty) = 0 \quad \text{per} \;\; w(t) = 3sca(t) \;\; \text{e} \;\; d(t) = \pm sca(t)$$

Per prima cosa si scrive la funzione di trasferimento d'anello

$$L(s) = R(s)G(s) = R_1(s)R_2\,(s)G(s) = \frac{\mu_R}{s^r}\frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)}\frac{22}{(1+5s)(1+0.1s)^2} =$$

$$= \frac{22\mu_R}{s^r}\frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)}\frac{1}{(1+5s)(1+0.1s)^2}$$

Il **guadagno d'anello** è$\mu = 22\mu_R$.

Il **tipo dell'anello** è $g = r$.

Riprendiamo la «tabellina» che ci fornisce il valore del modulo dell'errore a regime a fronte di ingressi a scalino e rampa.

Valore di regime $|e(\infty)|$

in risposta a $w(t)$ oppure a $d(t)$

	$A\,\mathrm{sca}(t)$	$A\,\mathrm{ram}(t)$
$g=0$	$\frac{A}{1+\mu}$	∞
$g=1$	0	$\frac{A}{\mu}$
$g=2$	0	0
$g=3$	0	0

Gli ingressi sono scalini, quindi guardo la **prima colonna**.

La specifica statica mi impone $e(\infty) = 0$ e quindi **sono obbligato ad andare sulla seconda riga**, sono obbligato a scegliere $g = r = 1$ se voglio contributi nulli all'errore a regime.

Quindi il progetto statico si conclude con la scelta di $r = 1$, mentre il guadagno del controllore μ_R verrà scelto durante il progetto dinamico.

6. Progetto dinamico

$$R_2(s) = \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)}$$ Parte dinamica

La scelta della parte dinamica avviene per tentativi e di norma il primo tentativo è

$$R_2(s) = 1$$

cioè non si inserisce una parte dinamica.

Si verifica quindi se le specifiche dinamiche sono rispettate e, in caso negativo, si procede ad inserire poli e zeri cercando di ottenere una funzione d'anello che rispetti le specifiche date, avendo cura di rispettare sempre le seguenti condizioni:

1) **Non modificare la parte statica del controllore**

   (cioè il guadagno μ_R, se scelto precedentemente, ed il tipo r).

1) **Il controllore $R(s)$ ottenuto deve essere almeno proprio**

   (non può avere più zeri che poli)

Dal momento che, di solito, **le specifiche dinamiche riguardano la pulsazione critica $\boldsymbol{\omega_C}$ ed il margine di fase $\boldsymbol{\varphi_m}$**, per verificare se esse sono rispettate:

1) si traccia il **diagramma di Bode del modulo** della risposta in frequenza della funzione d'anello $L(s)$ e, dopo aver individuato sul grafico la **pulsazione critica $\boldsymbol{\omega_C}$**,
2) **si calcola la fase critica $\boldsymbol{\varphi_C}$ ed infine il margine di fase $\boldsymbol{\varphi_m}$**.