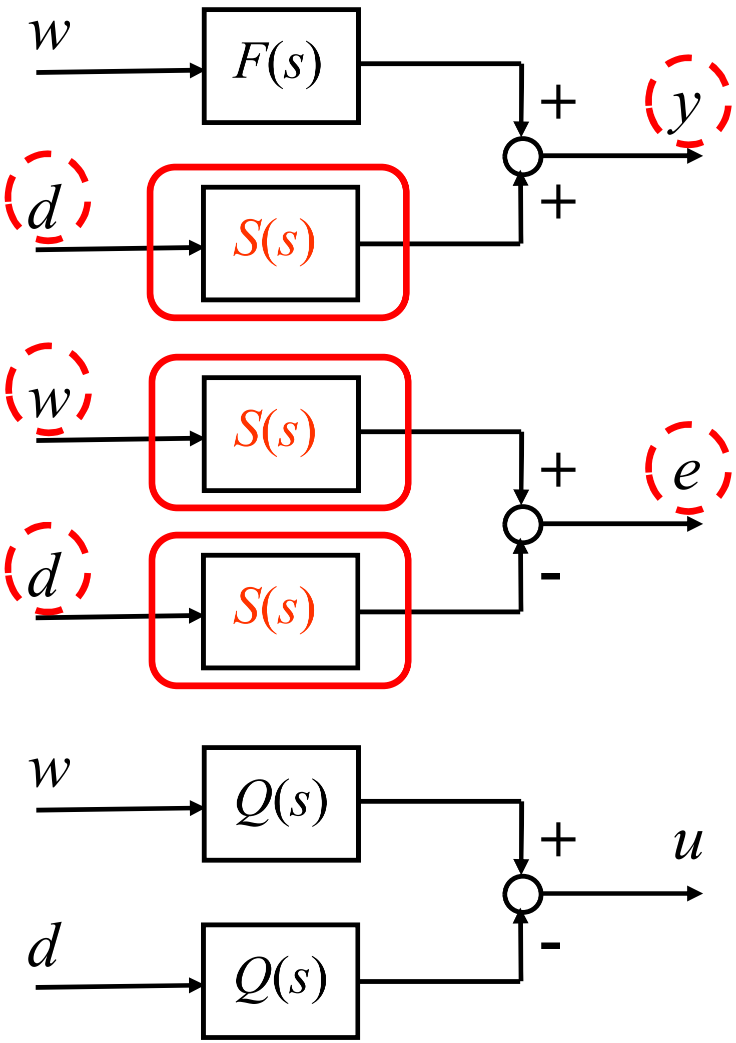
Lezione 18. Analisi delle prestazioni di sistemi retroazionati (c)

Sensitività

Schema

1. Analisi statica di S(s) (risposta allo scalino)
2. Analisi statica di S(s) (risposta alla rampa)
3. Tabelle valori di regime di uscita ed errore
4. Poli e zeri di S(s)
5. Risposta in frequenza di S(s)
6. Effetto di un ritardo nell’anello

Funzione di sensitività



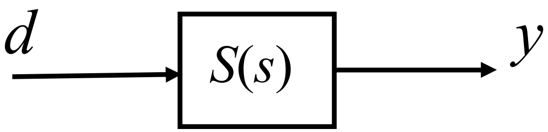
prestazioni ideali

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} \qquad \sim 1$$

$$\boxed{S(s) = \frac{1}{1+L(s)}} \qquad \sim 0$$

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1+L(s)} \qquad \sim 0$$

1. Analisi statica di *S*(*s*) – risposta allo scalino



$$L(s)=\frac{\mu}{s^g}\frac{\prod_i(1+s\tau_i)}{\prod_i(1+sT_i)}$$

$$S(s)=\frac{1}{1+L(s)} \qquad d(t)=A\mathrm{sca}(t)$$

Valore di regime della risposta allo scalino

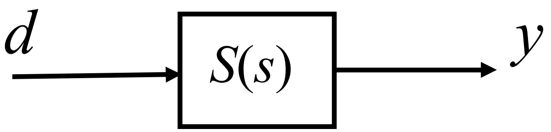
$$y(\infty)=\lim_{s\to 0} sS(s)\frac{A}{s}=A\lim_{s\to 0} S(s)=A\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+L(s)}=$$

$$=A\lim_{s\to 0}\frac{s^g}{s^g+\mu}=\begin{cases} 0 & g>0 \\ A\dfrac{1}{1+\mu} & g=0 \\ A & g<0 \end{cases}$$

$g=0 \Rightarrow \mu_S \cong 0$ se $\mu >> 1$

$g<0 \Rightarrow \mu_S = 1$

2. Analisi statica di $S(s)$ – risposta alla rampa



$$L(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1 + s\tau_i)}{\prod_i (1 + sT_i)}$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \qquad d(t) = A\,\mathrm{ram}(t)$$

Valore di regime della risposta alla rampa

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} sS(s)\frac{A}{s^2} = A\lim_{s \to 0} \frac{S(s)}{s} = A\lim_{s \to 0} \frac{1}{s\left(1 + L(s)\right)} =$$

$$= A\lim_{s \to 0} \frac{s^{g-1}}{s^g + \mu} = \begin{cases} 0 & g > 1 \\ \dfrac{A}{\mu} & g = 1 \\ \infty & g < 1 \end{cases}$$

3. Tabella riassuntiva

Valore di regime $y(\infty)$ in risposta a $d(t)$

Valore di regime $|e(\infty)|$ in risposta a $w(t)$ oppure a $d(t)$

	$A\,\mathrm{sca}(t)$	$A\,\mathrm{ram}(t)$	$A\,\mathrm{par}(t)$
$g=0$	$\dfrac{A}{1+\mu}$	∞	∞
$g=1$	0	$\dfrac{A}{\mu}$	∞
$g=2$	0	0	$\dfrac{A}{\mu}$
$g=3$	0	0	0

4. Poli e zeri di *S*(*s*)

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \qquad L(s) = \frac{N_L(s)}{D_L(s)}$$

$$S(s) = \frac{D_L(s)}{D_L(s) + N_L(s)}$$

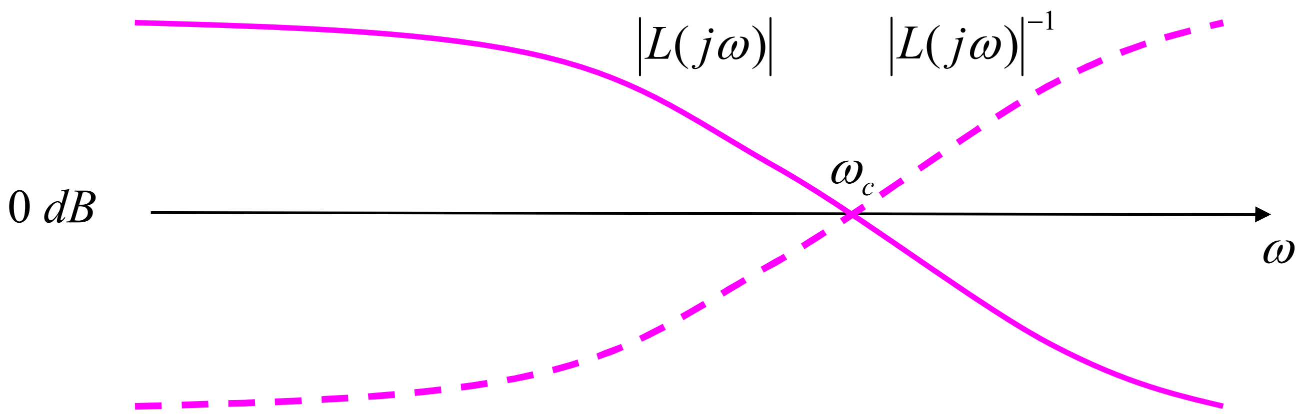
$$\Downarrow$$

- gli zeri di $S(s)$ sono i poli di $L(s)$
- i poli di $S(s)$ sono le $\underbrace{\text{radici di } D_L(s) + N_L(s)}_{\text{già studiate}}$

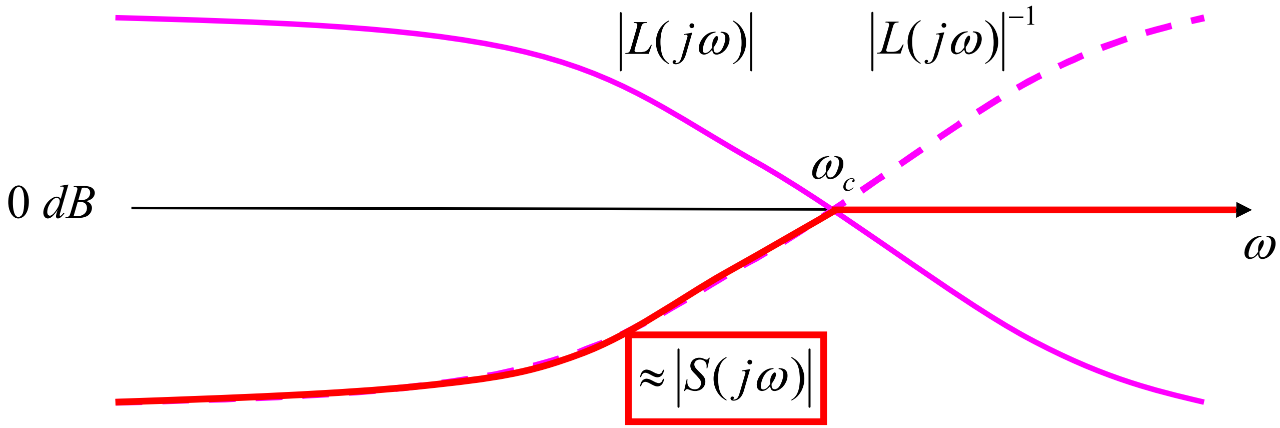
5. Risposta in frequenza di *S*(*s*)

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$$

$$\left|S(j\omega)\right| = \frac{1}{\left|1+L(j\omega)\right|} \cong \begin{cases} \dfrac{1}{\left|L(j\omega)\right|} = -\left|L(j\omega)\right|_{dB} & \left|L(j\omega)\right| >> 1 \\[2ex] 1 & \left|L(j\omega)\right| << 1 \end{cases}$$

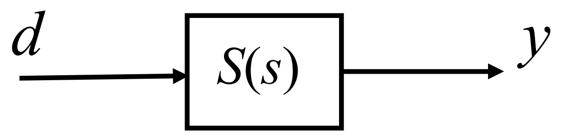


$$
|S(j\omega)| = \frac{1}{|1+L(j\omega)|} \cong \begin{cases} \dfrac{1}{|L(j\omega)|} = -|L(j\omega)|_{dB} & \overbrace{|L(j\omega)| >> 1}^{\omega < \omega_c} \\[2ex] 1 = 0\ dB & \underbrace{|L(j\omega)| << 1}_{\omega > \omega_c} \end{cases}
$$



Conclusioni

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

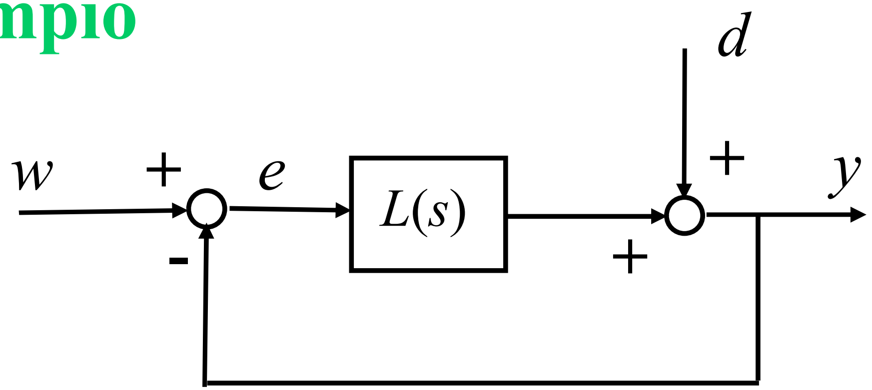


- ✓ $S(s)$ è un **filtro passa-alto**
- ✓ la banda passante di $S(s)$ è $B_S \cong [\omega_c, \infty]$

$$\Downarrow$$

- ✓ il disturbo d viene attenuato solo in $[0, \omega_c]$
- ✓ l'attenuazione in questa banda è circa uguale a $\dfrac{1}{|L(j\omega)|}$

Esempio



$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)}$$

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)} = \frac{1}{1+\frac{10}{s(s+2)}} = \frac{s^2+2s}{s^2+2s+10} = \frac{0.2s(1+0.5s)}{1+0.2s+0.1s^2}$$

Analisi statica

Risposta allo scalino $d(t) = A\text{sca}(t)$

$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)} \qquad g = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} y(\infty) &= 0 \\ e(\infty) &= 0 \end{aligned}$$

Infatti $\mu_S = S(0) = 0$

Risposta alla rampa $d(t) = A\text{ram}(t)$

$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)} \qquad g = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} y(\infty) &= \frac{A}{\mu} = \frac{A}{5} \\ |e(\infty)| &= \frac{A}{\mu} = \frac{A}{5} \end{aligned}$$

Risposta allo scalino $w(t) = A\text{sca}(t)$

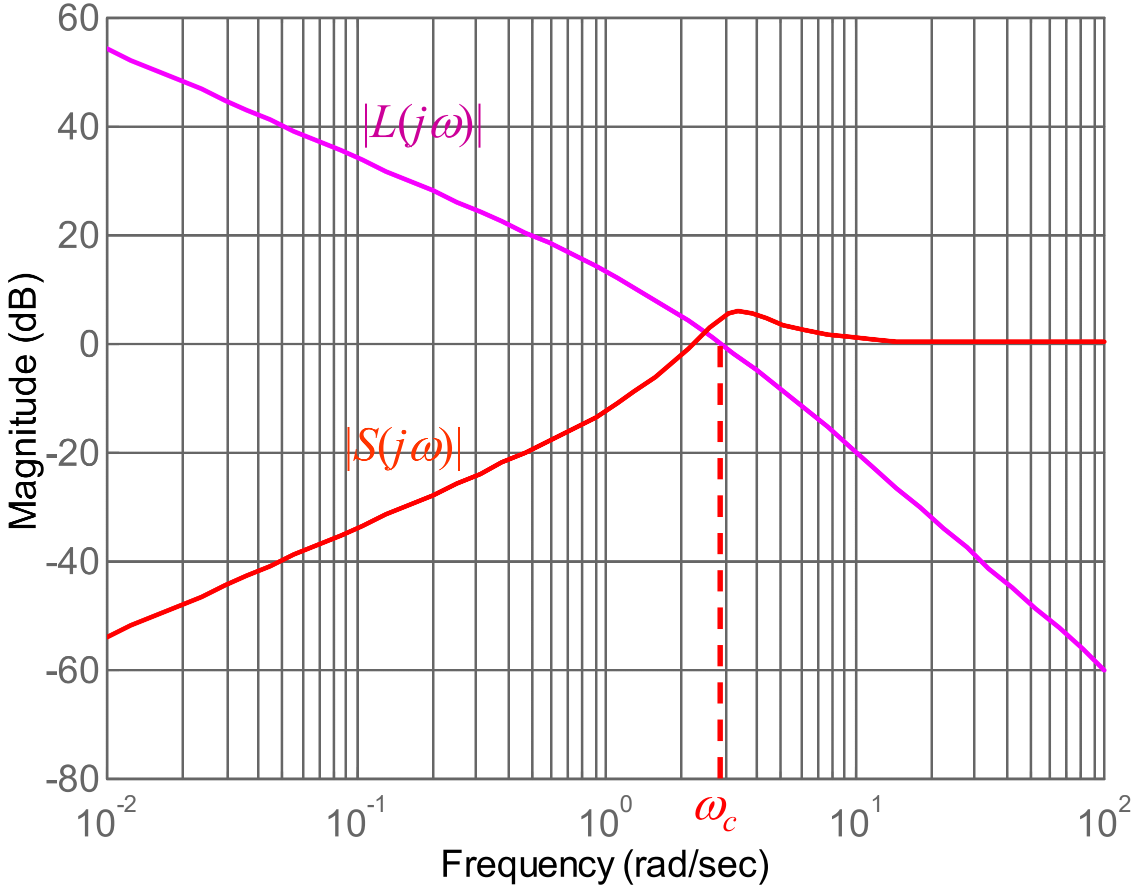
$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)} \quad g = 1 \quad \Rightarrow \quad e(\infty) = 0$$

Infatti $\mu_S = S(0) = 0$

Risposta alla rampa $w(t) = A\text{ram}(t)$

$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)} \quad g = 1 \quad \Rightarrow \quad |e(\infty)| = \frac{A}{\mu} = \frac{A}{5}$$

Risposta in frequenza



$$d(t) = \sin(\omega t)$$

$$\Downarrow$$

$$|S(j\omega)|$$

ampiezza a regime di $y(t)$ e di $e(t)$

$$w(t) = \sin(\omega t)$$

$$\Downarrow$$

$$|S(j\omega)|$$

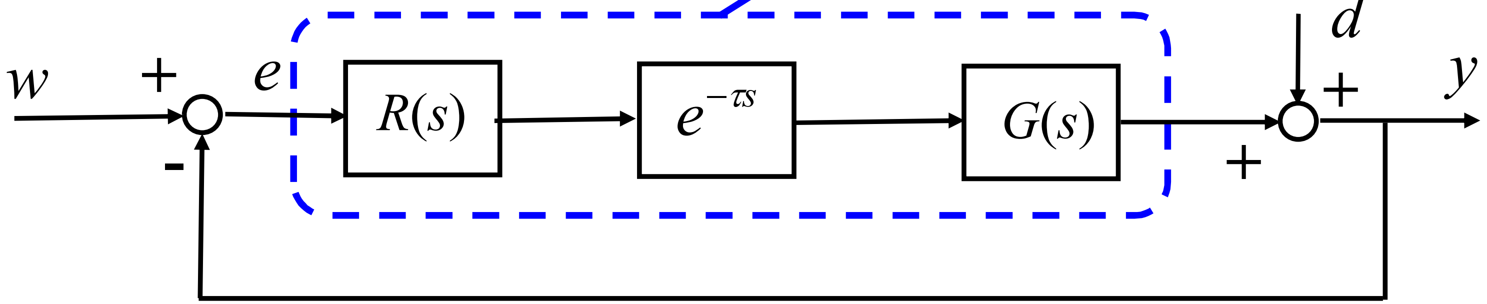
ampiezza a regime di $e(t)$

Per $\omega \leq 0.4$ $\Rightarrow$ attenuazione di almeno 20 dB

6. Effetto di un ritardo

$$L^*(s)$$

$$L(s) = e^{-\tau s} R(s)G(s)$$



- può influenzare la stabilità — vedi Bode
- non modifica le prestazioni statiche $\lim_{s\to 0} L(s) = \lim_{s\to 0} L^*(s)$
- non modifica ω_c — $|L(j\omega)| = |L^*(j\omega)|$
- fa diminuire φ_m

$$\varphi_c = \arg L(j\omega_c) = \arg L^*(j\omega_c) - \omega_c \tau \frac{180°}{\pi}$$

$$\varphi_m = \varphi_m^* - \omega_c \tau \frac{180°}{\pi}$$

$\Downarrow$

diminuisce lo smorzamento dei poli in anello chiuso

Esempio

$$L^*(s) = \frac{0.1}{s(s^2+s+1)}$$

$$\omega_c = 0.101 \text{ rad/s}$$

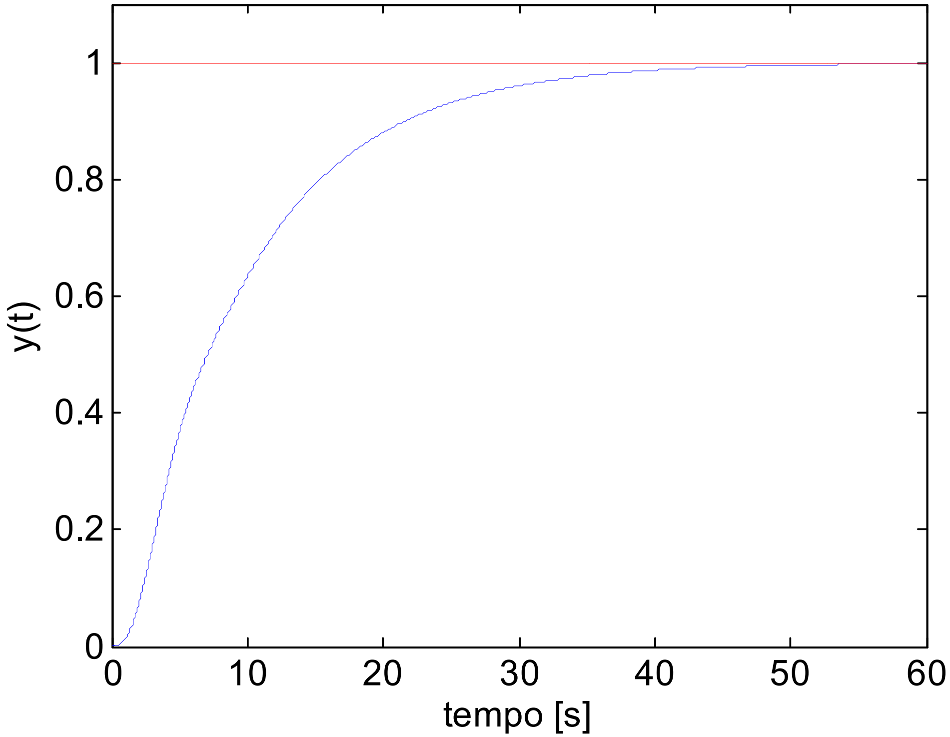
$$\varphi_m^* = 84.2°$$

Tempo di assestamento della risposta allo scalino in anello chiuso

$$t_a \cong \frac{5}{\omega_c} \cong \frac{5}{0.101} \cong 50 \text{ s}$$

(polo dominante reale)

$w(t) = \mathrm{sca}(t)$



Introducendo un ritardo di 8 s $L(s)=\frac{0.1}{s(s^2+s+1)}e^{-8s}$

$$\omega_c = 0.101\,\text{rad/s}$$

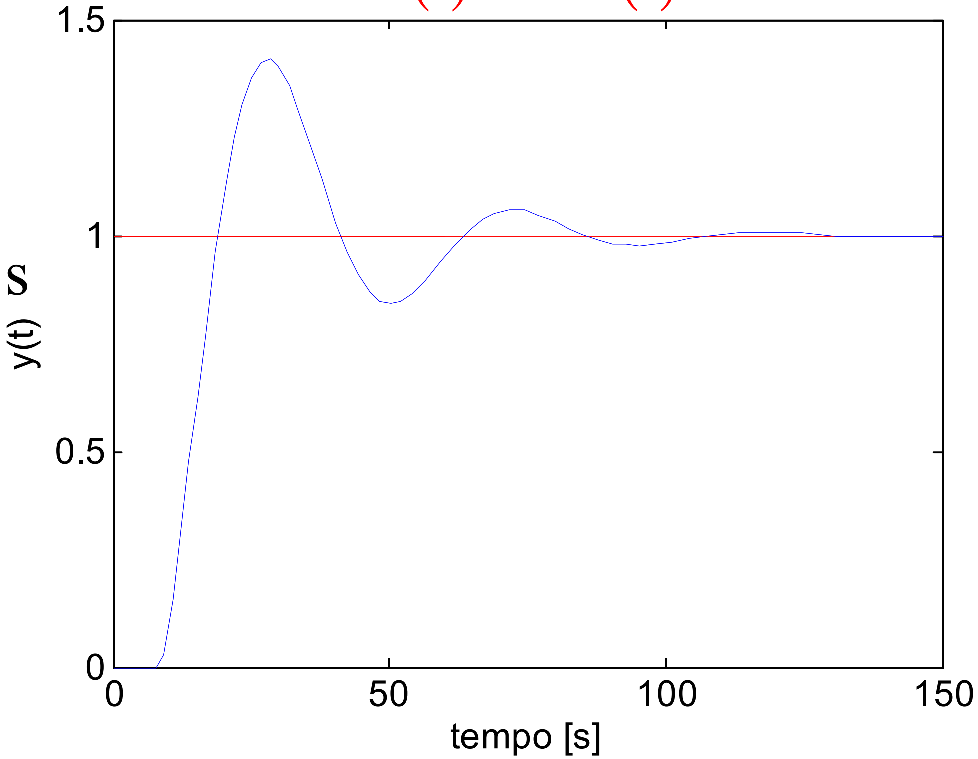
$$\varphi_m = 84.2° - \omega_c\tau\frac{180°}{\pi} = 84.2° - 0.101\cdot 8\cdot\frac{180°}{\pi} = 84.2° - 46.3° = 37.9°$$

Tempo di assestamento della risposta allo scalino in anello chiuso

$$t_a \cong \frac{5}{\xi\omega_n} \cong \frac{5}{\frac{\varphi_m}{100}\omega_c} \cong \frac{500}{\varphi_m\omega_c} = 130\,\text{s}$$

(poli dominanti complessi)

$w(t)=\text{sca}(t)$



Introducendo un ritardo di 20 s $L(s)=\dfrac{0.1}{s\left(s^2+s+1\right)}e^{-20s}$

$$\omega_c = 0.101\,\text{rad/s}$$

$$\varphi_m = 84.2° - \omega_c \tau \frac{180°}{\pi} = 84.2° - 0.101 \cdot 20 \cdot \frac{180°}{\pi} = 84.2° - 115.7° = -31.5°$$

Instabile!

Infatti, calcolando il massimo ritardo d'anello ammissibile $\tau_{\max}$ si ha:

$$\omega_c \tau_{\max} \frac{180°}{\pi} = 84.2° \quad \Rightarrow \quad \tau_{\max} = 84.2° \cdot \frac{\pi}{180°} \cdot \frac{1}{0.101} = 14.55\,\text{s}$$