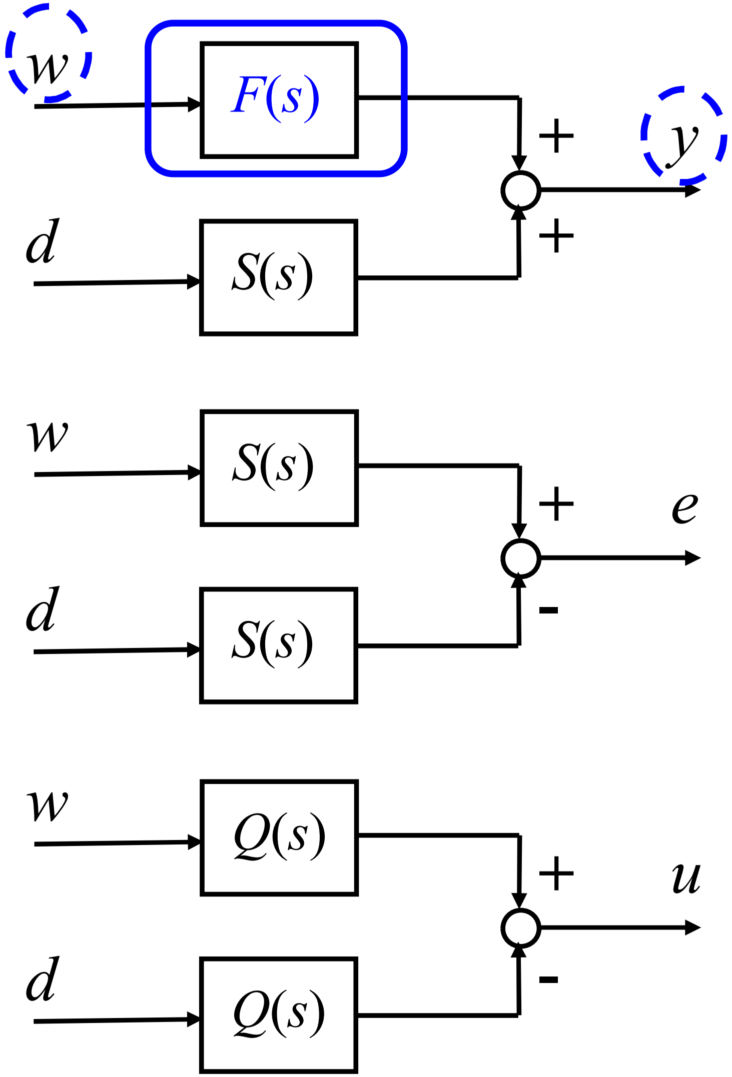
Lezione 17. Analisi delle prestazioni di sistemi retroazionati (b)

Sensitività complementare

Schema

1. Analisi statica di F(s)
2. Poli e zeri di F(s)
3. Risposta in frequenza di F(s)
4. Poli dominanti di F(s)
   (valutazione approssimata dello smorzamento dei poli dominanti)
5. Esempi

Funzione di sensitività complementare



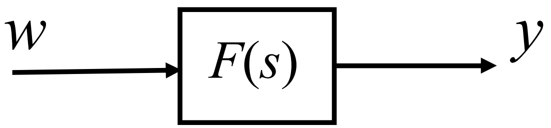
prestazioni ideali

$$\boxed{F(s)=\frac{L(s)}{1+L(s)}} \qquad \sim 1$$

$$S(s)=\frac{1}{1+L(s)} \qquad \sim 0$$

$$Q(s)=\frac{R(s)}{1+L(s)} \qquad \sim 0$$

1. Analisi statica di *F*(*s*)



$$L(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1 + s\tau_i)}{\prod_i (1 + sT_i)}$$

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \qquad w(t) = A\mathrm{sca}(t)$$

Valore di regime della risposta allo scalino

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} sF(s)\frac{A}{s} = A \lim_{s \to 0} F(s) = A \lim_{s \to 0} \frac{L(s)}{1 + L(s)} =$$

$$= A \lim_{s \to 0} \frac{\mu}{s^g + \mu} = \begin{cases} A & g > 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_F = 1 \\ A\dfrac{\mu}{1+\mu} & g = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_F \cong 1 \text{ se } \mu >> 1 \\ 0 & g < 0 \end{cases}$$

2. Poli e zeri di *F*(*s*)

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

$$L(s) = \frac{N_L(s)}{D_L(s)}$$

$$F(s) = \frac{N_L(s)}{D_L(s) + N_L(s)}$$

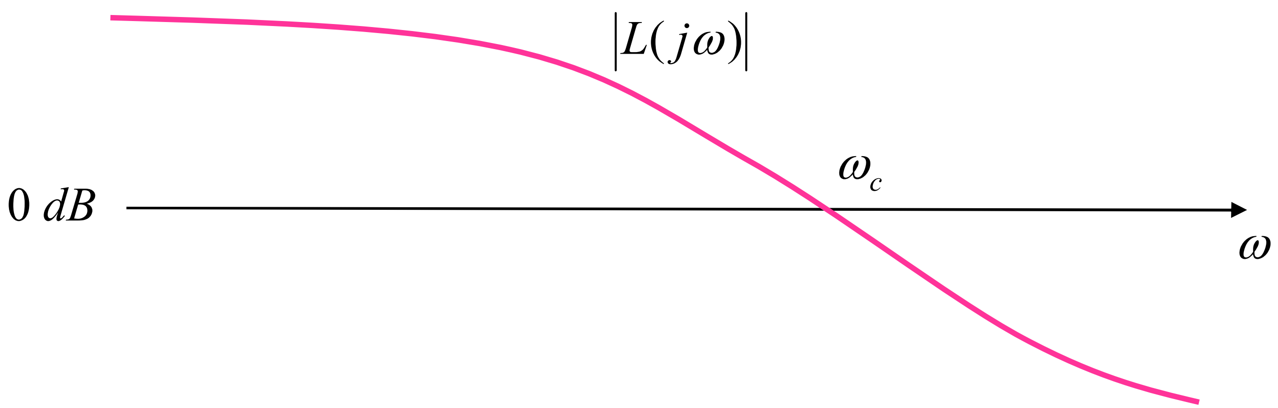
$$\Downarrow$$

- gli zeri di $F(s)$ sono gli zeri di $L(s)$
- i poli di $F(s)$ sono le radici di $D_L(s) + N_L(s)$

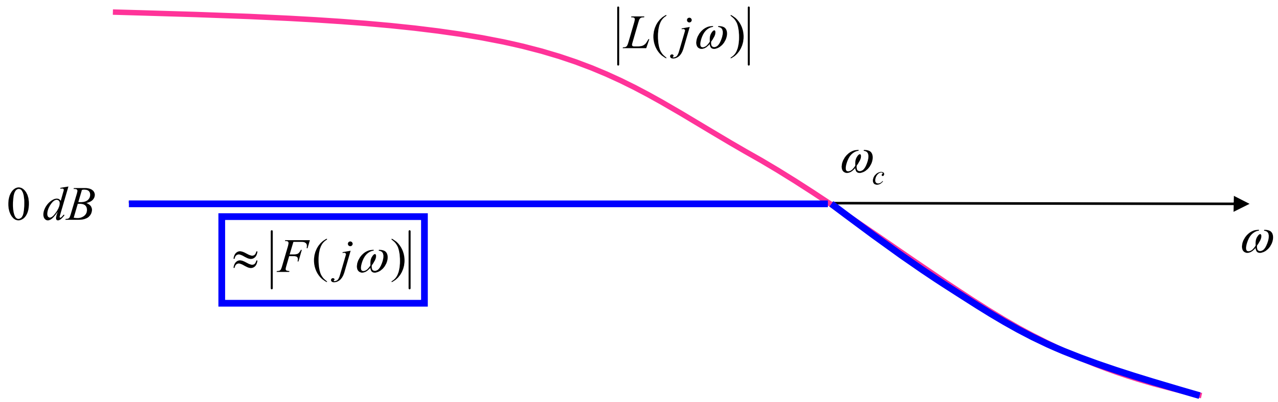
3. Risposta in frequenza di *F*(*s*)

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1+L(j\omega)|} \cong \begin{cases} 1 & |L(j\omega)| >> 1 \\ |L(j\omega)| & |L(j\omega)| << 1 \end{cases}$$



$$|F(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1+L(j\omega)|} \cong \begin{cases} 1 & \overbrace{|L(j\omega)| >> 1}^{\omega < \omega_c} \\ |L(j\omega)| & \underbrace{|L(j\omega)| << 1}_{\omega > \omega_c} \end{cases}$$



Conclusioni (dei punti 1,2,3)

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

- ✓ $F(s)$ è un **filtro passa-basso**
- ✓ la banda passante di $F(s)$ è $B_F \cong [0, \omega_c]$
- ✓ il guadagno di $F(s)$ è $\mu_F \cong 1$ in realtà $\begin{cases} \mu_F = 1 & \text{se} \quad g > 0 \\ \mu_F = \dfrac{\mu}{1+\mu} & \text{se} \quad g = 0 \end{cases}$
- ✓ i poli dominanti di $F(s)$ cadono in corrispondenza di ω_c

? **poli dominanti reali o complessi?**

se complessi, qual è il loro smorzamento?

4. Poli dominanti di $F(s)$

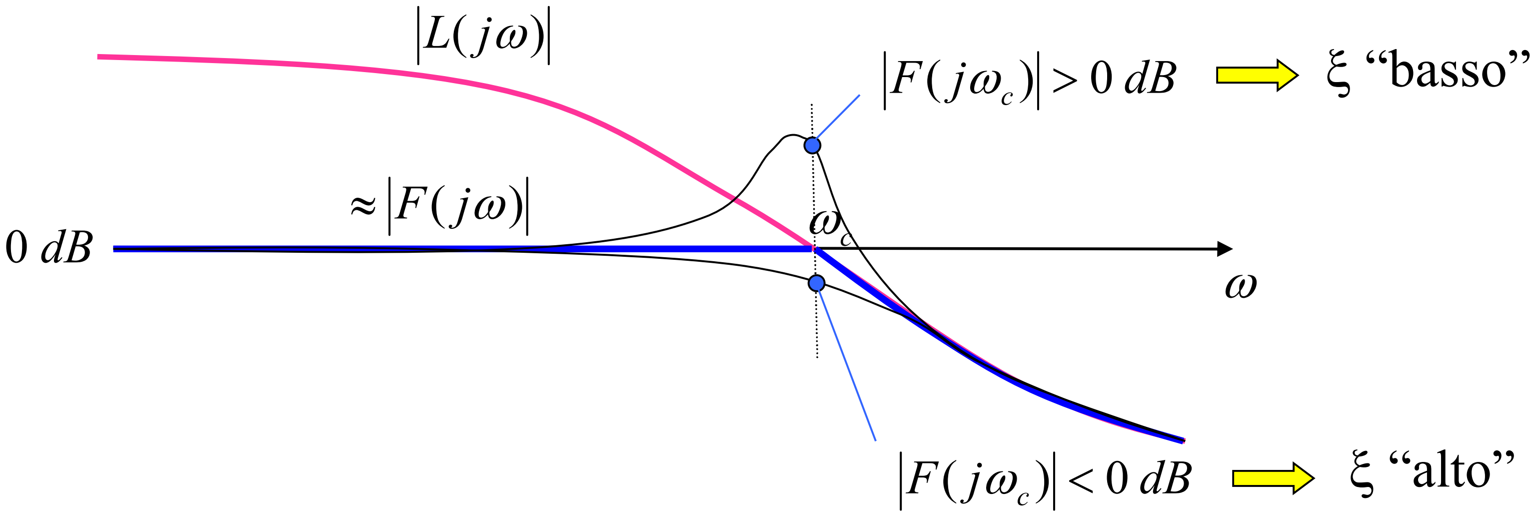
$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

i poli dominanti di $F(s)$
cadono in corrispondenza di ω_c

?

reali o complessi?

se complessi, smorzamento?



Valutazione approssimata dello smorzamento dei poli dominanti di *F*(*s*)

Si può dimostrare che lo smorzamento dei poli dominanti di $F(s)$ vale

$$\boxed{\xi \cong \mathrm{sen}\left(\frac{\varphi_m}{2}\right)}$$

o anche, con ulteriori approssimazioni,

$$\xi \cong \mathrm{sen}\left(\frac{\varphi_m}{2}\right) \cong \frac{\varphi_m}{2}\frac{\pi}{180°} \cong \frac{\varphi_m}{100}$$

$$\boxed{\xi \cong \frac{\varphi_m}{100}}$$

E se non fossero complessi coniugati?

Regola empirica

$\varphi_m < 75°$ $\Rightarrow$ poli dominanti complessi con

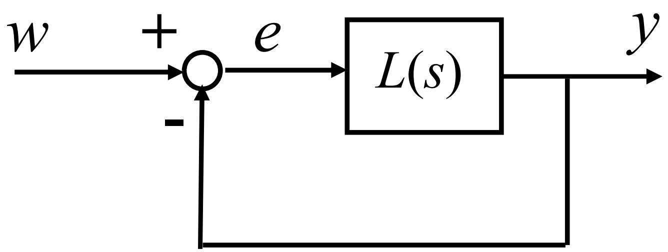
$$\omega_n \cong \omega_c$$

$$\xi \cong \text{sen}\left(\frac{\varphi_m}{2}\right)$$

$\varphi_m > 75°$ $\Rightarrow$ polo dominante reale con

$$\tau \cong \frac{1}{\omega_c}$$

Esempio 1



$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)}$$

Per verificare i risultati, si calcoli la F

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{\frac{10}{s(s+2)}}{1+\frac{10}{s(s+2)}} = \frac{10}{s^2+2s+10} = \frac{1}{1+0.2s+0.1s^2}$$

Analisi statica

Risposta allo scalino $w(t) = A\text{sca}(t)$

$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)} \quad g = 1 \quad \Rightarrow \quad y(\infty) = A \quad (\text{cioè } \mu_F = 1)$$

Poli & zeri

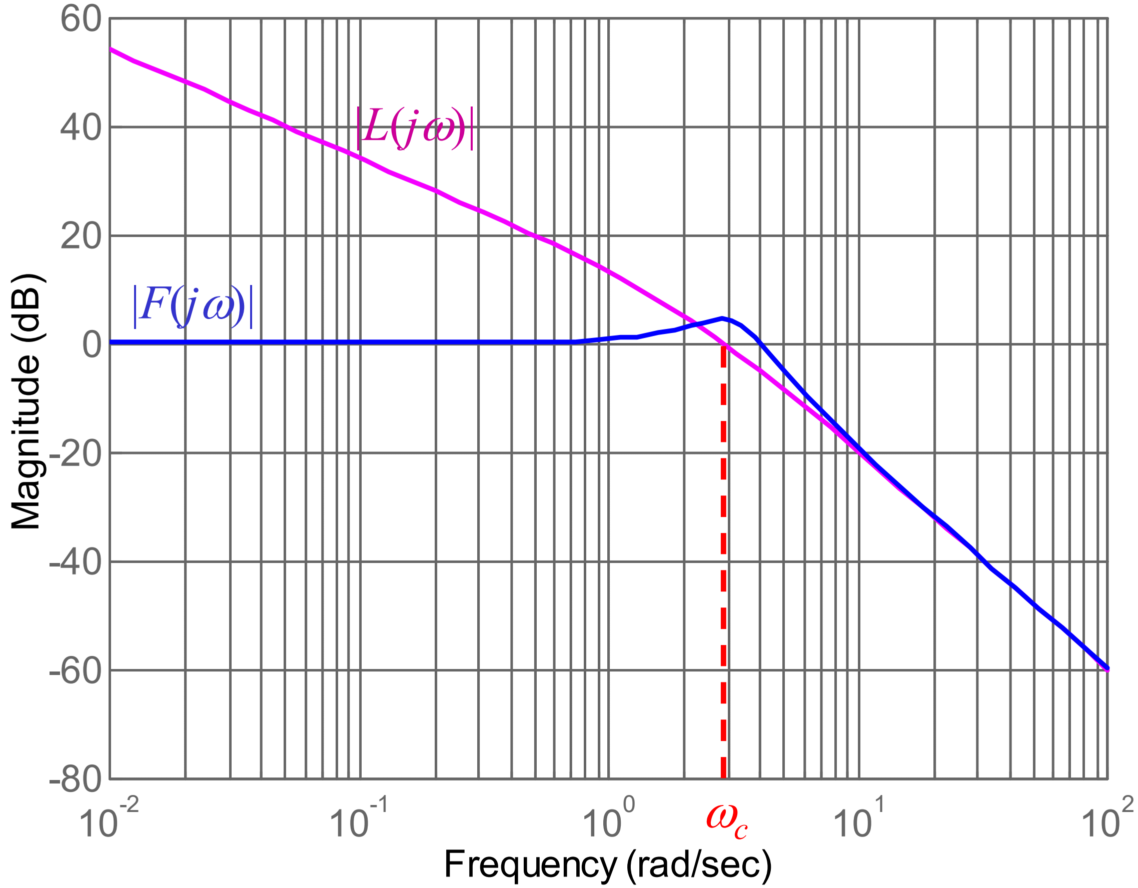
$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)}$$

$$N_L(s) = 10$$

$$D_L(s) = s(s+2)$$

$$N_L(s) + D_L(s) = s(s+2) + 10 = s^2 + 2s + 10$$

Risposta in frequenza



Valori esatti

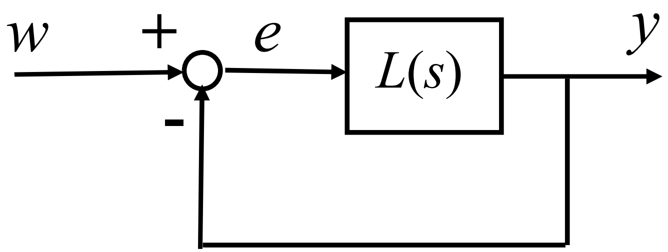
$$\xi = 0.32$$
$$\omega_n = 3.16 \text{ rad/s}$$

$$\omega_c = 2.86 \text{ rad/s}$$
$$\varphi_m = 34.9°$$

Valori approssimati

$$\omega_n \cong \omega_c = 2.86 \text{ rad/s}$$
$$\xi \cong \sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right) \cong 0.30$$
$$\xi \cong \frac{\varphi_m}{100} \cong 0.35$$

Esempio 2



$$L(s)=\frac{10}{(1+s)(1+0.01s)}$$

Per verificare i risultati, si calcoli la *F*

$$F(s)=\frac{L(s)}{1+L(s)}=\frac{\dfrac{10}{(1+s)(1+0.01s)}}{1+\dfrac{10}{(1+s)(1+0.01s)}}=$$

$$=\frac{10}{11+1.01s+0.01s^2}=\frac{1000}{s^2+101s+1100}$$

Analisi statica

Risposta allo scalino $w(t) = A\mathrm{sca}(t)$

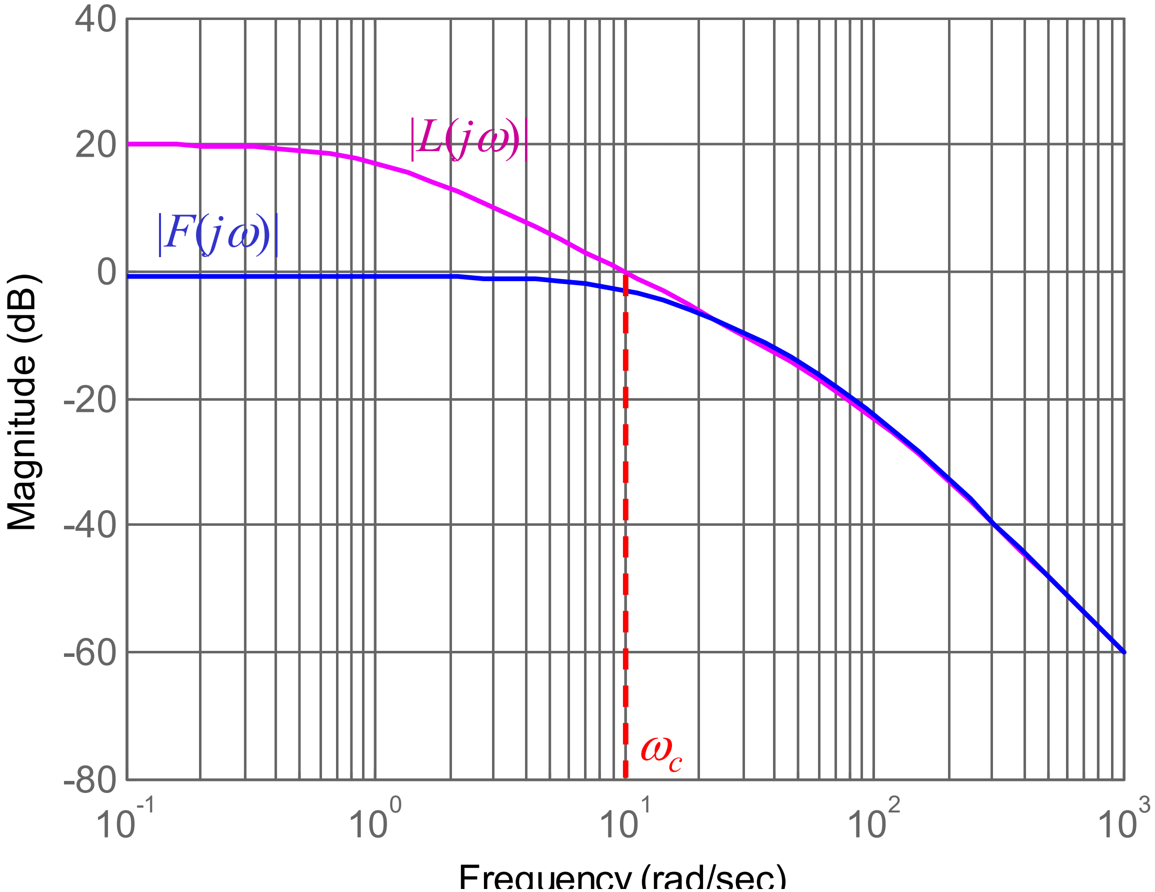
$$L(s) = \frac{10}{(1+s)(1+0.01s)} \quad g = 0 \quad \Rightarrow \quad y(\infty) = A\frac{\mu}{1+\mu} = \frac{10}{11}A$$

Poli & zeri

$$L(s) = \frac{10}{(1+s)(1+0.01s)} \qquad \begin{aligned} N_L(s) &= 10 \\ D_L(s) &= (1+s)(1+0.01s) \end{aligned}$$

$$N_L(s) + D_L(s) = (1+s)(1+0.01s) + 10 = 11 + 1.01s + 0.01s^2$$

Risposta in frequenza



Valori esatti

polo dominante

$$s_1 = -12.4$$

$$s_2 = -88.6$$

$$\tau = \frac{1}{12.4} = 0.08$$

$$\omega_c = 10 \quad \text{rad/s}$$

$$\varphi_m = 90°$$

Valori approssimati

$$\tau \cong \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{10} = 0.1$$