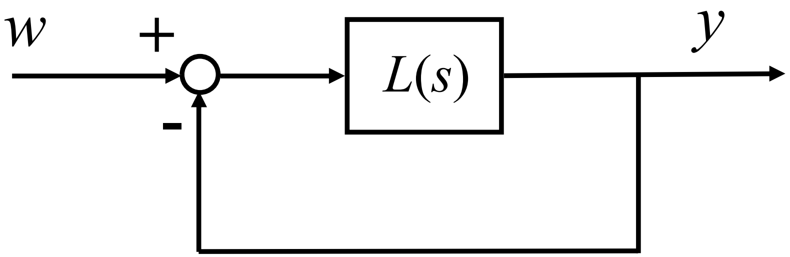
Lezione 15.
Stabilità di sistemi retroazionati

Schema

1. Stabilità di sistemi retroazionati
2. Stabilità & incertezza
3. Margine di guadagno
4. Margine di fase
5. Criterio di Bode
6. Sistemi a fase minima

1. Stabilità di sistemi retroazionati



funzione d'anello

$$L(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{N(s)}{\boxed{D(s)+N(s)}}$$

polinomio caratteristico
in anello chiuso

asintotica stabilità $\Longleftrightarrow$ tutte le radici di $D(s)+N(s)=0$ hanno $\mathrm{Re}<0$

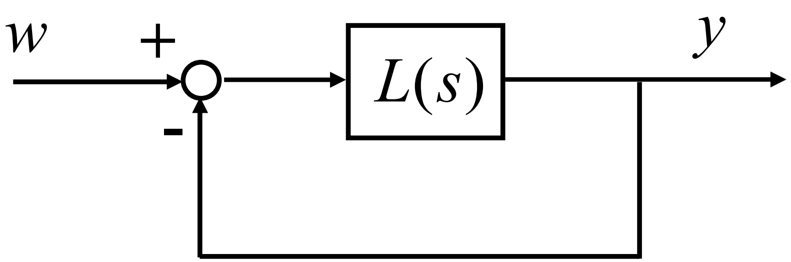
- Questo modo di procedere non ci è utile per capire come cambia la proprietà di stabilità al variare degli elementi che costituiscono la funzione di trasferimento d'anello (controllore e plant).

- Servono strumenti (grafici) e metodi utili anche per la fase di progetto.

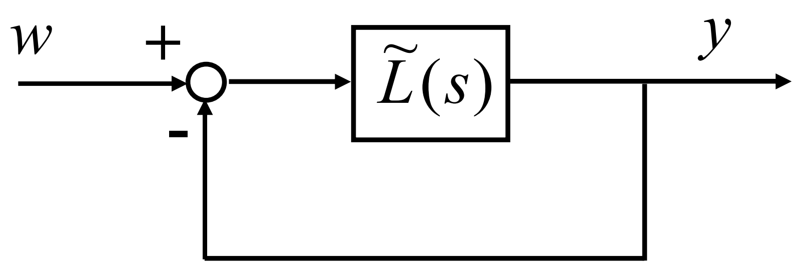
- E' importante tenere conto dell'incertezza nei modelli

2. Stabilità di sistemi retroazionati incerti

modello nominale



modello "vero"



in generale $\tilde{L}(s) \neq L(s)$

stabilità robusta = garanzia di stabilità anche
in presenza di incertezza

3. Margine di guadagno

Sia ω_π la pulsazione per cui $\arg L(j\omega_\pi) = -180°$

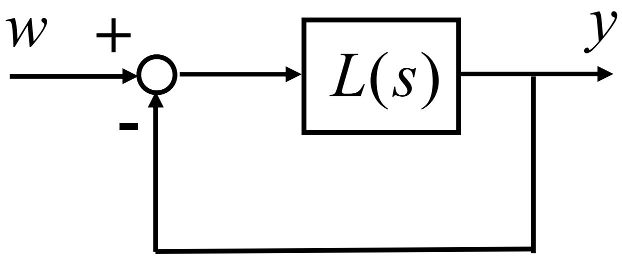
$$\boxed{k_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} = -|L(j\omega_\pi)|_{dB}}$$

margine di guadagno

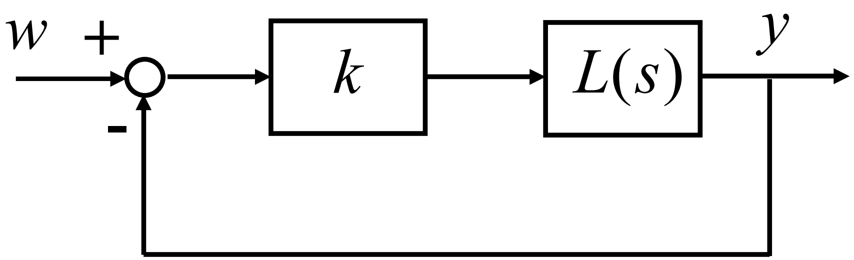
$k_m > 1$ è condizione necessaria per l'asintotica stabilità

Interpretazione

modello nominale



modello "vero"



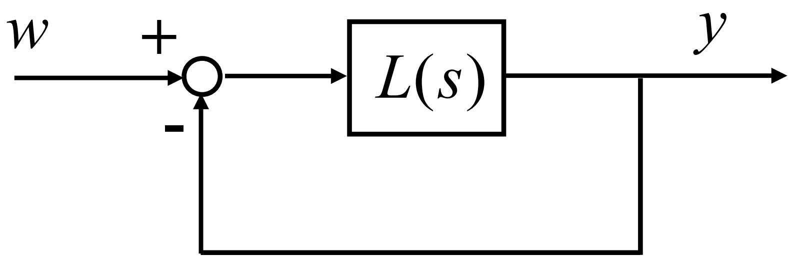
$$k_m > 1$$

E' asintoticamente stabile per tutti i valori di k tali che

$$0 < k < k_m$$

k_m è un indicatore di robustezza rispetto a incertezze sul guadagno d'anello

Esempio



$$L(s) = \frac{10}{(1+s)^3}$$

Calcolare analiticamente il margine di guadagno

Si calcoli ω_π

$$\arg L(j\omega_\pi) = -180°$$

$$\Rightarrow \quad -3\,\mathrm{arctg}(\omega_\pi) = -180°$$

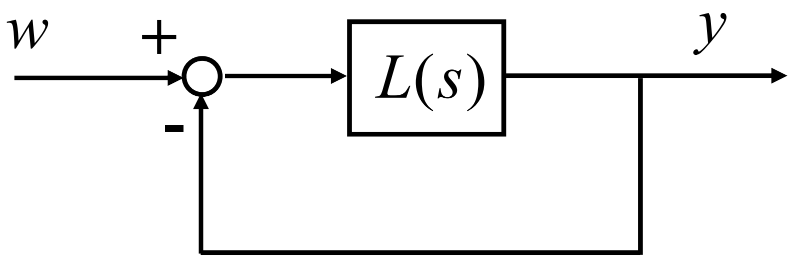
$$\Rightarrow \quad \omega_\pi = \mathrm{tg}(60°) = \sqrt{3} \ \text{ rad/s}$$

Si valuti il margine di guadagno

$$k_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} = \frac{|1 + j\omega_\pi|^3}{10} = \frac{\left(\sqrt{1+3}\right)^3}{10} = \frac{4}{5}$$

$k_m < 1$
Sistema instabile

Esempio



$$L(s) = \frac{10}{(1+s)(1+5s)(1+15s)}$$

Calcolare analiticamente il margine di guadagno

Si calcoli ω_π

$$\arg L(j\omega_\pi) = -180° \;\Rightarrow\; -\operatorname{arctg}(\omega_\pi) - \operatorname{arctg}(5\omega_\pi) - \operatorname{arctg}(15\omega_\pi) = -180°$$

$\Downarrow$

?

Non è sempre possibile calcolare analiticamente il margine di guadagno

4. Margine di fase

Sia ω_c la pulsazione per cui $\left|L\left(j\omega_c\right)\right| = 1$

ω_c si dice **pulsazione critica**

Sia $\varphi_c = \arg L(j\omega_c)$

φ_c si dice **fase critica**

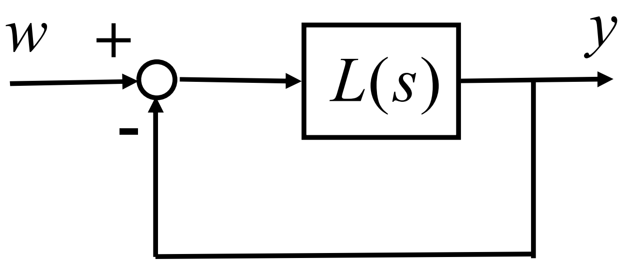
$$\boxed{\varphi_m = 180° - \left|\varphi_c\right|}$$

margine di fase

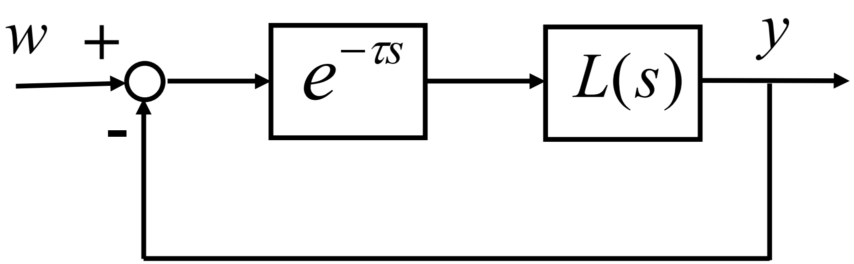
$\varphi_m > 0°$ è condizione necessaria per l'asintotica stabilità

Interpretazione

modello nominale



modello "vero"



$$\varphi_m > 0°$$

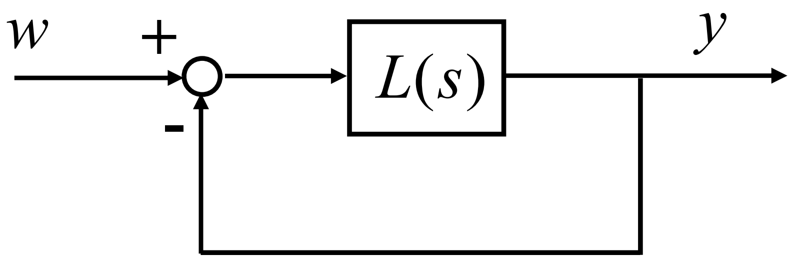
asintoticamente stabile

$$\omega_c \tau < \varphi_m \frac{\pi}{180°}$$

ovvero $\quad \tau < \dfrac{\varphi_m}{\omega_c} \dfrac{\pi}{180°}$

φ_m è un indicatore di robustezza rispetto a incertezze sul ritardo d'anello

Esempio



$$L(s) = \frac{10}{(1+s)(1+2s)}$$

Calcolare analiticamente il margine di fase

Si calcoli ω_c

$$|L(j\omega_c)| = 1 \Rightarrow \frac{10}{|1+j\omega_c||1+j2\omega_c|} = 1 \Rightarrow \sqrt{1+\omega_c^2}\sqrt{1+4\omega_c^2} = 10$$

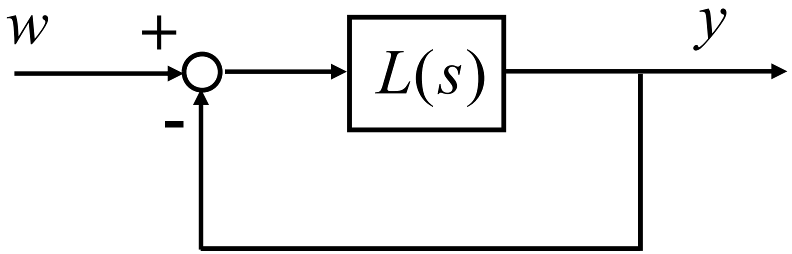
$$\Rightarrow 4\omega_c^4 + 5\omega_c^2 + 1 = 100 \Rightarrow \omega_c \cong 2.095 \quad \text{rad/s}$$

Si valuti il margine di fase

$$\varphi_c = \arg L(j\omega_c) = -\text{arctg}(\omega_c) - \text{arctg}(2\omega_c) \cong -64.5° - 76.6° = -141.1°$$

$\varphi_m = 38.9°$ Sistema asintoticamente stabile

Esempio



$$L(s) = \frac{10}{(1+s)^3(1+5s)}$$

Calcolare analiticamente il margine di fase

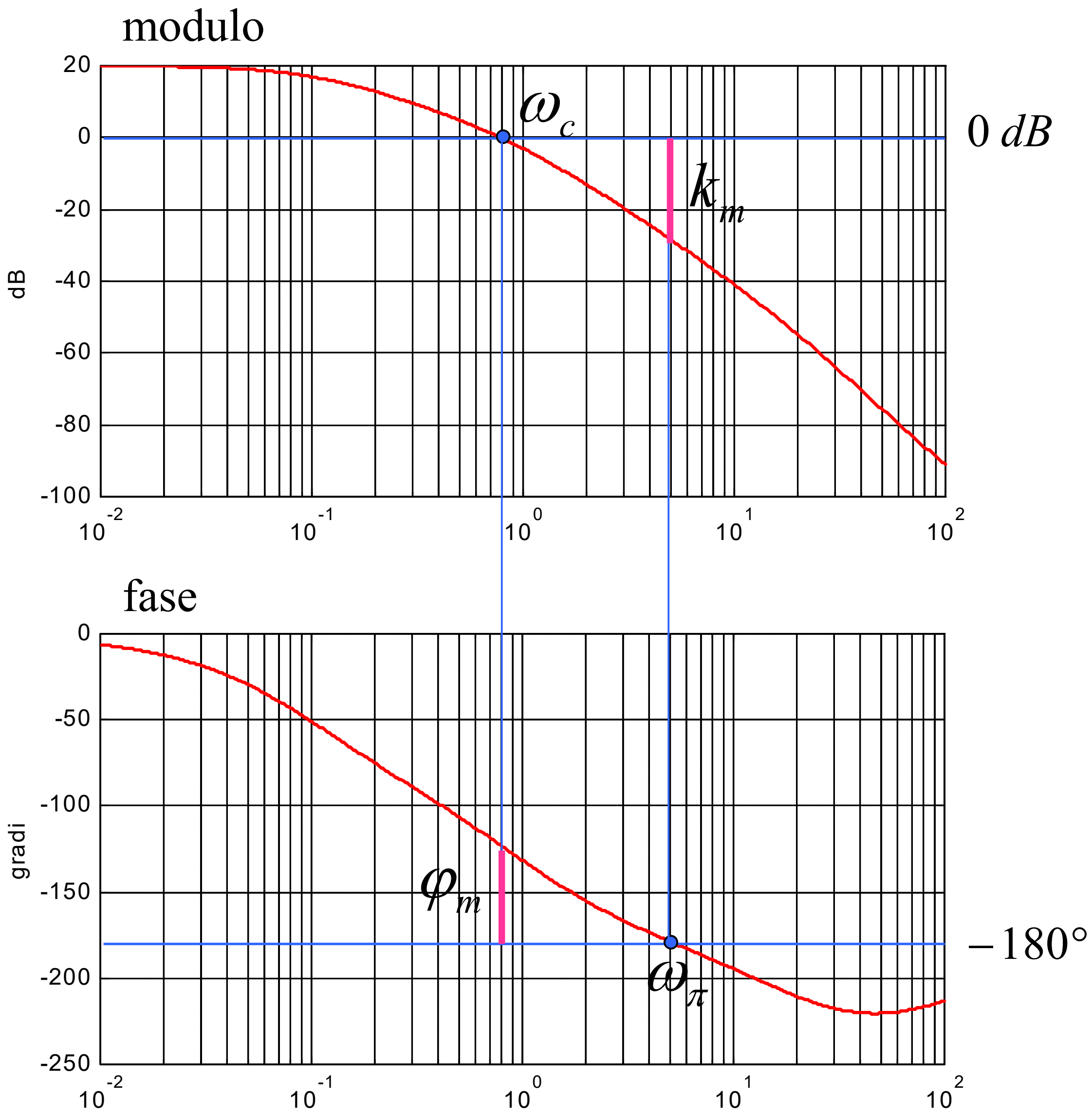
Si calcoli ω_c

$$|L(j\omega_c)| = 1 \Rightarrow \frac{10}{|1+j\omega_c|^3 |1+j5\omega_c|} = 1 \Rightarrow \left(\sqrt{1+\omega_c^2}\right)^3 \sqrt{1+25\omega_c^2} = 10$$

$$\Rightarrow (\omega_c^2+1)^3(25\omega_c^2+1) = 100 \Rightarrow ?$$

Non è sempre possibile calcolare analiticamente il margine di fase

Valutazione dai diagrammi di Bode



margine di guadagno

$$\omega_\pi \cong 5 \text{ rad/s}$$

$$k_m \cong 30\ dB =$$

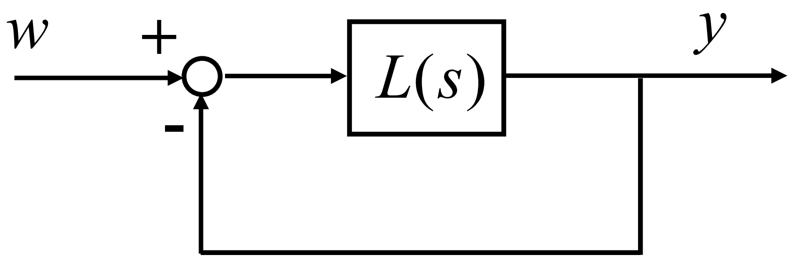
$$= 10^{\frac{30}{20}} \cong 32$$

margine di fase

$$\omega_c \cong 0.8 \text{ rad/s}$$

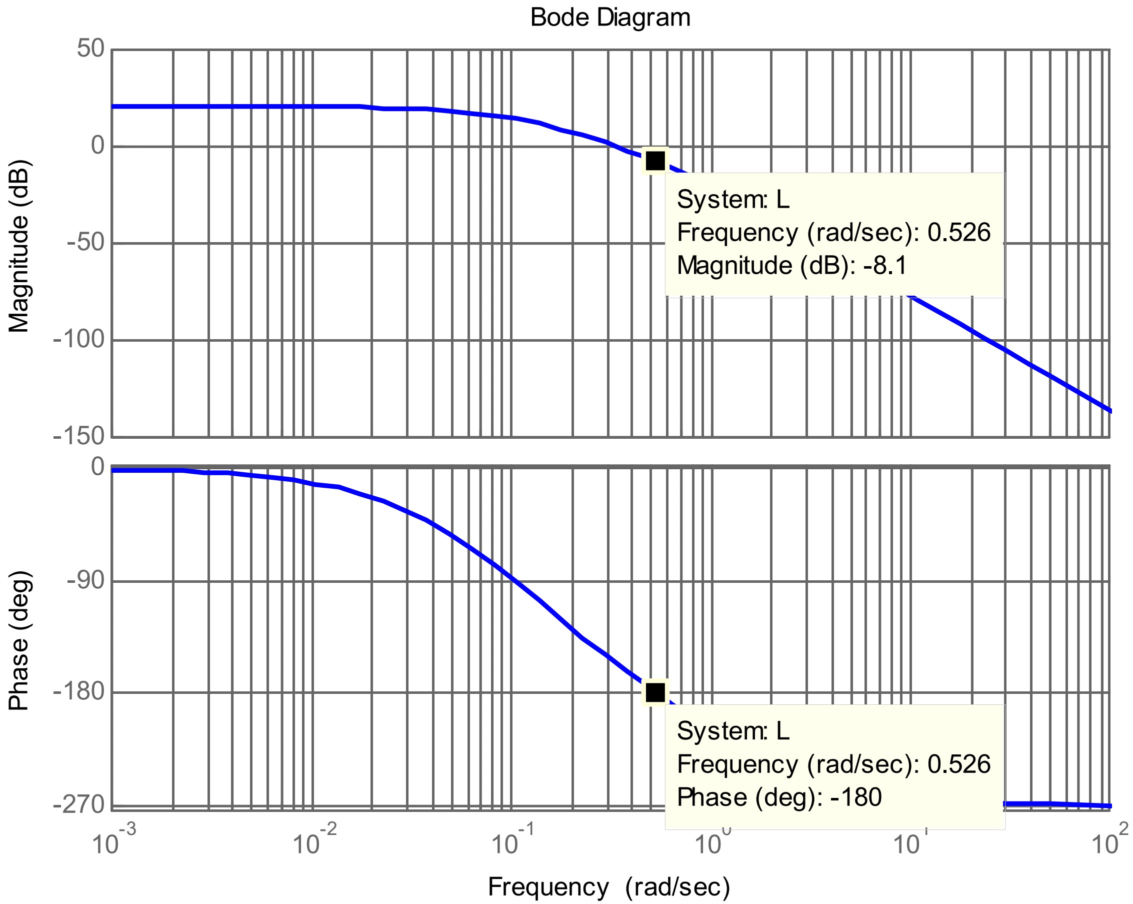
$$\varphi_m \cong 60°$$

Esempio



$$L(s) = \frac{10}{(1+s)(1+5s)(1+15s)}$$

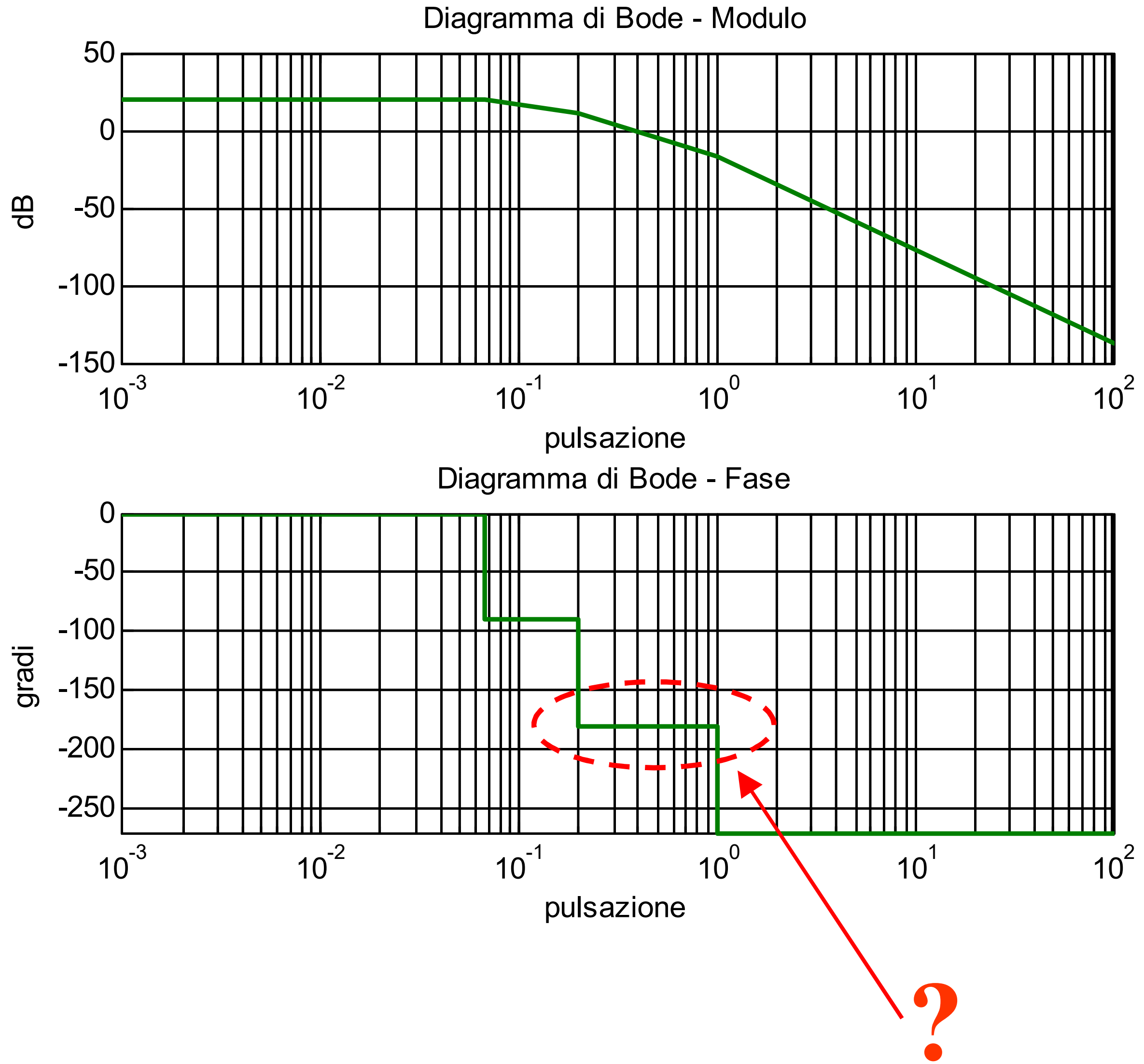
Usando i diagrammi di Bode, valutare approssimativamente il **margine di guadagno** del sistema retroazionato.



$$\omega_\pi \cong 0.526 \text{ rad/s}$$

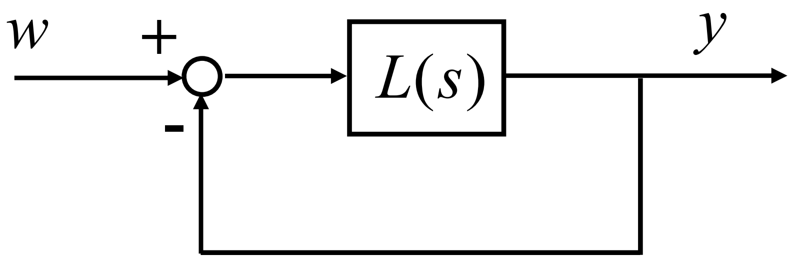
$$k_m \cong 8.1\, dB \cong 2.54$$

Ripetere il calcolo usando i diagrammi di Bode asintotici.



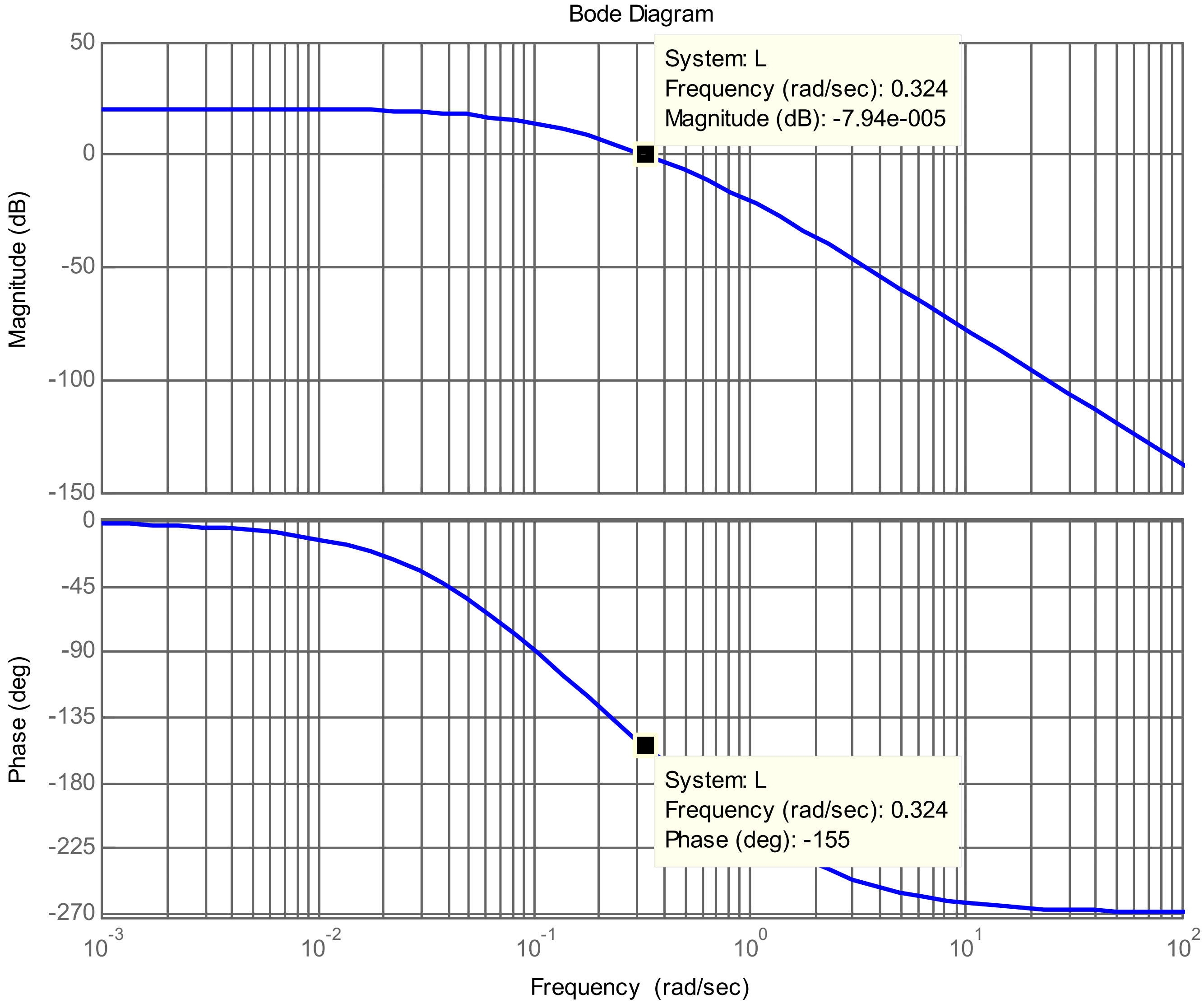
E' difficile ricavare il valore di ω_π dal diagramma asintotico

Esempio



$$L(s) = \frac{10}{(1+s)(1+5s)(1+15s)}$$

Usando i diagrammi di Bode, valutare approssimativamente il **margine di fase** del sistema retroazionato.

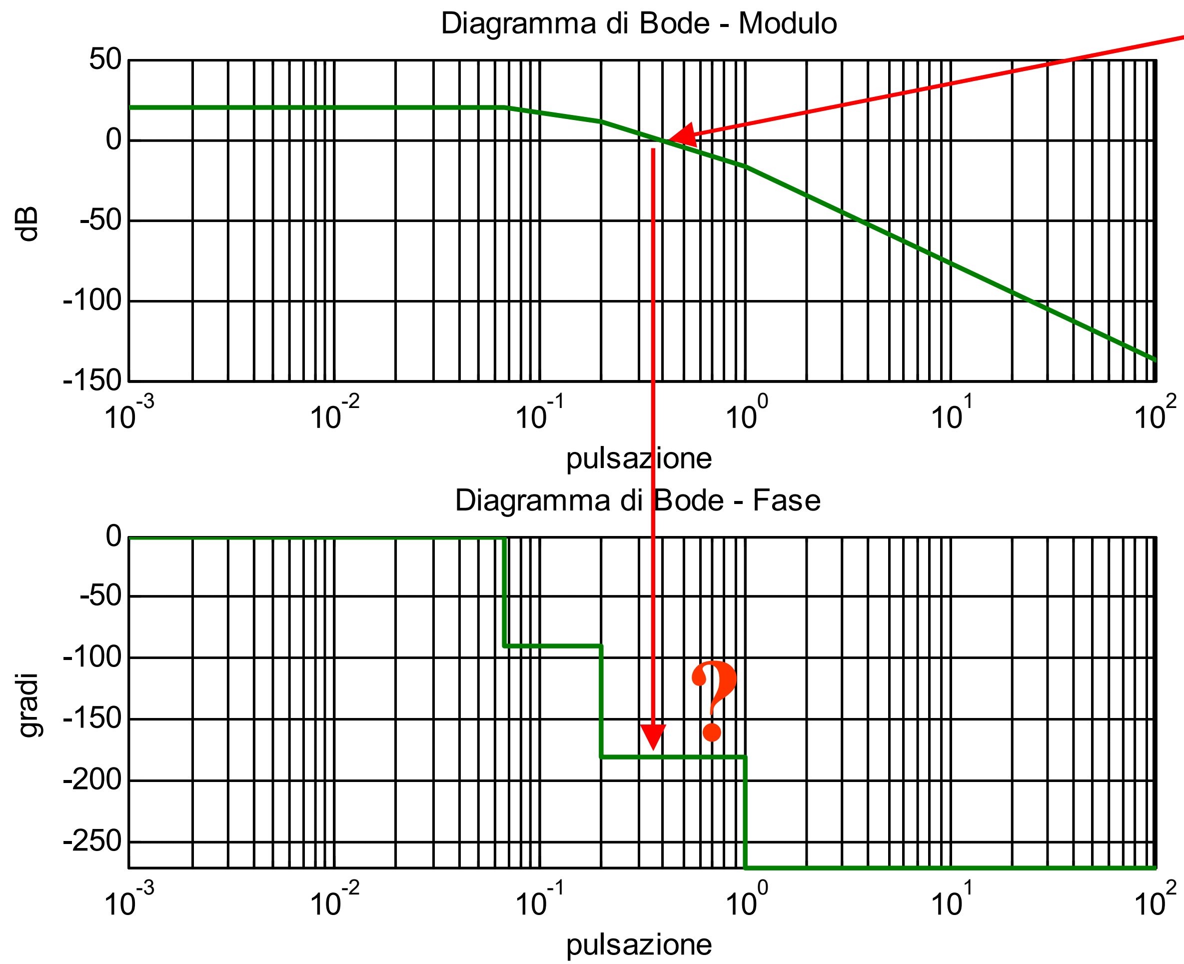


$$\omega_c \cong 0.324 \text{ rad/s}$$

$$\varphi_m \cong 25°$$

Ripetere il calcolo usando i diagrammi di Bode asintotici.

$\omega_c \cong 0.35 \mathrm{rad/s}$



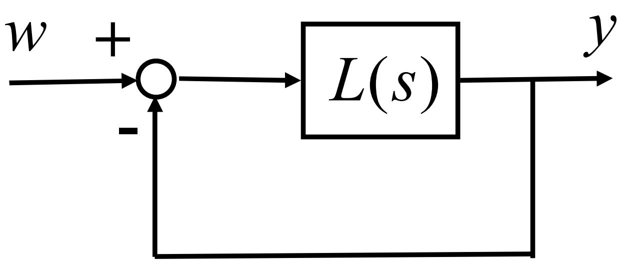
$\varphi_m \cong 21.3°$

E' però possibile calcolare analiticamente la fase critica φ_c

$$\varphi_c = -\mathrm{arctg}(\omega_c) - \mathrm{arctg}(5\omega_c) - \mathrm{arctg}(15\omega_c) =$$

$$= -\mathrm{arctg}(0.35) - \mathrm{arctg}(1.75) - \mathrm{arctg}(5.25) = -19.3° - 60.2° - 79.2° = -158.7°$$

5. Criterio di Bode



Condizioni di applicabilità

- $L(s)$ non deve avere poli a parte reale positiva
- il diagramma di Bode del modulo associato a $L(s)$ attraversa una sola volta l'asse a 0 *dB*

φ_m margine di fase

μ guadagno d'anello

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \mu > 0 \\ \varphi_m > 0 \end{cases}$

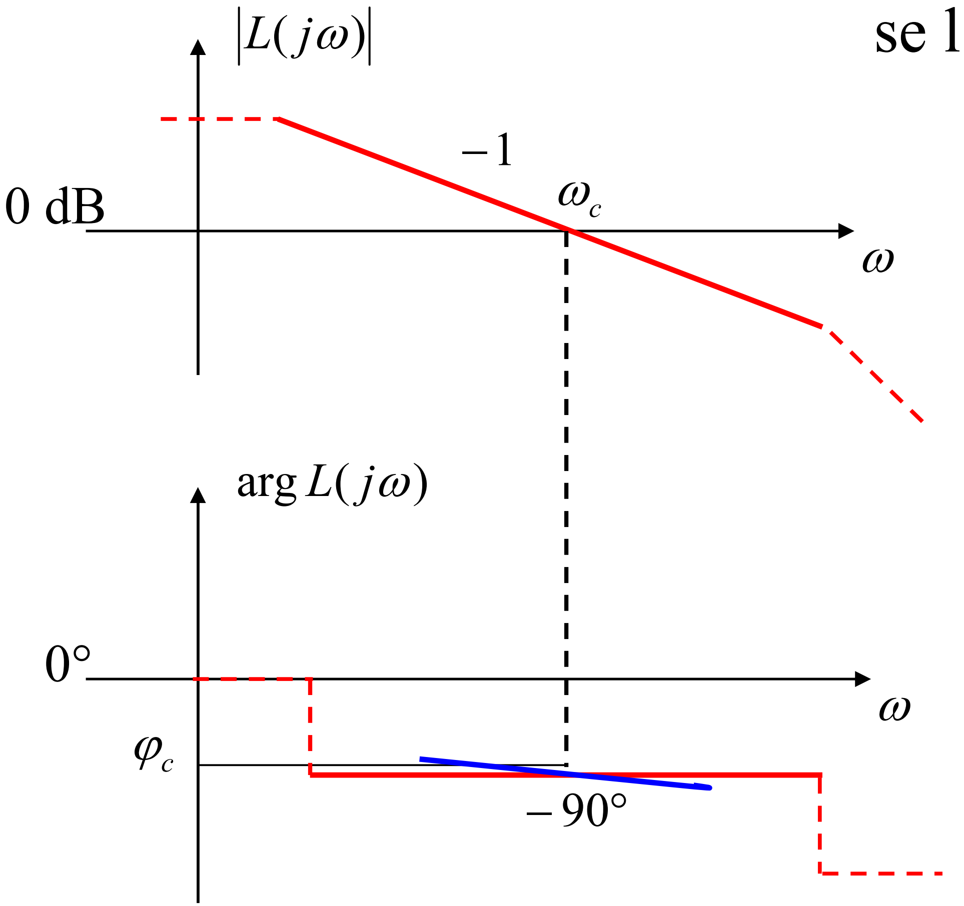
6. Criterio di Bode (approssimato) per sistemi a fase minima

$L(s)$ a fase minima

- poli e zeri hanno Re ≤0
- il guadagno μ è positivo

- la condizione $\mu > 0$ è soddisfatta
- i diagrammi asintotici di Bode di modulo e fase hanno forti legami

(dove il modulo ha pendenza – k la fase vale circa – k 90°)

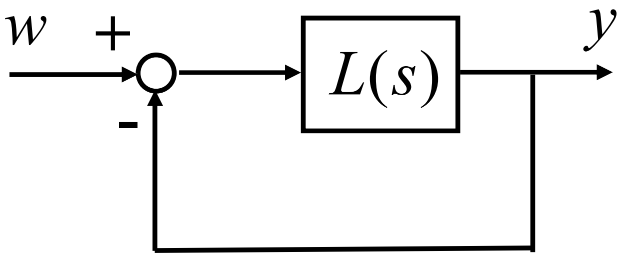


se l'attraversamento dell'asse a 0 *dB* avviene con pendenza – 1

(e se il tratto con tale pendenza è sufficientemente lungo)

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi_c &\cong -90° \\ \varphi_m &\cong 90°\end{aligned}}$$

Esempio

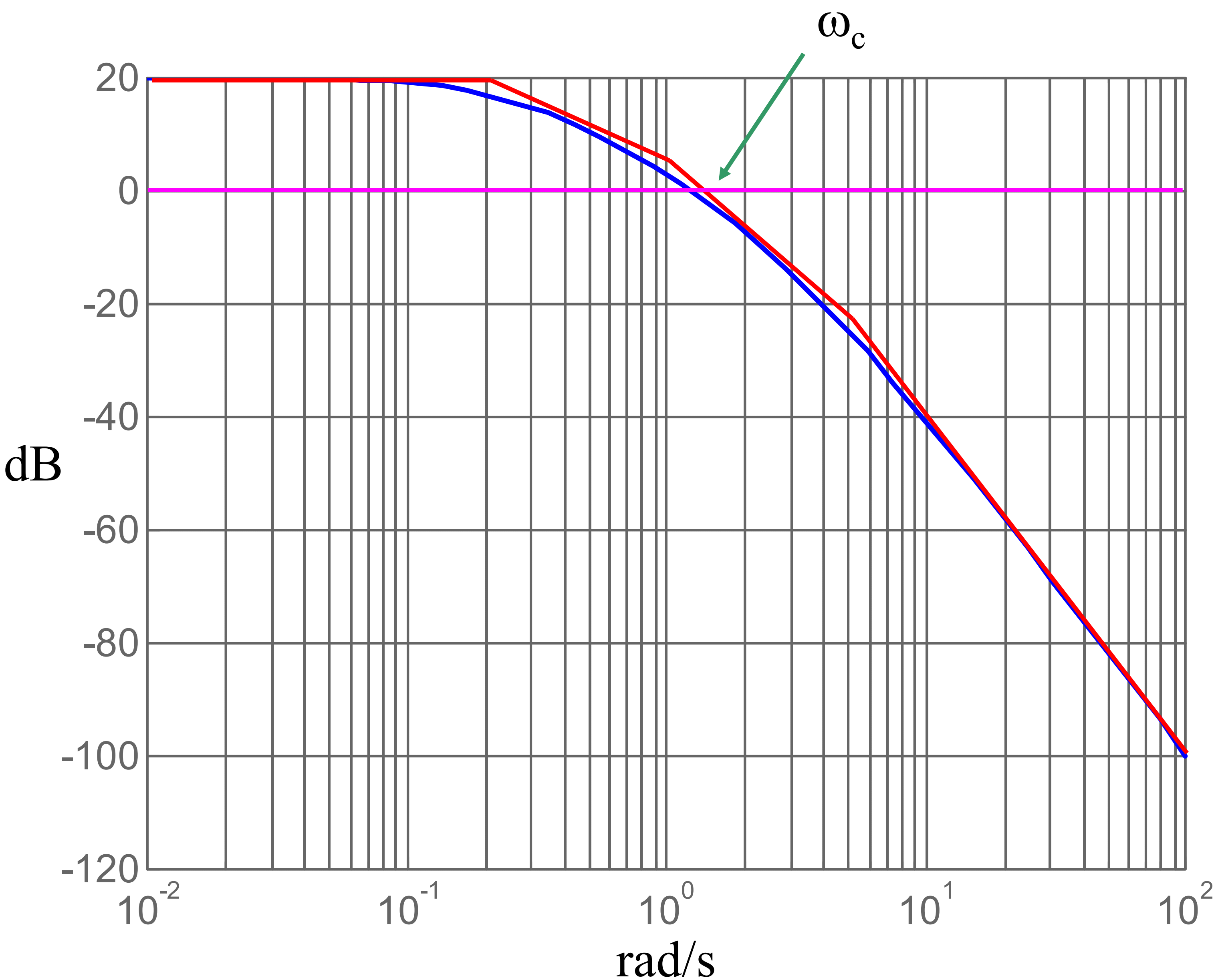


$$L(s) = \frac{10}{(1+5s)(1+s)(1+0.2s)}$$

Giudicare la stabilità mediante il criterio di Bode (se applicabile).

- La funzione di trasferimento d'anello non ha poli a parte reale positiva
- il diagramma di Bode del modulo associato a $L(s)$ attraversa una sola volta l'asse a 0 *dB*

Il criterio di Bode è applicabile.



ωc
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
dB
10-2
10-1
100
101
102
rad/s

Dal grafico $\omega_C \cong 1.4 \text{ rad/s}$

$$\varphi_C = -\text{atan}(5\omega_C) - \text{atan}(\omega_C) - \text{atan}(0.2\omega_C) =$$

$$= -\text{atan}(5 \cdot 1.4) - \text{atan}(1.4) - \text{atan}(0.2 \cdot 1.4) =$$

$$= -\text{atan}(7) - \text{atan}(1.4) - \text{atan}(0.28) =$$

$$= \quad -81.9^\circ \qquad -54.5^\circ \qquad -15.6^\circ = \quad -152^\circ$$

$$\varphi_m = 180^\circ - \left|-152^\circ\right| = 28^\circ$$

asintotica stabilità $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \mu = 10 > 0 \\ \varphi_m = 28^\circ > 0 \end{cases}$

Valori esatti : $\begin{aligned} \omega_C &= 1.2 \text{ rad/s} \\ \varphi_m &= 35.1^\circ \end{aligned}$