

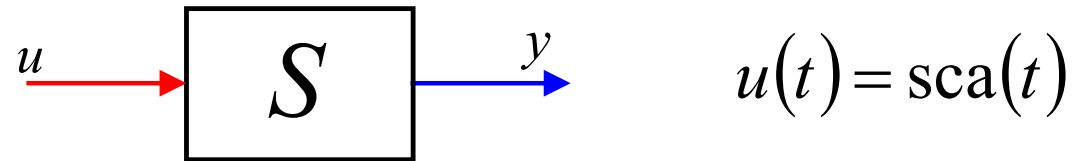
Lezione 8.

Risposta allo scalino

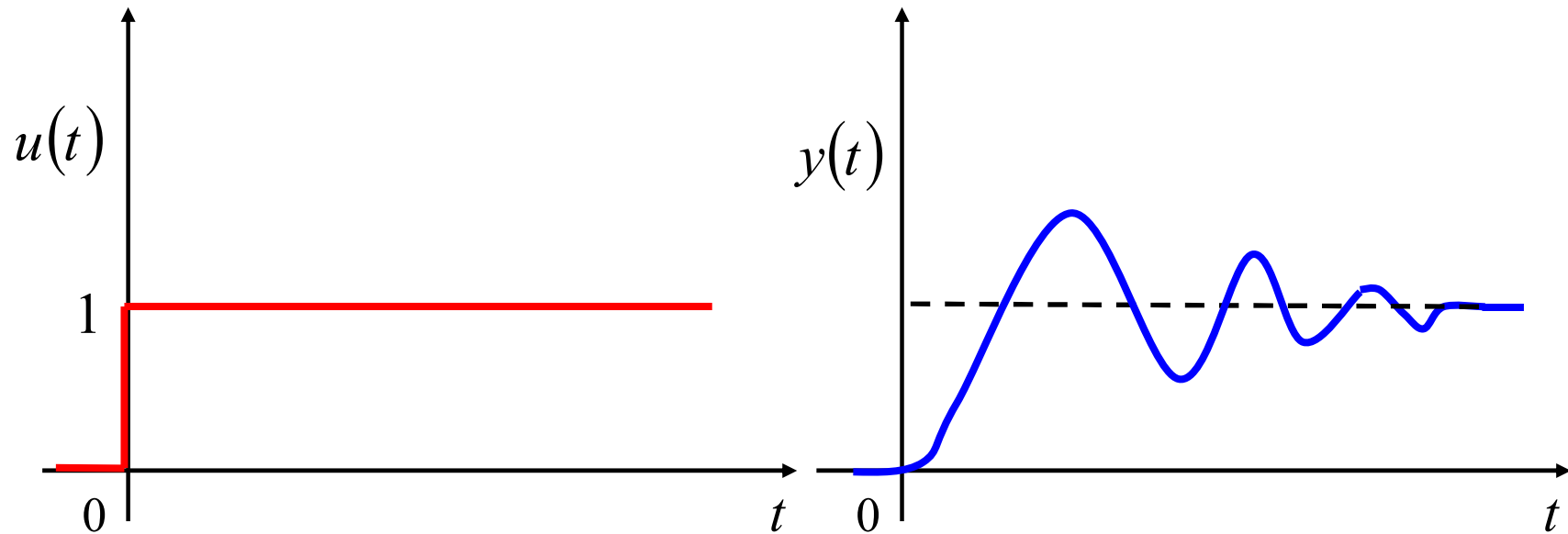
Schema della lezione

1. Introduzione
2. Relazione tra le risposte ad ingressi canonici
3. Parametri caratteristici della risposta allo scalino
4. Sistemi del I ordine strettamente propri
5. Sistemi del II ordine con poli reali distinti
6. Sistemi del II ordine con poli reali distinti ed uno zero
7. Sistemi del II ordine con due poli complessi coniugati
8. Pulsazione naturale e smorzamento
9. Sistemi di ordine superiore al secondo
10. Approssimazione a poli dominanti

1. Introduzione



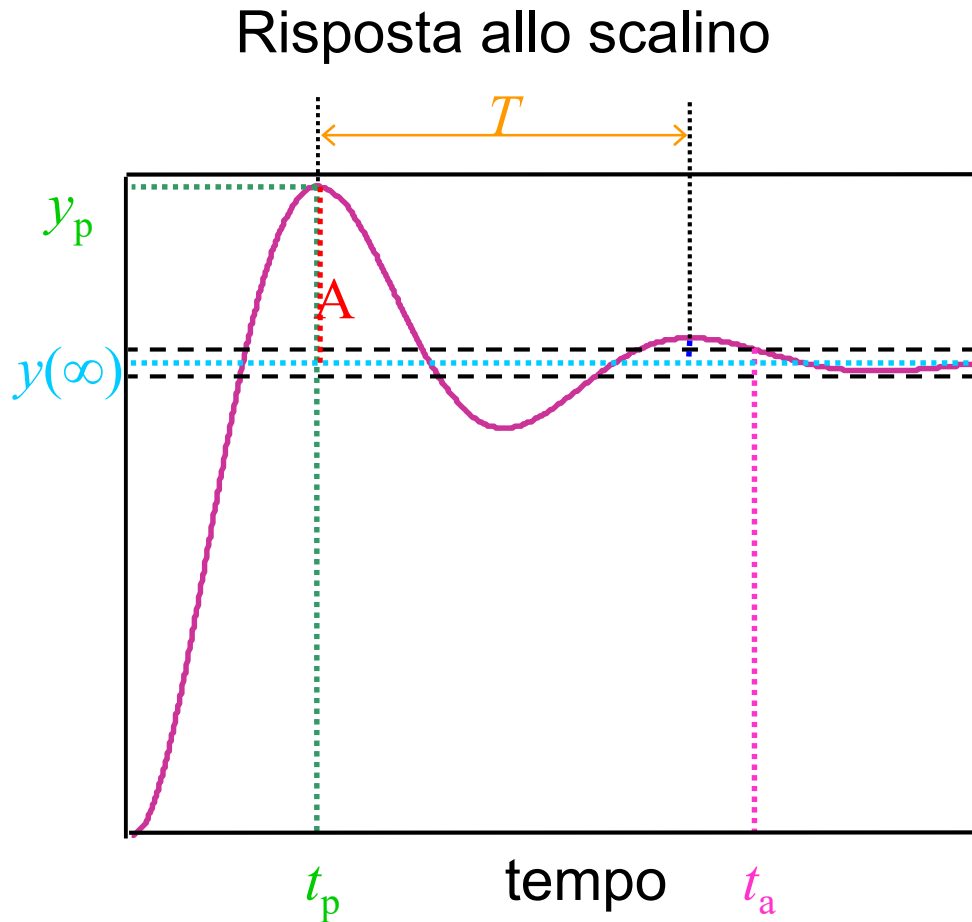
Sistema asintoticamente stabile



2. Relazione tra le risposte a ingressi canonici

$\text{imp}(t)$	$\text{sca}(t)$	$\text{ram}(t)$
$\frac{d}{dt} \text{sca}(t)$		$\int_0^t \text{sca}(\tau) d\tau$
1	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$
Risposta all'impulso $\frac{d}{dt} \left[\begin{array}{c} \text{risposta} \\ \text{allo scalino} \end{array} \right]$		Risposta alla rampa $\int_0^t \left[\begin{array}{c} \text{risposta} \\ \text{allo scalino} \end{array} \right] d\tau$

3. Parametri caratteristici della risposta allo scalino




- $y(\infty)$ \bar{y} Valore di regime
- t_a Tempo di assestamento
- t_p Tempo di picco
- y_p Valore di picco
- $A = y_p - y(\infty)$ Massima sovraelongazione
- $\Delta = \frac{A}{y(\infty)}$ Massima sovraelongazione relativa
- T Periodo delle oscillazioni

4. Sistemi del primo ordine strettamente propri

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + s\tau}$$

Strettamente proprio

$\tau > 0$  Sistema as. stabile
 $\mu > 0$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu}{s(1+s\tau)}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu}{s(1+s\tau)}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu}{s} - \frac{\mu\tau}{1+s\tau}\right] = \mu\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), t \geq 0 \end{aligned}$$

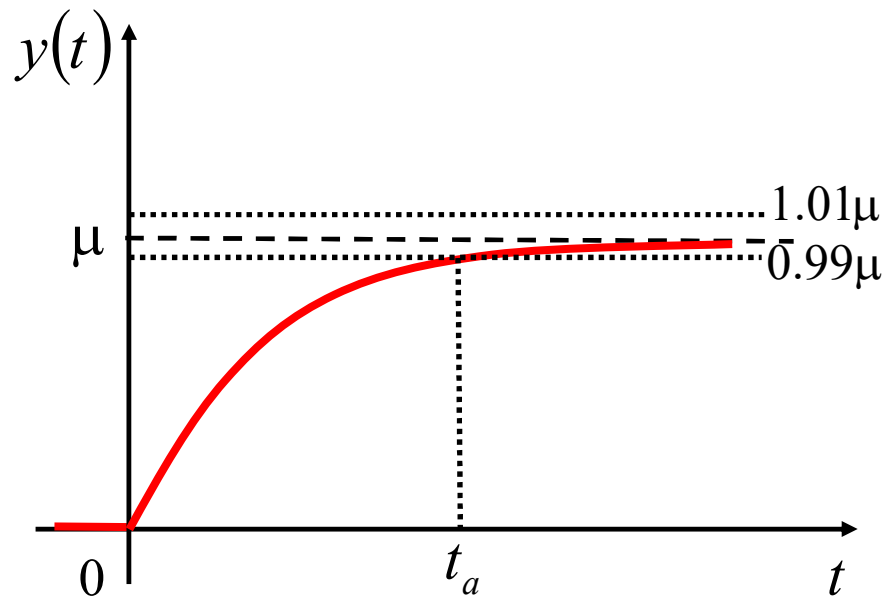
$$y(t) = \mu\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad t \geq 0$$

$$y(0^+) = 0$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \frac{G(s)}{s} = \frac{\mu}{\tau}$$

$$y(\infty) = \mu$$

Valutazione del tempo di assestamento



$$\mu \left(1 - e^{-\frac{t_a}{\tau}} \right) = 0.99\mu$$

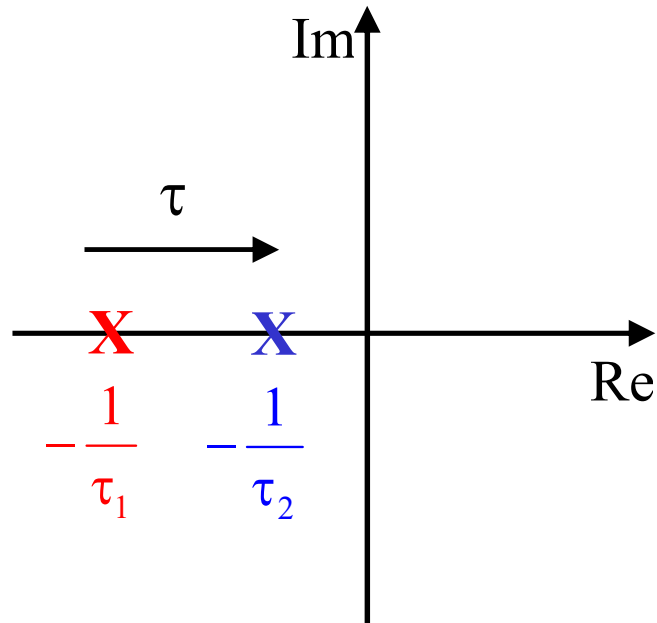
$$e^{-\frac{t_a}{\tau}} = 0.01$$

$$\frac{t_a}{\tau} = \ln 100$$

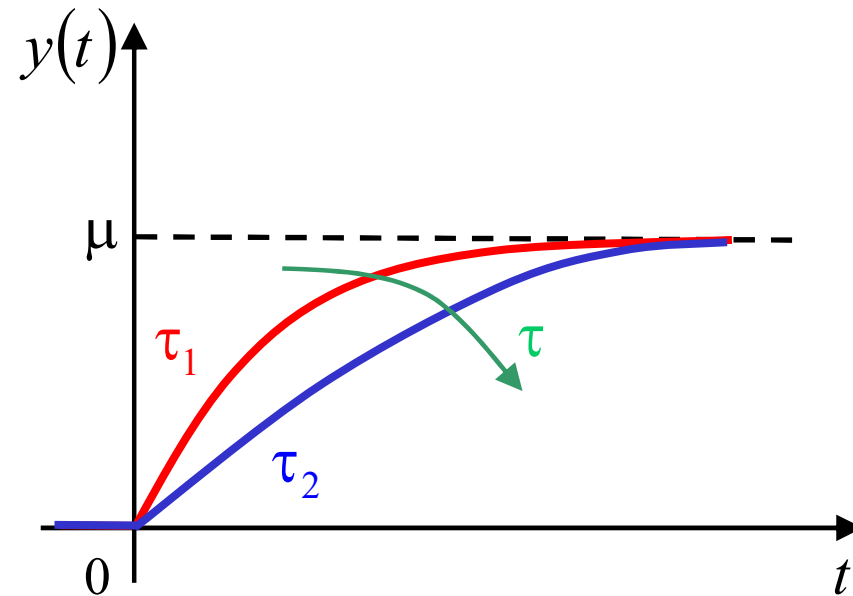
$$t_a = \tau \ln 100 \cong 5\tau$$

$$t_a \cong 5\tau$$

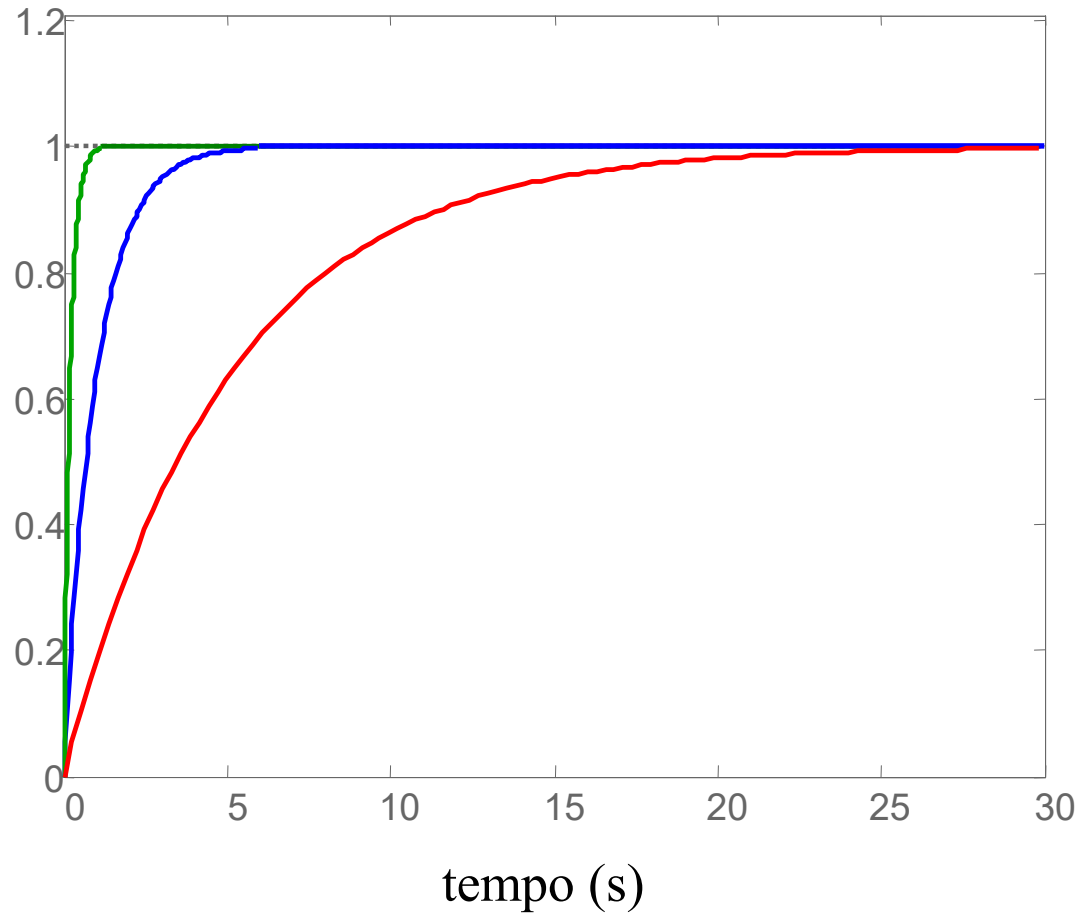
Posizione del polo e velocità della risposta



Più vicino è il polo all'asse immaginario, più grande è la costante di tempo associata, più lenta è la risposta.



Esempio



$$G(s) = \frac{1}{1 + s\tau}$$

$$\tau = 0.2 \text{ s}$$

$$\tau = 1 \text{ s}$$

$$\tau = 5 \text{ s}$$

Esempio

$$G(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{1}{1 + sRC} \quad \text{FdT del circuito RC}$$

Costante di tempo del polo: $\tau = RC$

Tempo di assestamento: $t_a \cong 5\tau$

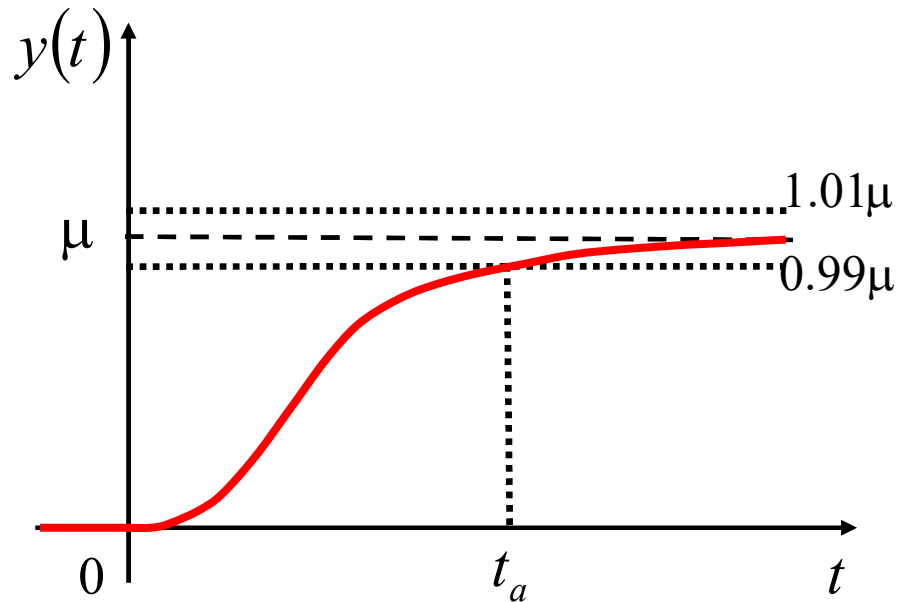
5. Sistemi del secondo ordine con poli reali distinti

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)} \quad \begin{array}{l} \tau_1 \neq \tau_2 \quad \mu > 0 \\ \tau_1 > \tau_2 > 0 \end{array} \quad \Rightarrow \text{as.stabile}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G(s)}{s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\mu}{s(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)} \right] =$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\mu}{s} - \frac{a}{1+s\tau_1} + \frac{b}{1+s\tau_2} \right] \quad \begin{array}{l} a = \frac{\mu\tau_1^2}{\tau_1 - \tau_2} \\ b = \frac{\mu\tau_2^2}{\tau_1 - \tau_2} \end{array}$$

$$y(t) = \mu \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_2} \right) \quad t \geq 0$$



Nota Bene

$$y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

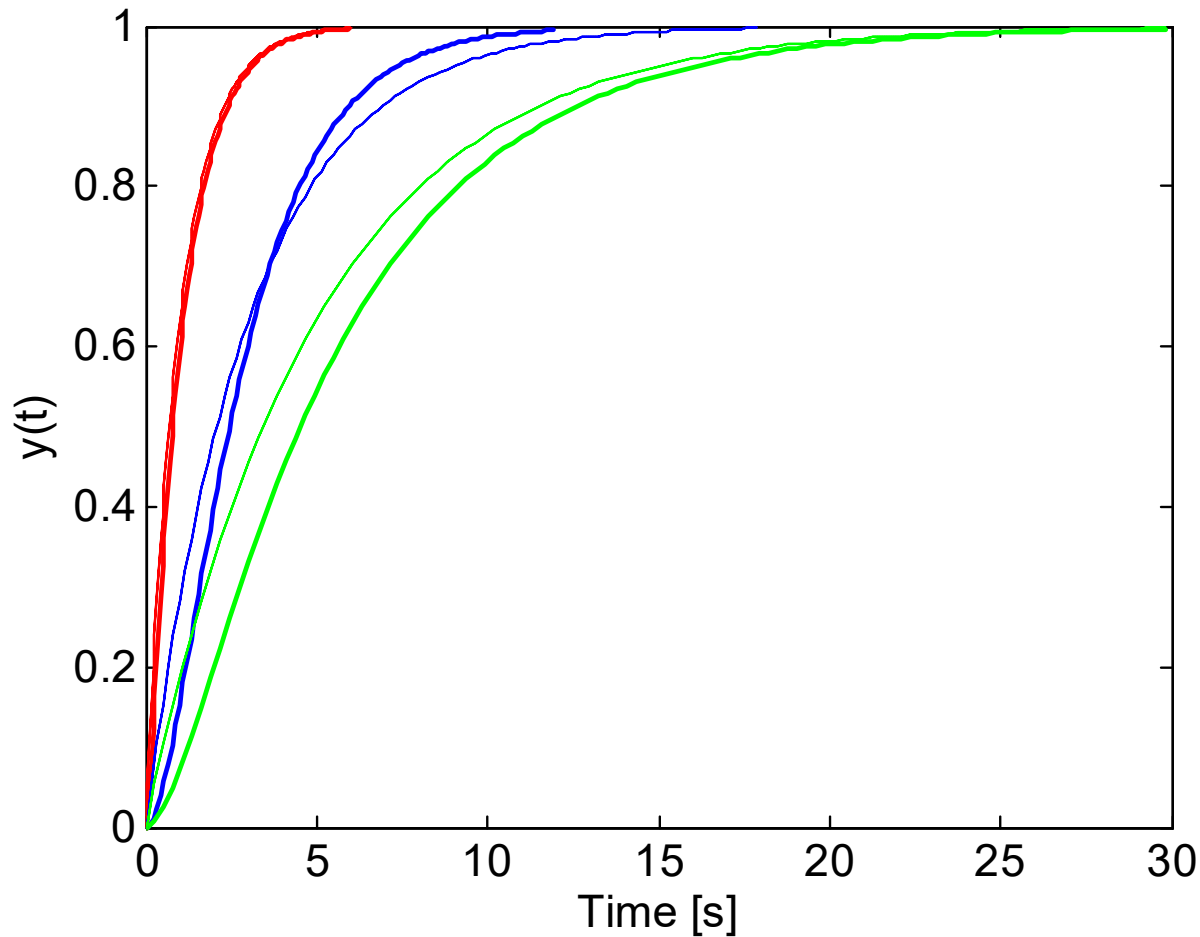
$$\ddot{y}(0) = \frac{\mu}{\tau_1 \tau_2} > 0$$

$$y(\infty) = \mu > 0$$

t_a è una funzione
non semplice di τ_1 e τ_2

se $\tau_1 \gg \tau_2$ \Rightarrow $\hat{y}(t) \cong \mu \left(1 - e^{-t/\tau_1} \right)$ \Rightarrow $t_a \cong 5\tau_1$

Esempio



$$G(s) = \frac{1}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}$$

linea continua

$$\tau_1 = 5s; \tau_2 = 1s$$

$$\tau_1 = 3s; \tau_2 = 1s$$

$$\tau_1 = 1s; \tau_2 = 0.1s$$

linea tratteggiata

$$\tau_1 = 5s; \tau_2 = 0s$$

$$\tau_1 = 3s; \tau_2 = 0s$$

$$\tau_1 = 1s; \tau_2 = 0s$$

La costante di tempo più grande (il polo lento) è la più importante nel determinare la forma della risposta allo scalino (ed in particolare il tempo di assestamento)

6. Sistema del secondo ordine con poli reali distinti ed uno zero

$$G(s) = \frac{\mu(1+sT)}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)} \quad \begin{array}{l} \tau_1 \neq \tau_2 \neq T \quad \mu > 0 \\ \tau_1 > \tau_2 > 0 \end{array} \quad \Rightarrow \text{as.stabile}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G(s)}{s} \right]$$

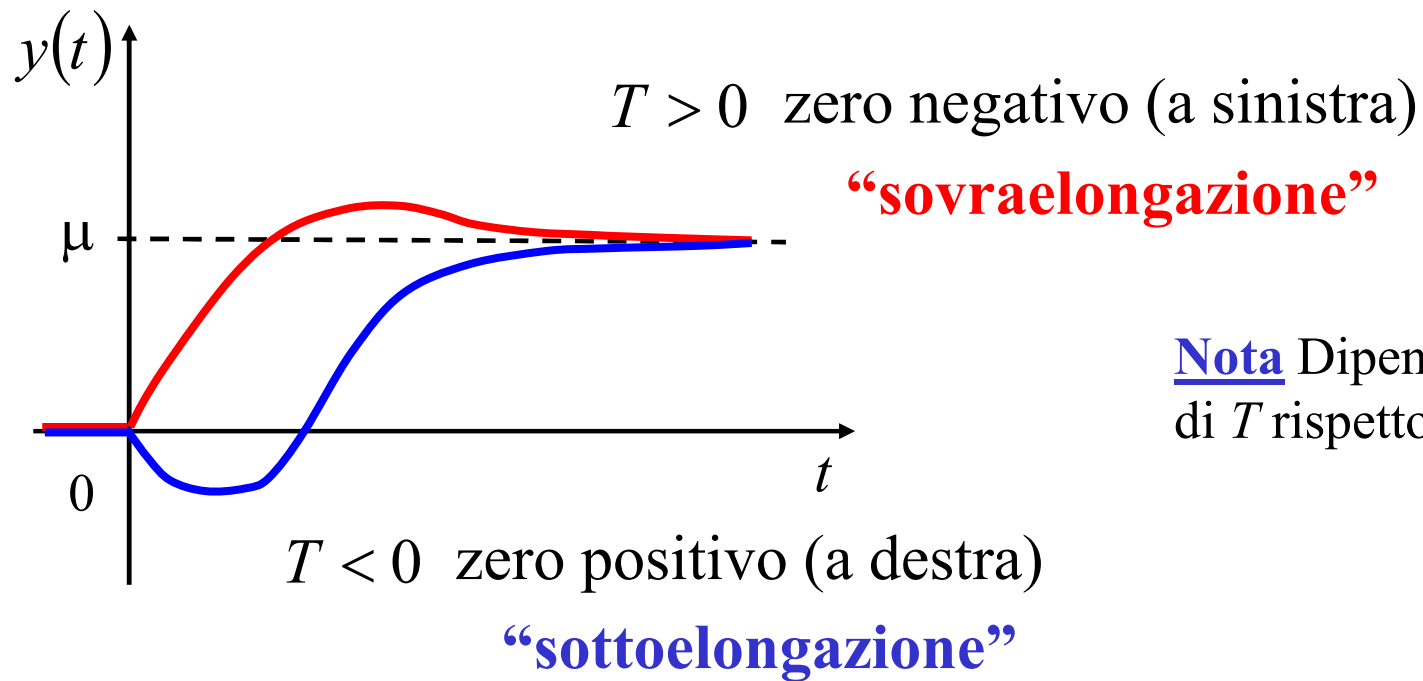
$$y(t) = \mu \left(1 - \frac{\tau_1 - T}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2 - T}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_2} \right) \quad t \geq 0$$

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \frac{G(s)}{s} = \frac{\mu T}{\tau_1 \tau_2}$$

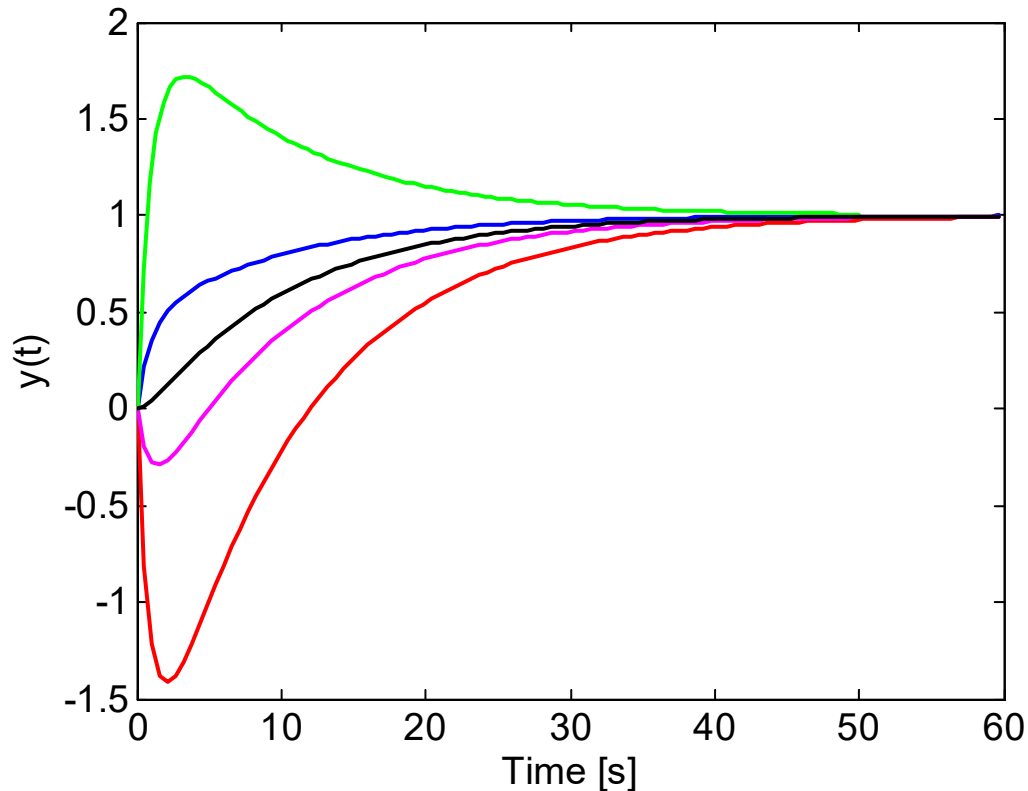
$$y(\infty) = \mu$$

> 0 se $T > 0$
 < 0 se $T < 0$



Nota Dipende dal valore di T rispetto a τ_1, τ_2

Esempio



$$G(s) = \frac{(1 + sT)}{(1 + 10s)(1 + s)}$$

$T=0s$ no zero

$T=5s$ zero <0 “intermedio”

$T=-5s$ zero >0 “intermedio”

$T=20s$ zero <0 “lento”

$T=-20s$ zero >0 “lento”


Riassumendo.

Zero a dx: sempre sottoelongazione, tanto maggiore quanto più lo zero è piccolo (cioè “lento”) rispetto al polo dominante (in modulo).

Zero a sx: sovraelongazione solo se lo zero è piccolo rispetto al polo dominante (in modulo).

7. Sistema del secondo ordine con poli complessi coniugati

$$G(s) = \frac{\rho}{(s - \sigma + j\omega)(s - \sigma - j\omega)} \quad \mu = G(0) = \frac{\rho}{\sigma^2 + \omega^2} \quad \rho > 0$$

poli : $\sigma \pm j\omega$ $\sigma < 0$ $\omega > 0$  as.stabile

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G(s)}{s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\alpha}{s} + \frac{\beta s + \gamma}{s^2 - 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2} \right]$$

risolvendo $\alpha = \frac{\rho}{\sigma^2 + \omega^2} = \mu$

$$\beta = -\mu$$

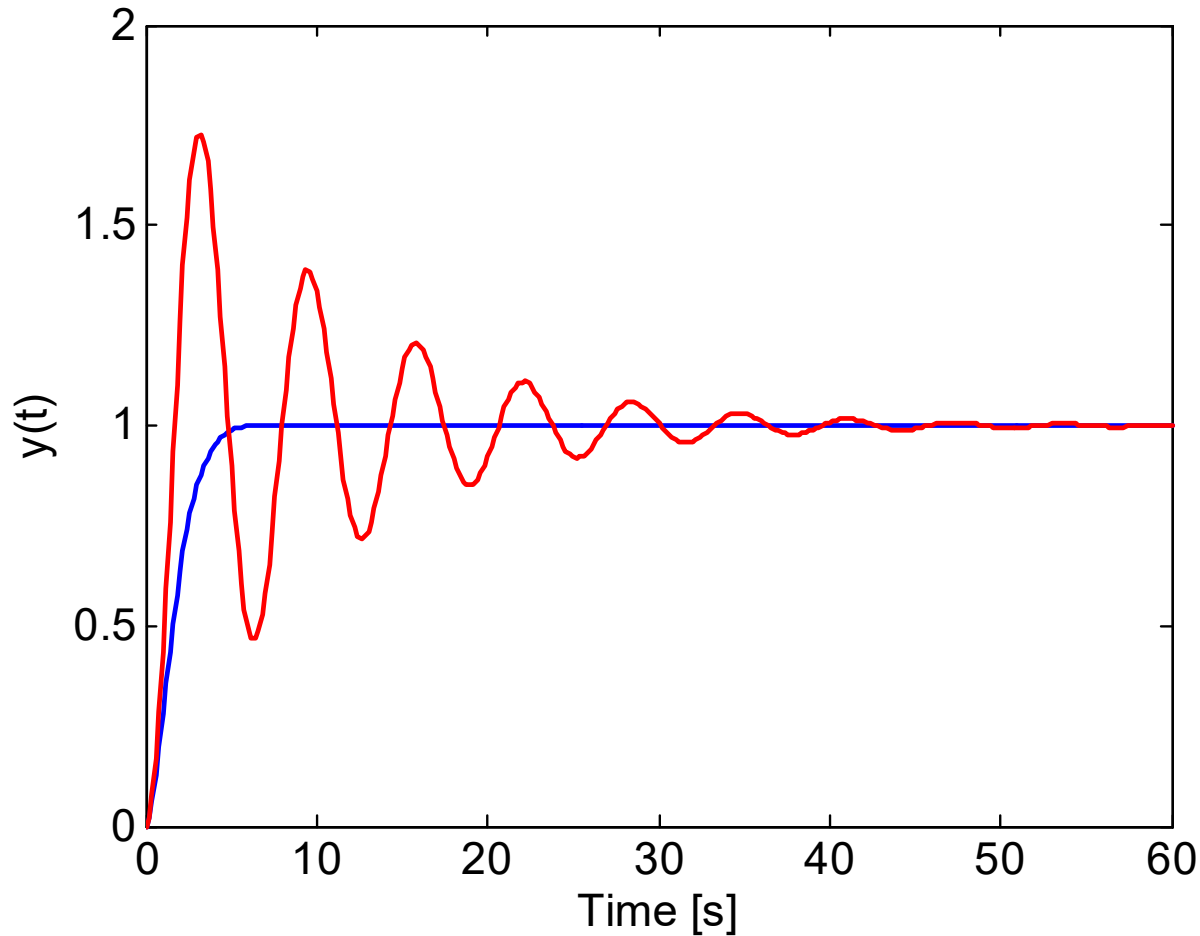
$$\gamma = 2\sigma\mu$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\mu}{s} - \frac{\mu s - 2\mu\sigma}{s^2 - 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2} \right] = \\
&= \mu \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{s - \sigma - \sigma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} \right] = \\
&= \mu \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{s - \sigma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} + \frac{\sigma}{\omega} \frac{\omega}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} \right] \\
&\quad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
&\quad e^{\sigma t} \cos \omega t \qquad \qquad e^{\sigma t} \sin \omega t
\end{aligned}$$

$$y(t) = \mu \left[1 - e^{\sigma t} \cos \omega t + \frac{\sigma}{\omega} e^{\sigma t} \sin \omega t \right] \quad t \geq 0$$

(possibili) oscillazioni smorzate

Esempio

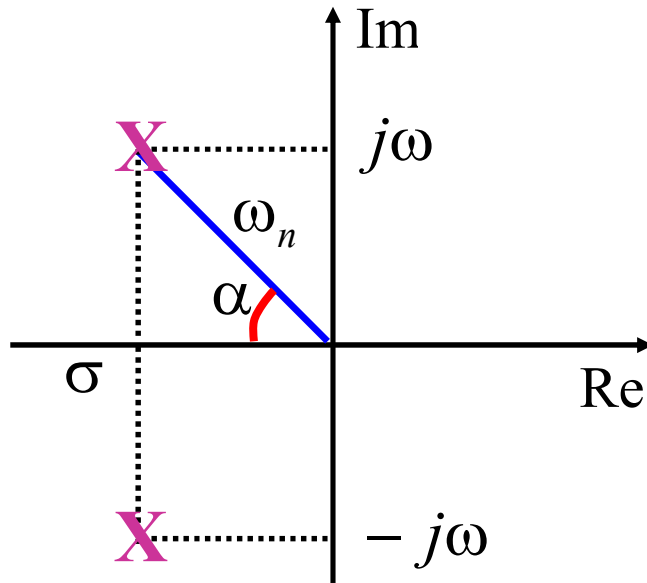


$$s_{1,2} = -0.9 \pm j0.4359$$

$$s_{1,2} = -0.1 \pm j0.9950$$

Come faccio a capire
(in modo semplice)
se la risposta presenta
oscillazioni o no?

8. Pulsazione naturale e smorzamento



$$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$$

pulsazione naturale

$$\xi = \cos \alpha = \frac{-\sigma}{\omega_n}$$

smorzamento

Relazioni inverse

$$\sigma = -\omega_n \xi \quad \omega = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$G(s) = \frac{\rho}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} = \frac{\rho}{s^2 - 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2} = \frac{\rho}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$G(s) = \frac{\rho}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\mu = \frac{\rho}{\omega_n^2} = \frac{\rho}{\sigma^2 + \omega^2}$$

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

Esempio

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 4s + 13}$$

$$\text{poli in } s_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 13} = -2 \pm j3$$

$\sigma = -2$ $\omega = 3$

Usando la definizione: $\omega_n = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$$\xi = \frac{-\sigma}{\omega_n} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Esempio (esula dal problema della risposta allo scalino)

$$G(s) = \frac{10}{s^2 - 4s + 13}$$


$$\text{poli in } s_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm j3$$

$\sigma = 2$ $\omega = 3$

Usando la definizione: $\omega_n = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$$\xi = \frac{-\sigma}{\omega_n} = \frac{-2}{\sqrt{13}}$$

Casi notevoli

Essendo $\xi = \frac{-\sigma}{\omega_n} = \frac{-\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}}$  $-1 \leq \xi \leq 1$

In particolare

- $\xi = 1$ se $\begin{cases} \omega = 0 \\ \sigma < 0 \end{cases}$ **Poli reali coincidenti as. stabili in $-\omega_n$**

Infatti $G(s) = \frac{\rho}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\rho}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\rho}{(s + \omega_n)^2}$

- $\xi = -1$ se $\begin{cases} \omega = 0 \\ \sigma > 0 \end{cases}$ **Poli reali coincidenti instabili in $+\omega_n$**

Infatti $G(s) = \frac{\rho}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\rho}{s^2 - 2\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\rho}{(s - \omega_n)^2}$

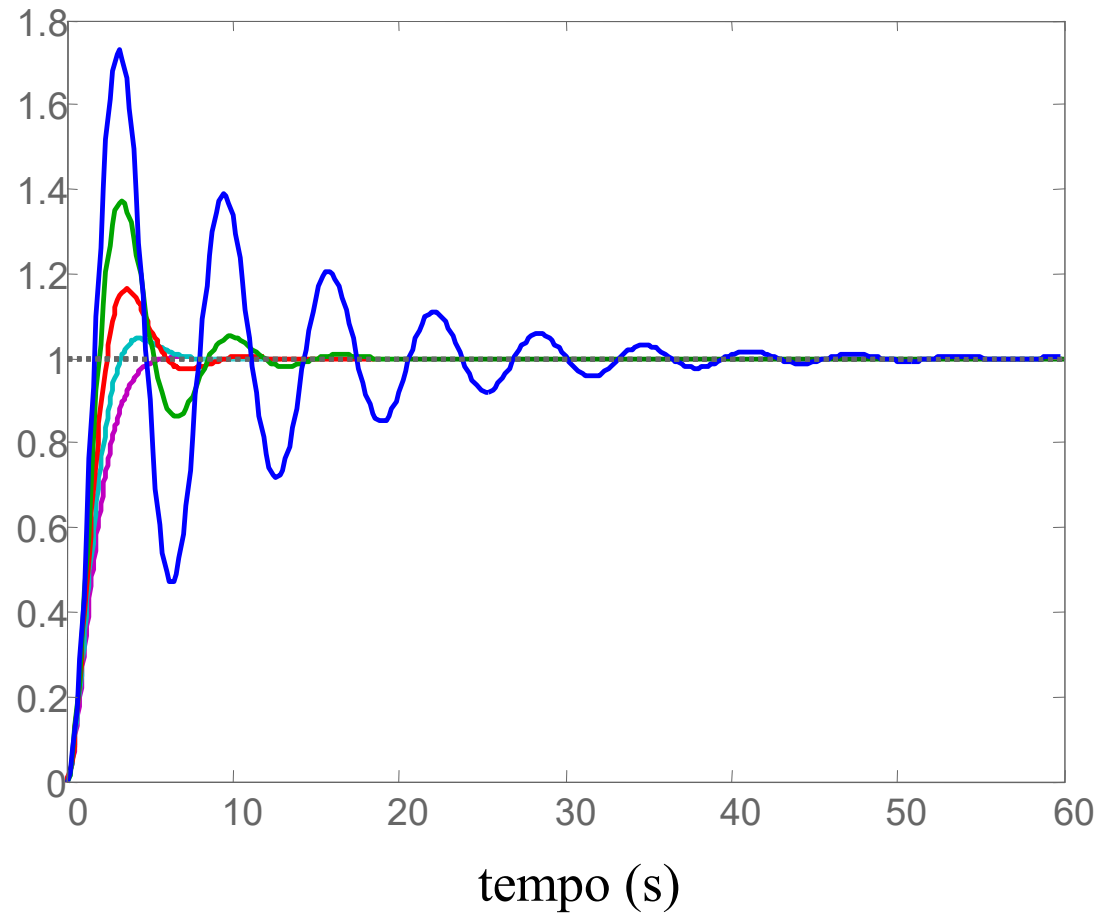
- $\xi = 0$ se $\sigma = 0$ Poli immaginari coniugati in $\pm j\omega_n$

$$\text{Infatti } G(s) = \frac{\rho}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\rho}{s^2 + \omega_n^2}$$

In generale

- $0 < \xi < 1$ se $\sigma < 0$ Poli complessi coniugati as. stabili
- $-1 < \xi < 0$ se $\sigma > 0$ Poli complessi coniugati instabili

Esempio



$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta s + s^2}$$

$$\mu = 1 \quad \omega_n = 1$$

$$\zeta = 0.1$$

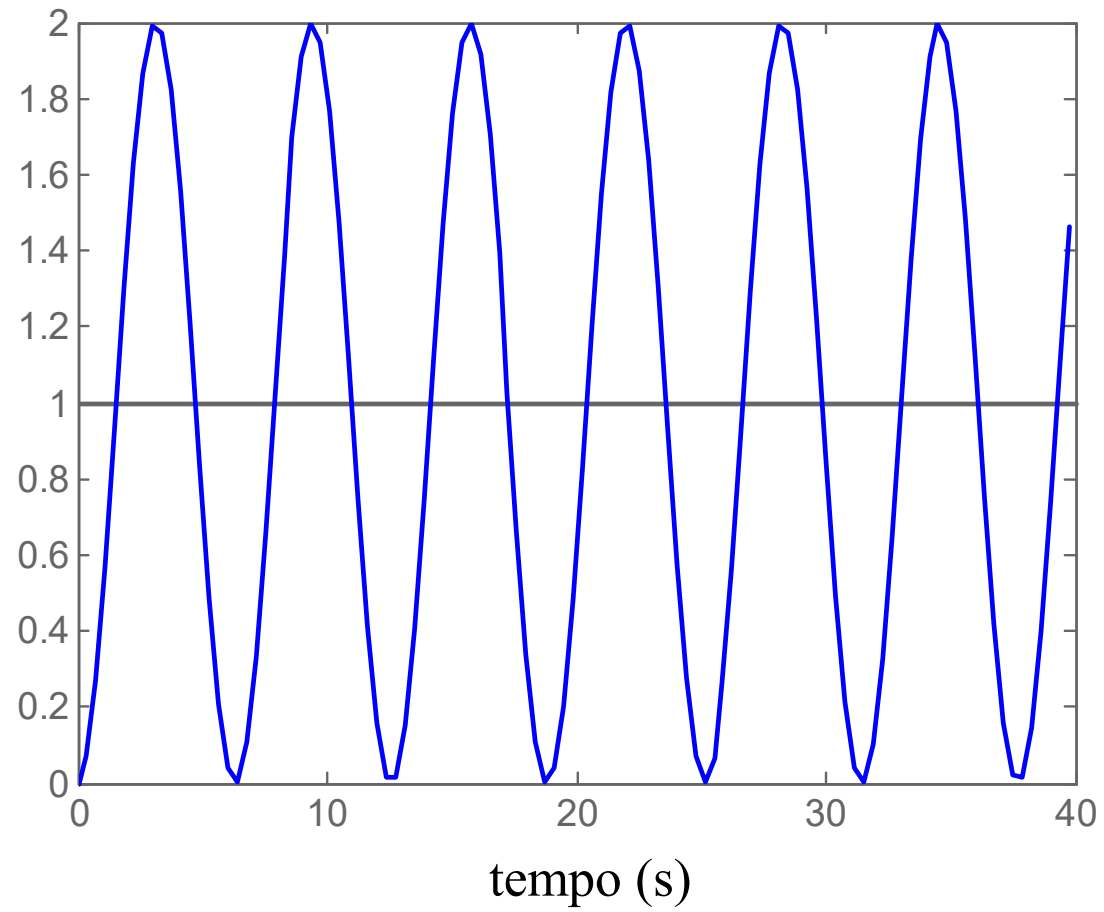
$$\zeta = 0.3$$

$$\zeta = 0.5$$

$$\zeta = 0.7$$

$$\zeta = 0.9$$

$$\xi = 0$$



Parametri caratteristici della risposta allo scalino

(in funzione di ω_n e ξ)

$$t_a \cong \frac{5}{\sigma} = \frac{5}{\xi\omega_n} \quad \text{tempo d'assestamento}$$

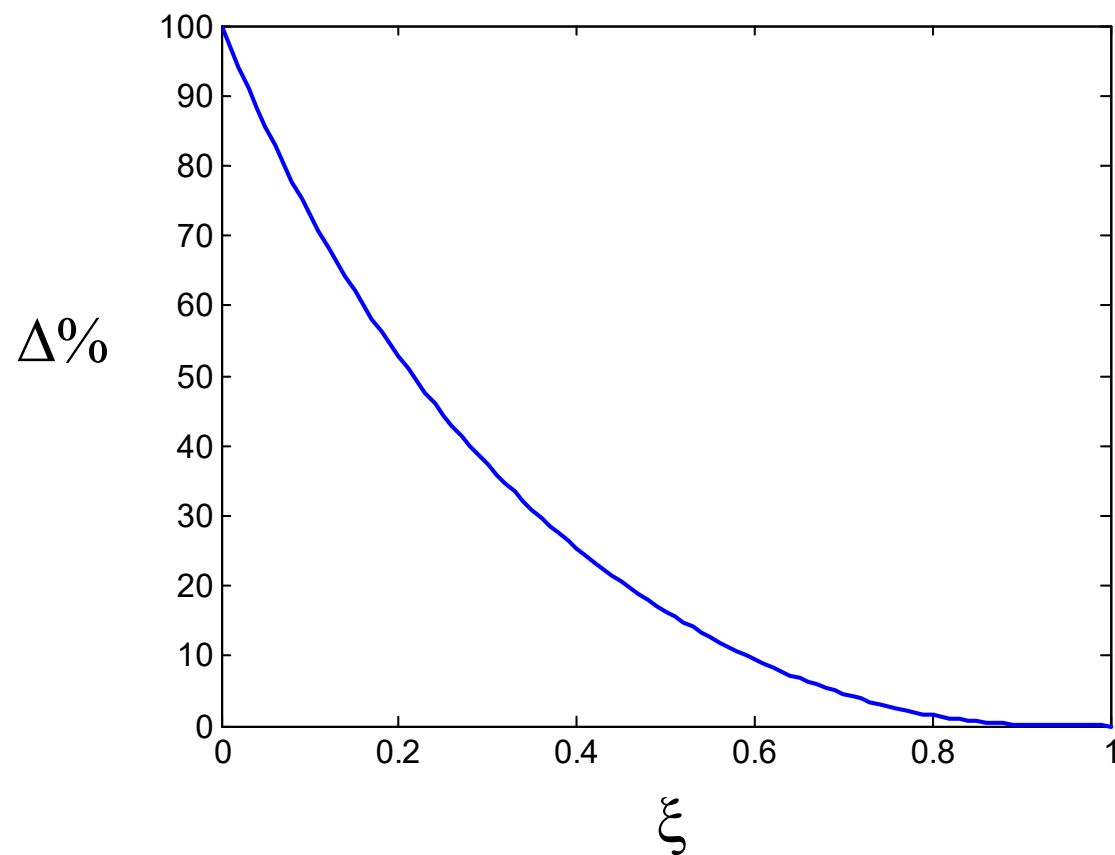
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad \text{periodo di eventuali oscillazioni}$$

$$t_p = \frac{1}{2}T = \frac{\pi}{\omega} \quad \text{tempo dell'eventuale primo picco}$$

$$y_p = \mu \left[1 + e^{-\frac{\sigma\pi}{\omega}} \right] = \mu \left[1 + e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \right] \quad \text{ampiezza dell'eventuale primo picco}$$

$$\Delta\% = 100 \frac{A}{\bar{y}} = 100 e^{-\frac{\sigma\pi}{\omega}} = 100 e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \% \quad \text{massima sovraelongazione relativa percentuale}$$

Massima sovraelongazione percentuale



$$\Delta\% = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \%$$

Esempio

$$G(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \frac{1}{1 + sRC + s^2LC}$$

FdT del circuito RLC

Pulsazione naturale : $\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

Smorzamento: $\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$

In assenza della resistenza si ha un oscillatore (smorzamento nullo)

Esempio

$$G(s) = \frac{\frac{1}{M}}{s^2 + \frac{h}{M}s + \frac{k}{M}} = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{h}{k}s + \frac{M}{k}s^2}$$

FdT del sistema massa molla
smorzatore

Pulsazione naturale : $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}}$

Smorzamento: $\xi = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{1}{Mk}}$

*In assenza di attrito si ha un
oscillatore (smorzamento nullo)*

9. Risposta allo scalino di sistemi di ordine superiore al secondo

$$G(s) = \frac{\mu \prod_{i=1}^m (1 + sT_i)}{s^g \prod_{i=1}^n (1 + s\tau_i)}$$

as.stabile \Leftrightarrow Poli a parte reale negativa
 $g \leq 0$

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t)$$

Teorema valore iniziale (con g=0)

$$y(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{G(s)}{s} \begin{cases} \rightarrow 0 & \text{se } m < n & \text{str. proprio} \\ \rightarrow \neq 0 & \text{se } m = n & \text{non str. proprio} \end{cases}$$

In generale:
$$\begin{cases} \frac{d^i y}{dt^i}(0^+) = 0 & \text{per } i = 0, \dots, r-1 \\ \frac{d^i y}{dt^i}(0^+) \neq 0 & \text{per } i \geq r \end{cases}$$

dove $r = n - m$ è il grado relativo

Teorema valore finale

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G(s)}{s} \begin{cases} \rightarrow \mu & \text{se } g = 0 \\ \rightarrow 0 & \text{se } g < 0 \end{cases}$$

10. Approssimazione a poli dominanti

$$G(s) = \frac{\mu \prod_{i=1}^m (1 + sT_i)}{s^g \prod_{i=1}^n (1 + s\tau_i)}$$

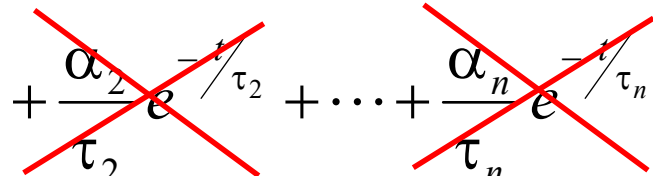
as.stabile \Leftrightarrow Poli a parte reale negativa
 $g \leq 0$

Ipotesi: poli reali distinti $\tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_n$

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{\alpha_0}{s} + \frac{\alpha_1}{1 + s\tau_1} + \frac{\alpha_2}{1 + s\tau_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{1 + s\tau_n}$$

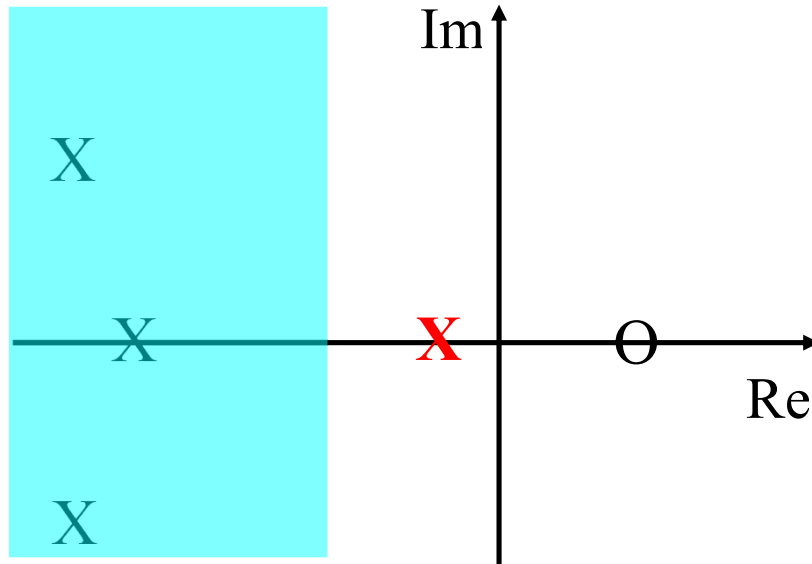
$$y(t) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} + \frac{\alpha_2}{\tau_2} e^{-t/\tau_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{\tau_n} e^{-t/\tau_n}$$

Se fosse $\tau_1 \gg \tau_2 > \dots > \tau_n$

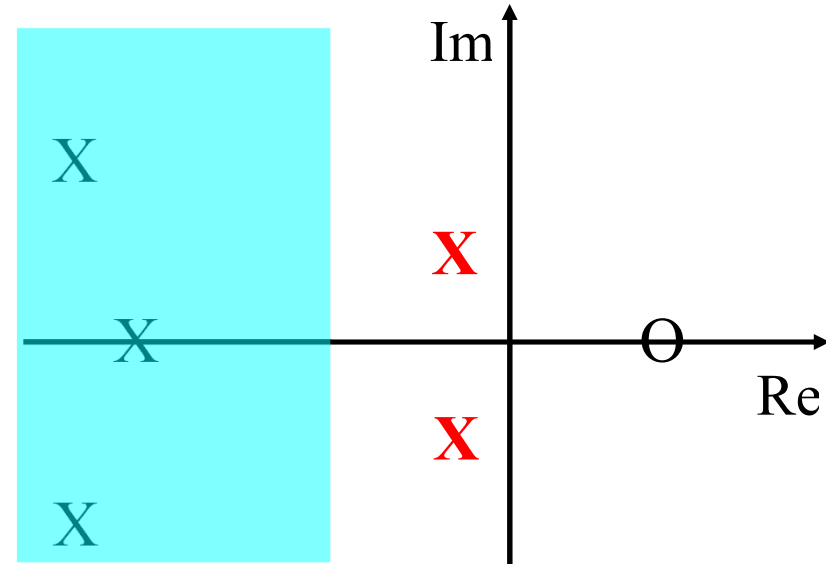
$$y(t) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} + \frac{\alpha_2}{\tau_2} e^{-t/\tau_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{\tau_n} e^{-t/\tau_n}$$


E' possibile approssimare la risposta allo scalino con quella di un sistema del I ordine con costante di tempo la più lenta fra tutte le costanti di tempo del sistema.

I poli dominanti sono quelli più vicini all'asse immaginario (poli "lenti")



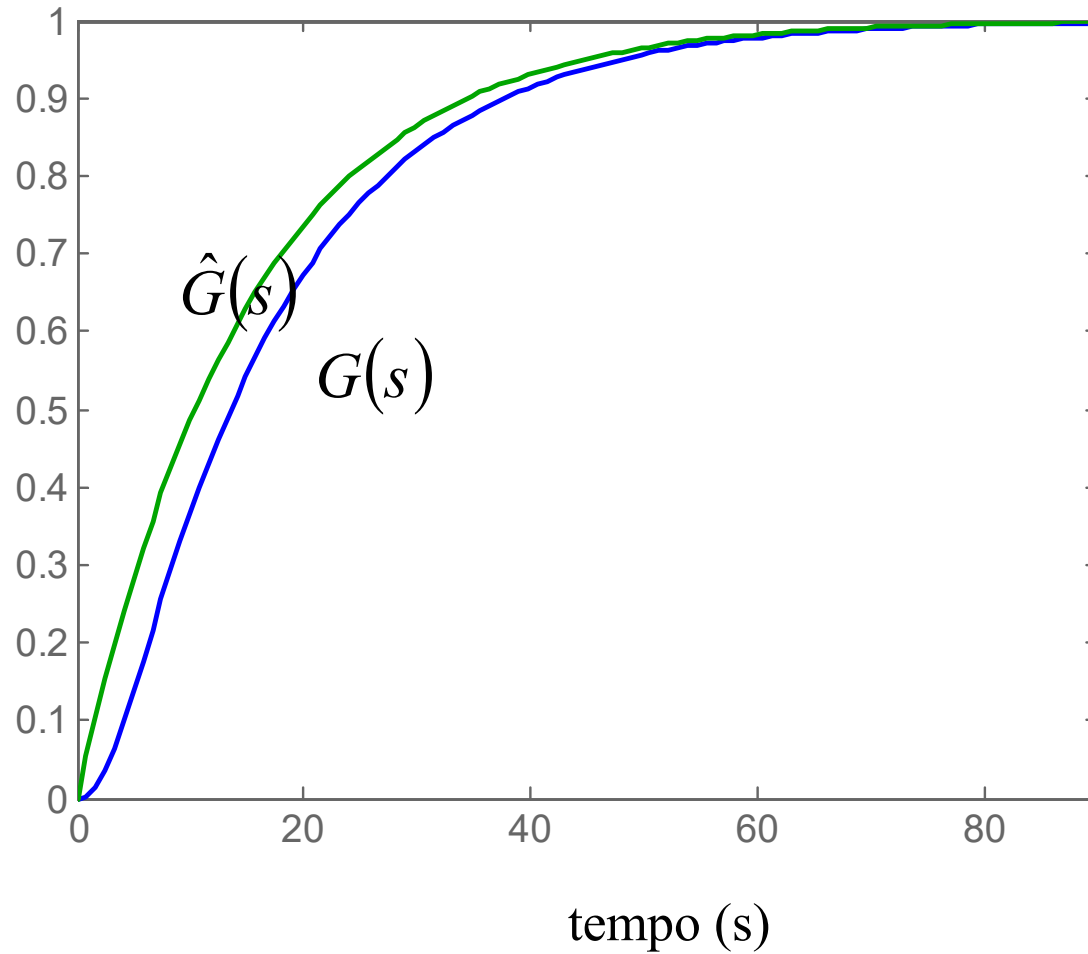
polo dominante reale



poli dominanti complessi coniugati

L'**approssimazione a poli dominanti** consiste nel considerare solo i poli dominanti (preservando il guadagno ed eventualmente il comportamento iniziale)

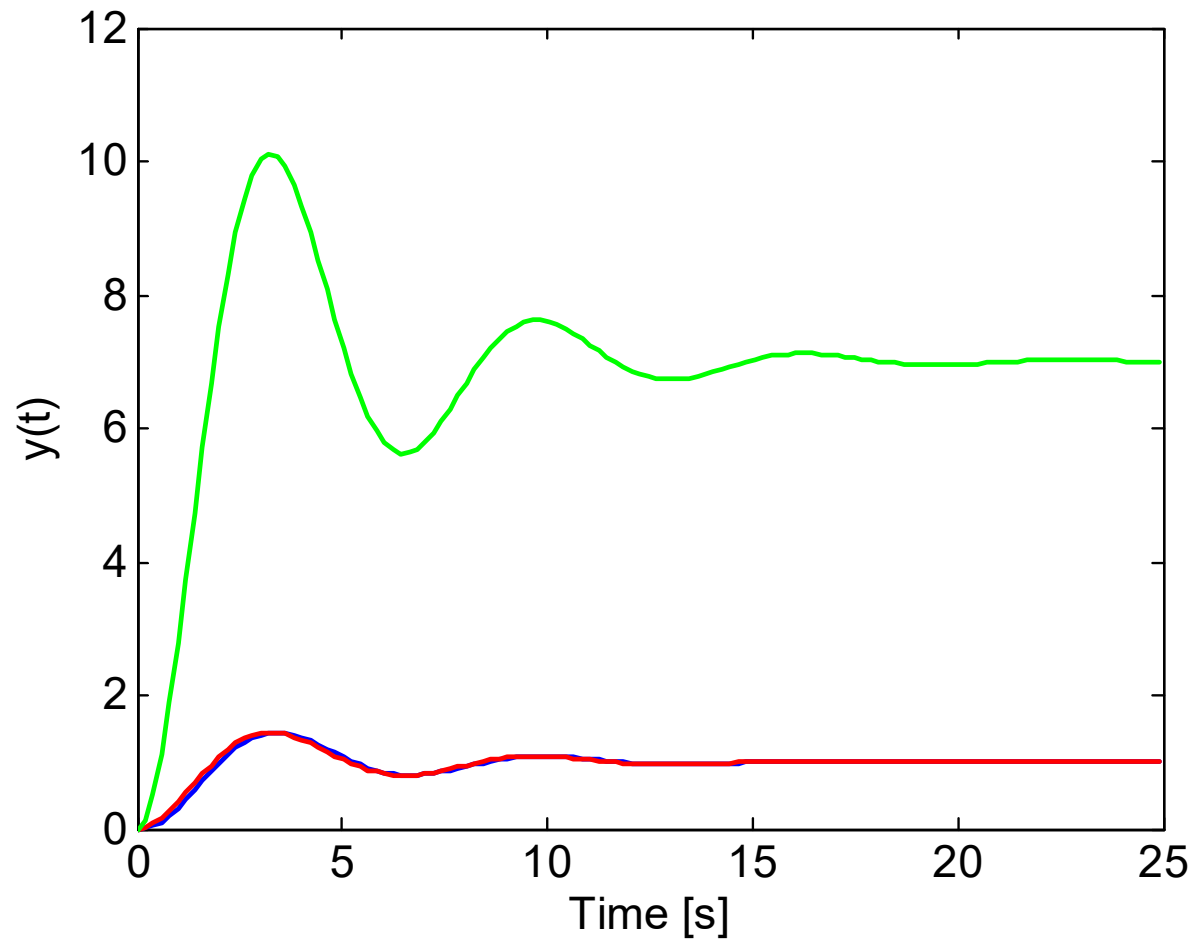
Esempio



$$G(s) = \frac{1}{(1+s)(1+2s)(1+15s)}$$

$$\hat{G}(s) = \frac{1}{(1+15s)}$$

Esempio



$$G(s) = \frac{7}{(s^2 + 0.5s + 1)(s + 7)}$$

$$\hat{G}(s) = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 1}$$

$$H(s) = \frac{7}{s^2 + 0.5s + 1}$$

**Attenzione al
guadagno!**

Esempio – Modello di Goodwin Simulazione

Risoluzione numerica di equazioni differenziali usando Matlab/Simulink (senza pretesa di esaustività, è solo un esempio).

Usiamo il comando `ode45`. La sintassi è la seguente

```
[t, y] = ode45(odefun, tspan, y0)
```

`odefun` è una Matlab function creata dall'utente, che descrive l'equazione differenziale.

`tspan` è l'intervallo di tempo su cui desidero integrare l'equazione.

`y0` è la condizione iniziale.

`t, y` sono due vettori che contengono la soluzione y al tempo t .

Come si costruisce una `odefun` per il modello di Goodwin?

E' una matlab function, che si scrive dentro un file `.m`, e che contiene l'espressione della derivata prima dell'incognita in funzione dell'incognita stessa, del tempo e di eventuali parametri.

```
function dydt=goodwin(y,t,parameters)

omega=parameters(1); eta=parameters(2);
delta=parameters(3); rho=parameters(4);

dydt(1)=omega*y(1)+eta*y(1)*y(2);
dydt(2)=delta*y(2)+rho*y(1)*y(2);
```

L'utilizzo di `ode45` è molto semplice.

Direttamente nel Workspace definiamo i valori dei parametri e li mettiamo nel vettore `parameters`, per esempio:

```
>> sigma=3; alpha=0.001; beta=0.001; rho=1; gamma=0.95;
```

Poi calcoliamo i parametri derivati:

```
>> omega=1/sigma-alpha-beta;
```

```
>> eta=-1/sigma;
```

```
>> delta=-alpha-gamma;
```

Quindi, “impacchettiamo” tutto:

```
>> parameters(1)=omega; parameters(2)=eta;
```

```
>> parameters(3)=delta; parameters(4)=rho;
```

Ovviamente, si può fare tutto “in un colpo solo”.

A questo punto bisogna scegliere delle condizioni iniziali, ricordando che le due incognite sono comprese tra 0 ed 1. Per esempio possiamo sceglierle causalmente:

```
>> y0=rand(2,1);
```

Poi scegliamo l'intervallo di tempo di integrazione, per esempio da 0 a 10 :

```
>> tspan=[0 50];
```

Quindi, calcoliamo la soluzione:

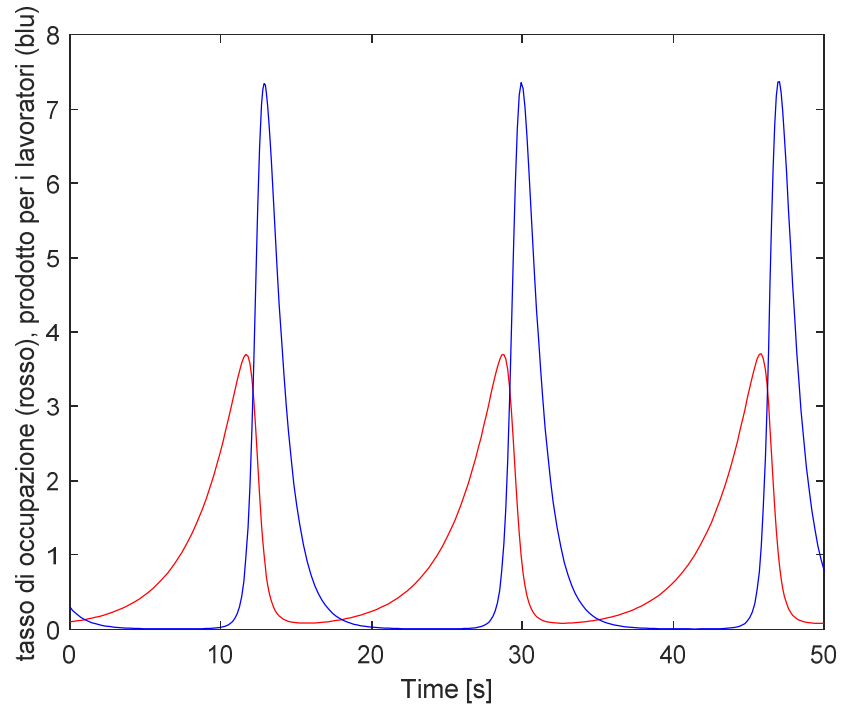
```
>> [t,y] = ode45(@(t,y) goodwin(t,y,parameters),tspan,y0);
```

Ed infine disegnare l'andamento delle soluzioni

```
>> plot(t,y(:,1),'r',t,y(:,2),'b')
```

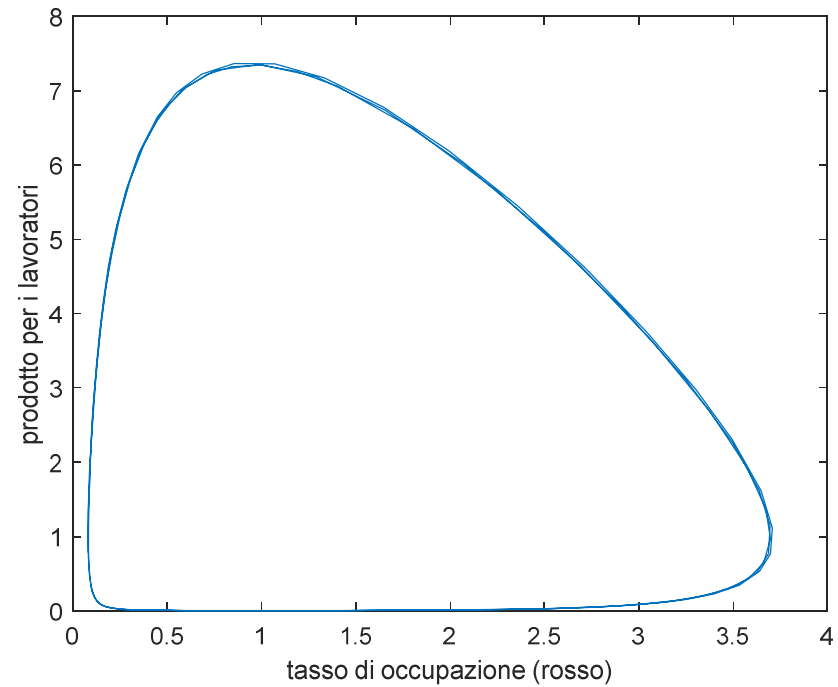
```
>> xlabel('Time [s]')
```

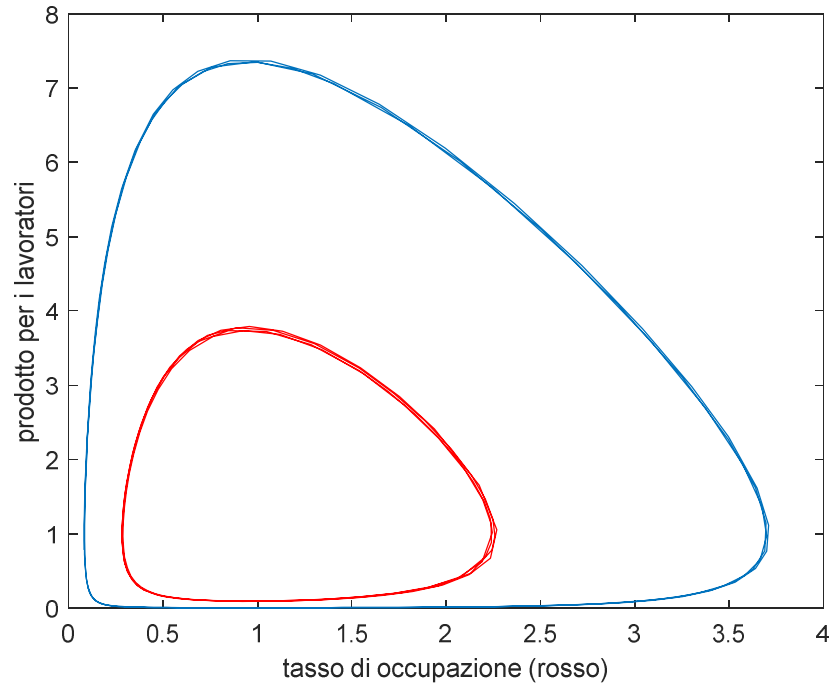
```
>> ylabel('tasso di occupazione (rosso), prodotto per i  
lavoratori (blu)')
```



Movimento del sistema
(andamento nel tempo delle soluzioni)

Diagramma delle fasi





Diagrammi delle fasi per due differenti condizioni iniziali

Nota

Si osservi che le soluzioni assumono valori superiori ad 1, fatto fisicamente non significativo. Ciò è dovuto all'approssimazione lineare del tasso di crescita dei salari.

11. Matlab

step Step response of dynamic systems.

`[Y,T] = step(SYS)` computes the step response Y of the dynamic system SYS.

For state-space models,

`[Y,T,X] = step(SYS)`

also returns the state trajectory X.

stepplot Plot step response of linear systems.

stepplot, an extension of STEP, provides a command line interface for customizing the plot appearance.

`stepplot(SYS)` plots the step response of the dynamic system SYS.

Con questi comandi si può calcolare e tracciare la **risposta allo scalino** di un sistema.

E' possibile anche calcolare la **risposta all'impulso**.

impulse Impulse response of dynamic systems.

impulse(SYS) plots the impulse response of the dynamic system SYS.