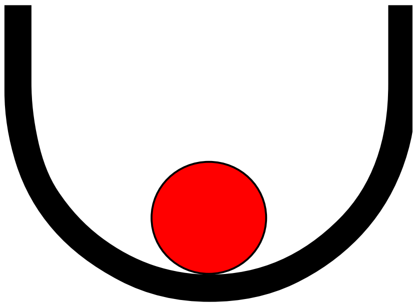
Lezione 7.
Stabilità dei sistemi dinamici Lineari Tempo Invarianti

Schema della lezione

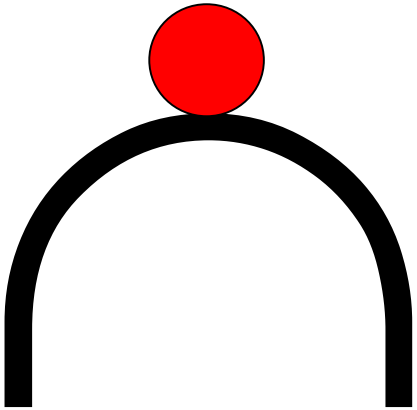
1. Stabilità dei sistemi LTI
2. Teoremi sulla stabilità dei sistemi LTI
3. Regione di asintotica stabilità
4. Classificazione dei sistemi LTI

1. Stabilità dei sistemi LTI

Due equilibri



Stabile



Instabile

- La stabilità è quella proprietà per cui un sistema, dopo una perturbazione, tende a tornare nella situazione preesistente la perturbazione.
- La stabilità è una proprietà locale (in generale), cioè si riferisce al comportamento del sistema in seguito a perturbazioni "piccole".
- Daremo una definizione intuitiva ed operativa (non rigorosa), basata sulla teoria di Lyapunov.

Esempio esplicativo (sistema I ordine)

$\dot{y}(t) - ay(t) = bu(t)$ Sistema LTI SISO del primo ordine.

Si calcoli il <u>movimento libero</u> ($u(t) = 0$) del sistema con $y(0) = y_0$

$$\dot{y}(t) - ay(t) = 0 \Rightarrow s - a = 0 \Rightarrow s = a \Rightarrow y(t) = Ce^{at}$$

$$y(0) = Ce^{a0} = y_0 \Rightarrow C = y_0 \Rightarrow \boxed{y(t) = y_0 e^{at}}$$

$\boxed{a < 0}$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{t \to \infty} y_0 e^{at} = 0$ qualsiasi sia y_0 [*il movimento libero converge a* 0]

$\boxed{a > 0}$ $\Leftrightarrow$ esiste almeno un valore di y_0 per cui $\lim_{t \to \infty} y_0 e^{at} = \infty$ [*il movimento libero diverge*]

$\boxed{a = 0}$ $\Leftrightarrow$ $y(t) = y_0$ [*il movimento libero è limitato*]

$\boxed{a < 0} \iff \lim_{t\to\infty} y_0 e^{at} = 0 \iff$ **Asintotica stabilità**

$\boxed{a > 0} \iff y_0 e^{at}$ diverge per $t \to \infty \iff$ **Instabilità**

$\boxed{a = 0} \iff y_0 e^{at}$ limitata $\forall\, t \iff$ **Stabilità**

Osservazione

Si noti che $s = a$ è l'**autovalore dell'equazione differenziale**, ma, come è noto, esso è anche il **polo della funzione di trasferimento** del sistema. Infatti:

$$sY(s) - aY(s) = bU(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{b}{s-a}U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{b}{s-a}$$

2. Teoremi sulla stabilità dei sistemi LTI

Teorema 1

Un sistema LTI è **asintoticamente stabile** se e solo se la sua FdT ha tutti i **poli con parte reale negativa**

$$\mathrm{Re}(s_i) < 0\,,\ \forall i \quad \Longleftrightarrow$$

Asintotica stabilità

Teorema 2

Un sistema LTI è **instabile** se la sua FdT ha **almeno un polo con parte reale positiva**

$$\exists\, i^* :\ \mathrm{Re}(s_{i*}) > 0 \quad \Longrightarrow$$

Instabilità

Teorema 3

Un sistema LTI è **stabile** se la sua FdT ha **tutti i poli con parte reale negativa tranne o un polo nullo o una coppia immaginaria coniugata**

$$\mathrm{Re}(s_i) \leq 0\,,\ \forall i$$

$$\exists!\, i^* :\ \mathrm{Re}(s_{i*}) = 0 \quad \Longrightarrow$$

Stabilità

Osservazione 1 (sul Teorema 3)

$\mathrm{Re}(s_i) \leq 0 \, , \forall i$
$\exists i \, : \, \mathrm{Re}(s_i) = 0$ ⇒ **non asintoticamente stabile**
(ma stabile o instabile?)

⇓

- **singolo** polo con $\mathrm{Re}(s_i) = 0$ ⇒ **semplicemente stabile**

- **più** poli con $\mathrm{Re}(s_i) = 0$
  - ⇒ **semplicemente stabile**
  - ⇒ **instabile**

? *In questo corso non si impara a trattare questo caso.*

Osservazione 2 (sul Teorema 3)

Una **coppia di poli complessi** coniugati “conta” come uno solo.

Quindi, un sistema con una sola una coppia di poli immaginari coniugati (e tutti gli altri poli a parte reale negativa) è stabile (semplicemente).

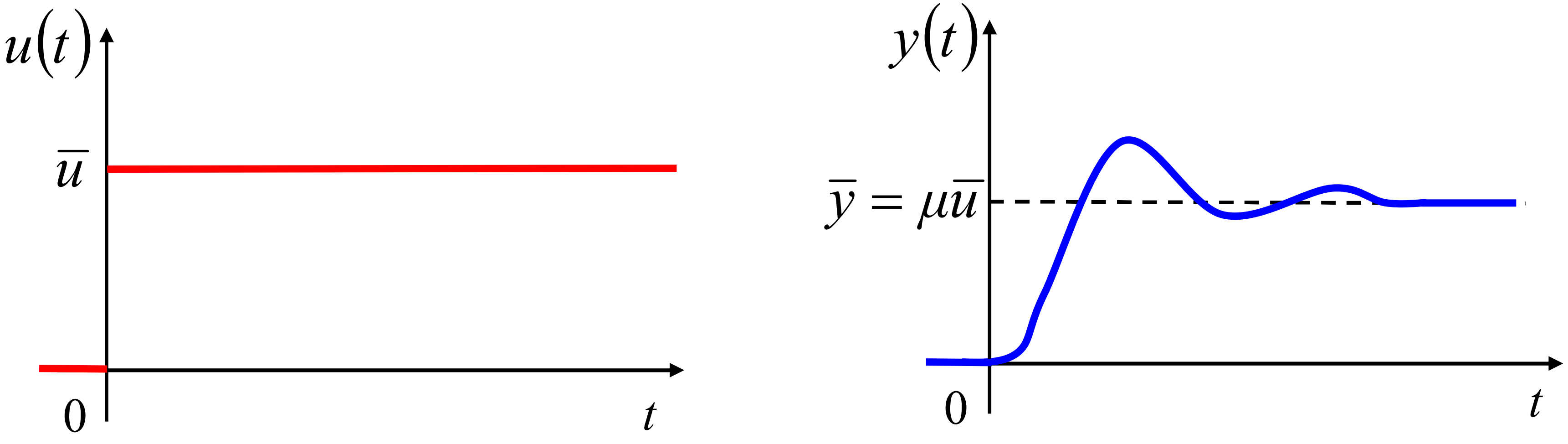
Osservazione 3 (sui Teoremi 2 & 3)

Quel che si deduce dall’Osservazione 1 è che ci sono sistemi con più di un polo a parte reale nulla (e tutti gli altri a parte reale negativa) che sono **stabili (semplicemente)** ed altri sistemi con più di un polo a parte reale nulla (e tutti gli altri a parte reale negativa) che sono **instabili**.

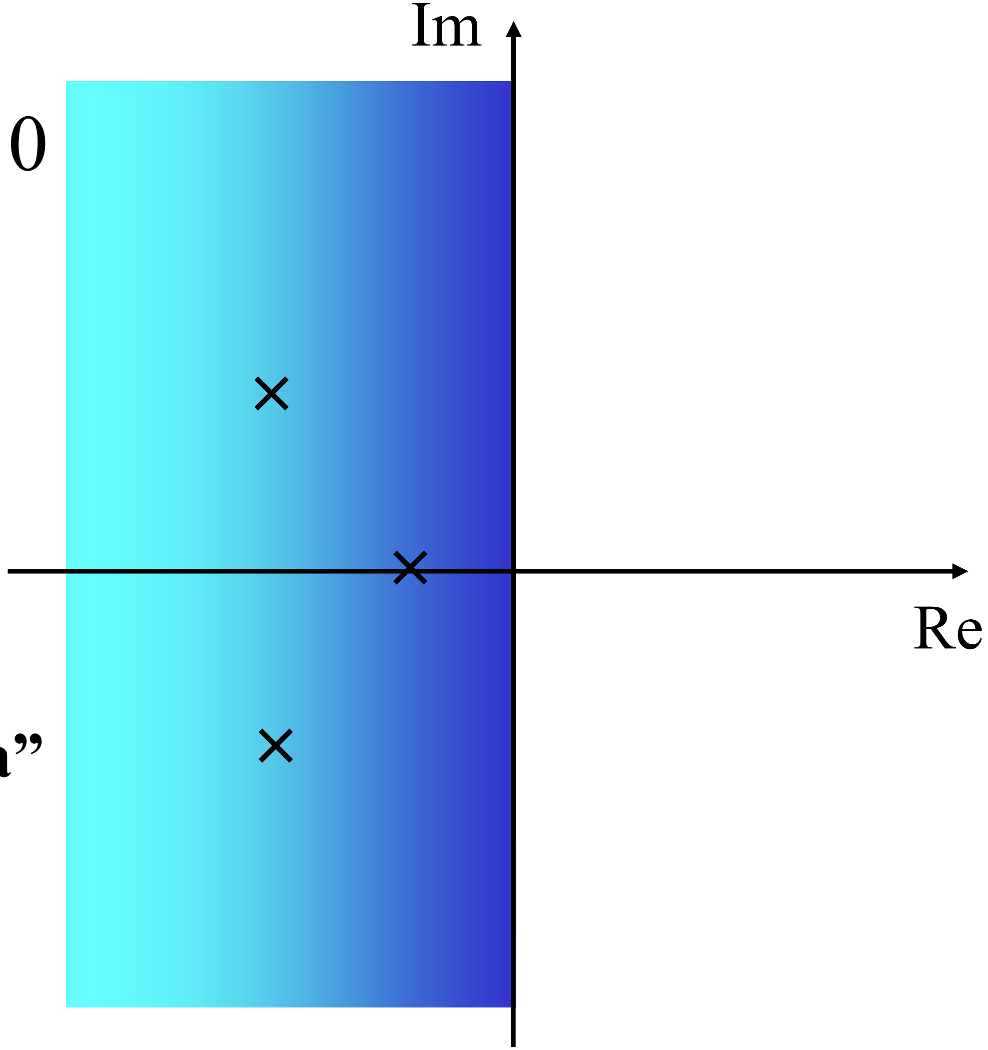
Proprietà dei sistemi LTI as. stabili

Se $u(t)=\bar{u}$ allora l'uscita di un sistema LTI as. stabile tende al valore di regime

$$\bar{y}=\mu\bar{u}$$



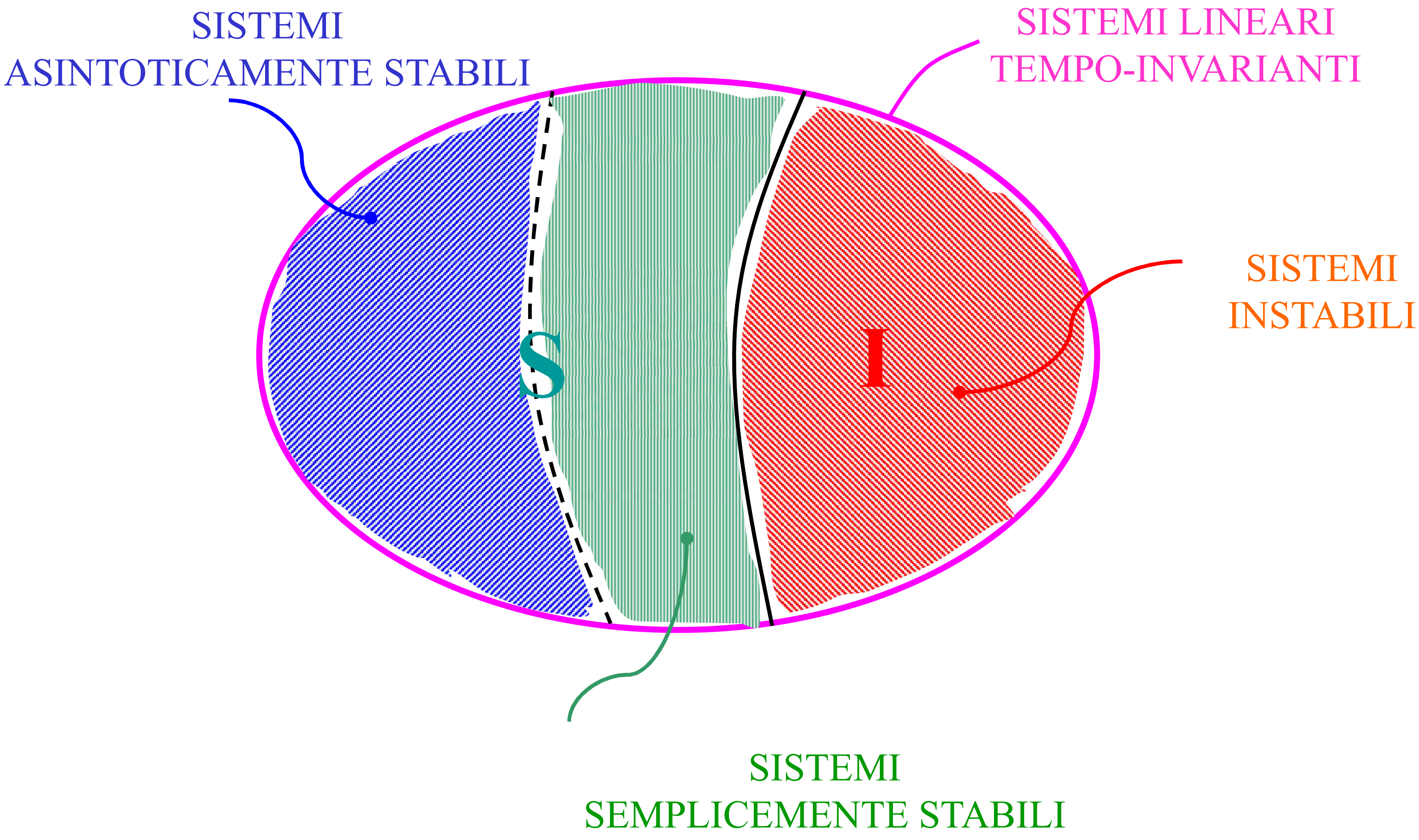
3. Regione di asintotica stabilità



$$\mathrm{Re}(s_i) < 0$$

poli “a sinistra”

4. Classificazione (in termini di stabilità) dei sistemi LTI a tempo continuo



SISTEMI ASINTOTICAMENTE STABILI

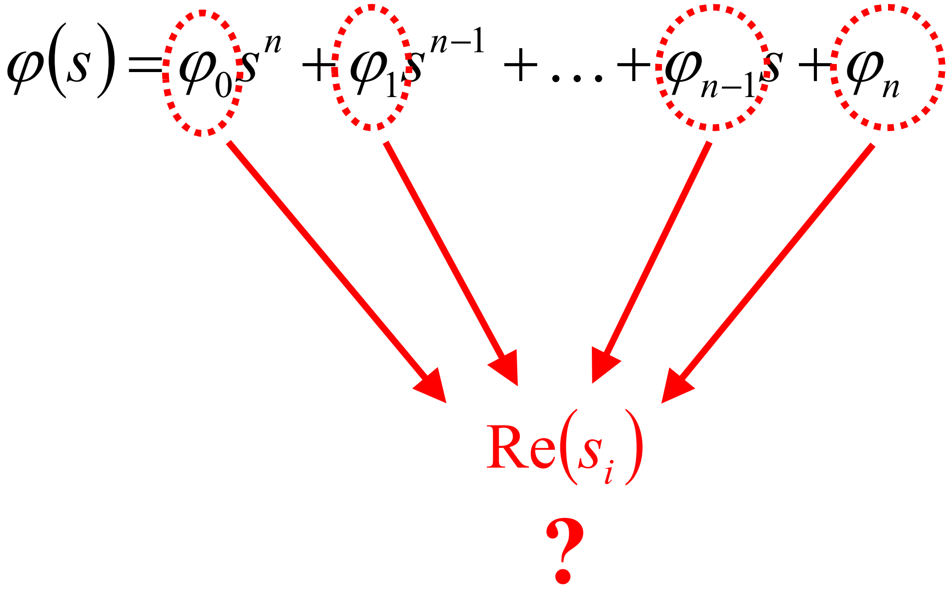
SISTEMI LINEARI TEMPO-INVARIANTI

SISTEMI INSTABILI

SISTEMI SEMPLICEMENTE STABILI

5. Criteri di stabilità basati sul polinomio caratteristico

Sono criteri basati sulla possibilità di conoscere il segno della parte reale dei poli solo ispezionando il denominatore della funzione di trasferimento (polinomio caratteristico), senza calcolare esplicitamente i poli.



$$\varphi(s)=\varphi_0 s^n+\varphi_1 s^{n-1}+\ldots+\varphi_{n-1}s+\varphi_n$$

$$\mathrm{Re}(s_i)$$

?

Criterio 1

Solo per *n*=2

Condizione Necessaria & Sufficiente per l'asintotica stabilità di un sistema del secondo ordine è che il suo polinomio caratteristico abbia coefficienti non nulli e concordi in segno

asintotica stabilità $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Re}(s_i) < 0\,,\ i = 1,2$ $\Longleftrightarrow$ $\varphi_{0,}\varphi_{1,}\varphi_2$ diversi da zero e concordi in segno

Infatti $\varphi(s) = \varphi_0 s^2 + \varphi_1 s + \varphi_2 = \varphi_0 (s - s_1)(s - s_2)$

$$\begin{cases} s_1 s_2 = \varphi_2 / \varphi_0 \\ -(s_1 + s_2) = \varphi_1 / \varphi_0 \end{cases}$$

Esempio

$\varphi(s) = s^2 + 3s + 1$ è il polinomio caratteristico di un sistema

$n=2$ **asintoticamente stabile**

$\varphi(s) = s^2 - 3s + 1$ è il polinomio caratteristico di un sistema

$n=2$ **non as. stabile**

Criterio 2

Per $n \geq 3$ qualsiasi

Condizione Necessaria per l'asintotica stabilità di un sistema è che il suo polinomio caratteristico abbia coefficienti non nulli e concordi in segno

asintotica stabilità $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}(s_i) < 0\,,\ i = 1,\ldots,n$ $\Rightarrow$ φ_i diversi da zero e concordi in segno

(Condizione solo necessaria)

Quindi:

φ_i nulli o discordi in segno $\Rightarrow$ $\exists\ i^*:\ \mathrm{Re}(s_{i^*}) \geq 0$

Esempio

$\varphi(s) = s^3 + 2s^2 - 3s + 1$ è il polinomio caratteristico di un sistema

n=3 **non as. stabile**

$\varphi(s) = s^3 + 4s^2 + 1$ è il polinomio caratteristico di un sistema

n=3 **non as. stabile**

$\varphi(s) = s^3 + 4s^2 + 4s + 1$ è il polinomio caratteristico di un sistema di cui nulla si può dire a priori riguardo la stabilità

n=3

Criterio 3 (Criterio di Routh)

$$\varphi(s)=\varphi_0 s^n+\varphi_1 s^{n-1}+\varphi_2 s^{n-2}+\varphi_3 s^{n-3}\ldots+\varphi_n$$

Tabella di Routh

$$\text{n+1 righe}\;\boxed{\begin{array}{c}1\\2\\\vdots\\i-2\\i-1\\i\\\vdots\end{array}}\qquad\begin{array}{ccccccl}\varphi_0&\varphi_2&\varphi_4&\ldots&0&\longleftarrow&\text{Coefficienti pari}\\\varphi_1&\varphi_3&\varphi_5&\ldots&0&\longleftarrow&\text{Coefficienti dispari}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&&\\h_1&h_2&h_3&\ldots&0&&\\k_1&k_2&k_3&\ldots&0&&\\l_1&l_2&l_3&\ldots&0&&\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&&\end{array}$$

Regola di calcolo

$$l_j=-\frac{1}{k_1}\det\begin{bmatrix}h_1&h_{j+1}\\k_1&k_{j+1}\end{bmatrix}$$

Criterio di Routh

asintotica stabilità $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Re}(s_i) < 0\ ,\ \forall i$ $\Longleftrightarrow$ Elementi della prima colonna della tabella di Routh diversi da zero e concordi in segno

Esempio

$$\varphi(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + k$$

Per quali valori di k è asintoticamente stabile?

Per il criterio 2 C.N. è $k > 0$

Tabella di Routh

$$\begin{array}{ccc}
1 & 11 & k \\
6 & 6 & 0 \\
10 & k & 0 \\
6 - \frac{3}{5}k & 0 & 0 \\
k & 0 & 0
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{cases} 6 - \frac{3}{5}k > 0 \\ k > 0 \end{cases}
\quad \Rightarrow \quad
0 < k < 10$$

Modello di Goodwin - Linearizzazione

Il procedimento di linearizzazione, nella teoria dei sistemi, serve a calcolare un **modello lineare approssimante per un modello non lineare**.

Tale modello lineare viene calcolato «vicino» ad un equilibrio del sistema non lineare ed è una «buona» approssimazione solo «vicino» all'equilibrio.

Il procedimento di calcolo del modello lineare è molto semplice.

Dato un sistema non lineare

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{y}(t), u(t)\big)$$

dotato di un equilibrio $\bar{\boldsymbol{y}}$ in corrispondenza di un un ingresso $\bar{u}$, cioè tale per cui $f(\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{u}) = 0$, è possibile ottenere il modello linearizzato calcolando lo Jacobiano della funzione vettoriale $\boldsymbol{f}$ rispetto al vettore $\boldsymbol{y}$ (ed a u). Il modello ottenuto sarà un modello «alle piccole variazioni», valido quindi vicino all'equilibrio considerato.

Nel caso in esame, quindi, in cui è l'ingresso u è assente, bisognerà calcolare le derivate delle due equazioni del modello rispetto alle due variabili x_1 e x_2 e valutarle nell'equilibrio di cui sopra, ottenendo così una matrice A 2x2.

Il modello non lineare è

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) = \omega x_1(t) + \eta x_1(t)x_2(t) \equiv f_1\big(x_1(t), x_2(t)\big) \\ \dot{x}_2(t) = \delta x_2(t) + \rho x_1(t)x_2(t) \equiv f_2\big(x_1(t), x_2(t)\big)\end{cases}$$

e quindi il sistema linearizzato sarà descritto dall'equazione lineare

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = A\boldsymbol{\xi}(t)$$

dove $\boldsymbol{\xi}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) - \bar{x}_1 \\ x_2(t) - \bar{x}_2 \end{bmatrix}$ è lo stato del sistema linearizzato («piccole variazioni») e

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{x_1} & \frac{\partial f_1}{x_2} \\ \frac{\partial f_2}{x_1} & \frac{\partial f_2}{x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} = \begin{bmatrix} \omega + \eta\bar{x}_2 & \eta\bar{x}_1 \\ \rho\bar{x}_2 & \delta + \rho\bar{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega + \eta\left(-\frac{\omega}{\eta}\right) & \eta\left(-\frac{\delta}{\rho}\right) \\ \rho\left(-\frac{\omega}{\eta}\right) & \delta + \rho\left(-\frac{\delta}{\rho}\right) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \eta\left(-\frac{\delta}{\rho}\right) \\ \rho\left(-\frac{\omega}{\eta}\right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\alpha+\gamma}{\sigma\rho} \\ \rho[1 - (\alpha + \beta)\sigma] & 0 \end{bmatrix}$$

Stabilità del sistema linearizzato

Calcoliamo le soluzioni del polinomio caratteristico della matrice A

$$det(sI - A) = det\begin{bmatrix} s & \frac{\delta\eta}{\rho} \\ \frac{\omega\rho}{\eta} & s \end{bmatrix} = s^2 - \delta\omega$$

Si ha che $\delta = -(\alpha + \gamma) < 0$, mentre $\omega = \frac{1}{\sigma} - \alpha - \beta$ è positivo se $\frac{1}{\sigma} > \alpha + \beta$, condizione sempre verificata perché deve essere $(\alpha + \beta)\sigma \leq 1$.

Quindi $\delta\omega < 0$ e gli autovalori della matrice A sono immaginari puri:

$$s^2 - \delta\omega = s^2 + |\delta|\omega = 0$$

$$s_{1,2} = \pm j\theta$$

dove $\theta = \sqrt{-\delta\omega}$ è la **frequenza propria naturale** del sistema.

Il sistema linearizzato è quindi **semplicemente stabile** (Cfr Lez. 7).

Nulla si può dire della stabilità del corrispondente equilibrio del sistema non lineare.

Movimento dello stato del sistema linearizzato

Il modello linearizzato è

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = A\boldsymbol{\xi}(t)$$

Applichiamo la trasformazione di Laplace ad entrambi i membri

$$s\boldsymbol{Z}(s) - \boldsymbol{\xi}(0) = A\boldsymbol{Z}(s)$$

$$(sI - A)\boldsymbol{Z}(s) = \boldsymbol{\xi}(0)$$

$$\boldsymbol{Z}(s) = (sI - A)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\xi}(0)$$

Calcoliamo $(sI - A)^{-\mathbf{1}}$

$$(sI - A)^{-\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} s & \dfrac{\delta\eta}{\rho} \\ \dfrac{\omega\rho}{\eta} & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{det(sI - A)} \begin{bmatrix} s & -\dfrac{\delta\eta}{\rho} \\ -\dfrac{\omega\rho}{\eta} & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s}{s^2 + \theta^2} & \dfrac{-\dfrac{\delta\eta}{\rho}}{s^2 + \theta^2} \\ \dfrac{-\dfrac{\omega\rho}{\eta}}{s^2 + \theta^2} & \dfrac{s}{s^2 + \theta^2} \end{bmatrix}$$

Quindi, data una condizione iniziale per lo stato $\boldsymbol{\xi}(0) = \begin{bmatrix} \xi_{10} \\ \xi_{20} \end{bmatrix}$ si ha

$$\boldsymbol{Z}(s) = (sI - A)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\xi}(0) = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+\theta^2} & \frac{-\frac{\delta\eta}{\rho}}{s^2+\theta^2} \\ \frac{-\frac{\omega\rho}{\eta}}{s^2+\theta^2} & \frac{s}{s^2+\theta^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{10} \\ \xi_{20} \end{bmatrix}$$

Quindi

$$Z_1(s) = \frac{s}{s^2+\theta^2}\xi_{10} + \frac{-\frac{\delta\eta}{\rho}}{s^2+\theta^2}\xi_{20} = \xi_{10}\boxed{\frac{s}{s^2+\theta^2}} - \xi_{20}\frac{\eta}{\rho}\sqrt{\frac{-\delta}{\omega}}\boxed{\frac{\theta}{s^2+\theta^2}}$$

$$Z_2(s) = \frac{-\frac{\omega\rho}{\eta}}{s^2+\theta^2}\xi_{10} + \frac{s}{s^2+\theta^2}\xi_{20} = \xi_{20}\boxed{\frac{s}{s^2+\theta^2}} - \xi_{10}\frac{\rho}{\eta}\sqrt{\frac{\omega}{-\delta}}\boxed{\frac{\theta}{s^2+\theta^2}}$$

da cui, antitrasformando, si ottiene il movimento dello stato del sistema linearizzato

$$\boxed{\begin{aligned} \xi_1(t) &= \xi_{10}cos(\theta t) - \xi_{20}\varepsilon sin(\theta t) \\ \xi_2(t) &= \xi_{20}cos(\theta t) - \frac{\xi_{10}}{\varepsilon}sin(\theta t) \end{aligned}}$$