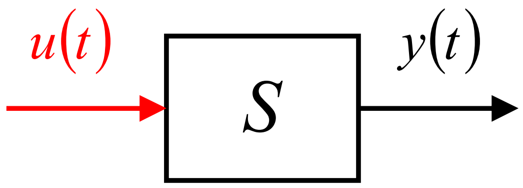
Lezione 6.
Funzione di trasferimento

Schema della lezione

1. Definizione (operativa)
2. Interpretazione della funzione di trasferimento
3. Funzione di trasferimento: poli e zeri
4. Funzione di trasferimento: parametrizzazioni
5. Guadagno statico e guadagno di una funzione di trasferimento

1. Definizione (operativa)



Sistema LTI SISO

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \frac{d^i u(t)}{dt^i} \qquad \alpha_n = 1$$

$$y_0 = y_{1,0} = \cdots = y_{n-1,0} = 0$$

condizioni iniziali nulle

Si effettui la trasformata di Laplace di entrambi i membri dell'equazione

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i s^i Y(s) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i s^i U(s)$$

$$\left(s^n + \ldots + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0\right) Y(s) = \left(\beta_m s^m + \ldots + \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0\right) U(s)$$

Si definisce **funzione di trasferimento** il rapporto tra le trasformate di Laplace dell'uscita e dell'ingresso (con <u>condizioni iniziali nulle</u>).

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \boxed{\frac{\beta_m s^m + \ldots + \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \ldots + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}}$$

Funzione di trasferimento

da cui $Y(s) = G(s)U(s)$

2. Interpretazione della funzione di trasferimento

Si consideri un sistema con funzione di trasferimento $G(s)$

Siano $u(t) = \mathrm{imp}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = 1$

condizioni iniziali nulle

Allora

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)$$

La funzione di trasferimento è la trasformata di Laplace della risposta all'impulso del sistema

Esempio 1

$\dot{y}(t) + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{1}{RC} u(t)$ Equazione del circuito RC

$$sY(s) + \frac{1}{RC} Y(s) = \frac{1}{RC} U(s)$$

$$\left(s + \frac{1}{RC}\right) Y(s) = \frac{1}{RC} U(s)$$

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} U(s)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}}$$

Esempio 2

$$\dot{y}(t)+\frac{k}{A}y(t)=\frac{k}{A}u(t)$$ Equazione del serbatoio

$$sY(s)+\frac{k}{A}Y(s)=\frac{k}{A}U(s)$$

$$\left(s+\frac{k}{A}\right)Y(s)=\frac{k}{A}U(s)$$

$$Y(s)=\frac{\frac{k}{A}}{s+\frac{k}{A}}U(s)$$

$$\boxed{G(s)=\frac{\frac{k}{A}}{s+\frac{k}{A}}}$$

Esempio 3

$$\dot{y}(t) + \frac{k}{C}y(t) = \frac{1}{C}u(t)$$ Equazione del forno

$$sY(s)+\frac{k}{C}Y(s)=\frac{1}{C}U(s)$$

$$\left(s+\frac{k}{C}\right)Y(s)=\frac{1}{C}U(s)$$

$$Y(s)=\frac{\frac{1}{C}}{s+\frac{k}{C}}U(s)$$

$$\boxed{G(s)=\frac{\frac{1}{C}}{s+\frac{k}{C}}}$$

Esempio 4

$$\ddot{y}(t) + \frac{R}{L}\dot{y}(t) + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{LC}u(t)$$ Equazione del circuito RLC

$$s^2Y(s) + \frac{R}{L}sY(s) + \frac{1}{LC}Y(s) = \frac{1}{LC}U(s)$$

$$\left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}\right)Y(s) = \frac{1}{LC}U(s)$$

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}U(s)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}}$$

Esempio 5

$$\ddot{y}(t) + \frac{h}{M}\dot{y}(t) + \frac{k}{M}y(t) = \frac{1}{M}u(t)$$ Equazione massa molla smorzatore

$$s^2Y(s) + \frac{h}{M}sY(s) + \frac{k}{M}Y(s) = \frac{1}{M}U(s)$$

$$\left(s^2 + \frac{h}{M}s + \frac{k}{M}\right)Y(s) = \frac{1}{M}U(s)$$

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{M}}{s^2 + \frac{h}{M}s + \frac{k}{M}}U(s)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{\frac{1}{M}}{s^2 + \frac{h}{M}s + \frac{k}{M}}}$$

Proprietà

$G(s)$ è sempre razionale $\qquad G(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}$

$$D(s)=s^n+\ldots+\alpha_2 s^2+\alpha_1 s+\alpha_0=\varphi(s)$$

è il **polinomio caratteristico** $\varphi(s)$ dell'equazione omogenea. Le radici dell'**equazione caratteristica** $\varphi(s)=0$ sono gli **autovalori**.

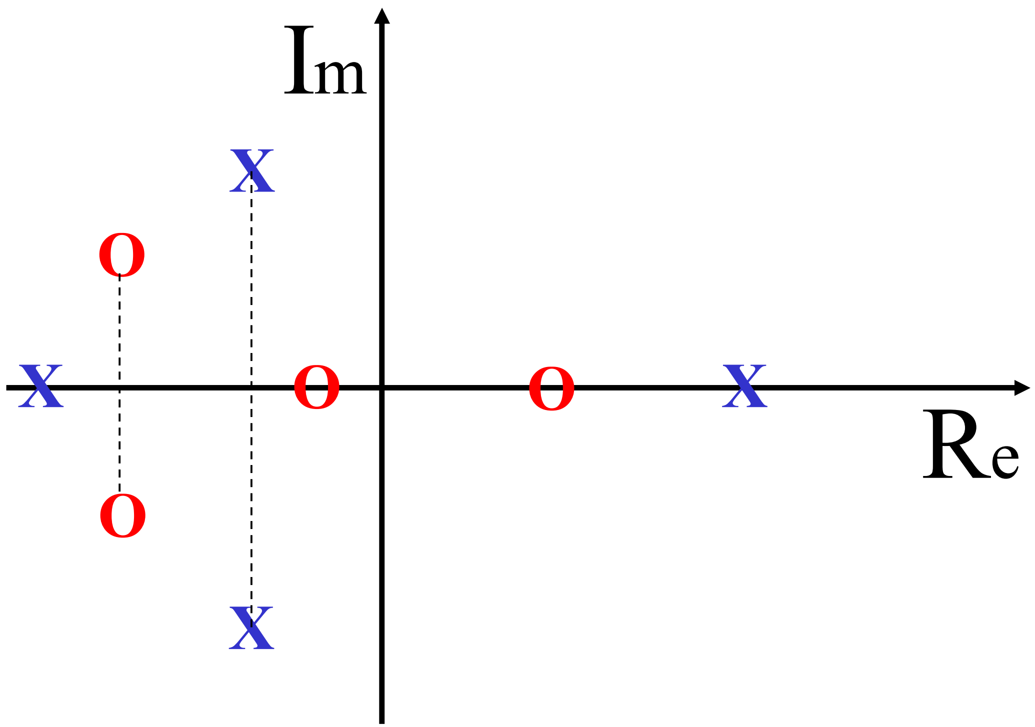
$N(s)$ è un polinomio in s di grado $m \leq n$

3. Funzione di trasferimento : poli e zeri

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

O Zeri : radici di $N(s) = 0$

X Poli : radici di $D(s) = 0$



Proprietà

I **poli** della funzione di trasferimento sono tutti **autovalori**.

Il **numero di zeri è inferiore, al più uguale, al numero di poli**.

Se il numero di zeri è strettamente inferiore al numero di poli, il sistema LTI si dice **strettamente proprio**.

Altrimenti, si dice **proprio**.

4. Funzione di trasferimento : parametrizzazioni

1. $$G(s)=\frac{\beta_m s^m+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{\alpha_n s^n+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0}$$

parametri: β_i, α_i

2. $$G(s)=\rho\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=\rho\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

parametri: ρ costante di trasferimento

z_i zeri p_i poli

3. $$G(s)=\frac{\mu}{s^g}\frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)}$$

parametri: μ guadagno della FdT

T_i , τ_i costanti di tempo

g tipo

Osservazione – Relazione tra la 2 e la 3

$$G(s) = \rho \frac{\prod_i (s - z_i)}{\prod_i (s - p_i)} = \frac{\rho}{s^g} \frac{\prod_i z_i \left(\frac{s}{z_i} - 1 \right)}{\prod_i p_i \left(\frac{s}{p_i} - 1 \right)} =$$

$$= \frac{1}{s^g} \underbrace{\rho \frac{\prod_i (-z_i)}{\prod_i (-p_i)}}_{\mu} \frac{\prod_i \left(1 - \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_i \left(1 - \frac{s}{p_i} \right)} = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)}$$

dove $-\frac{1}{z_i} = T_i \quad -\frac{1}{p_i} = \tau_i$

Esempio

$$G(s)=\frac{5s^2+35s+50}{s^2+10s+21}$$ è nella forma 1 $$\begin{cases}\beta_0=50,\beta_1=35,\beta_2=5\\ \alpha_0=21,\alpha_1=10,\alpha_2=1\end{cases}$$

Calcolando poli e zeri è possibile metterla nella forma 2

$$G(s)=\frac{5s^2+35s+50}{s^2+10s+21}=\frac{5(s+2)(s+5)}{(s+3)(s+7)}\qquad\begin{cases}\rho=5\\ z_1=-2,z_2=-5\\ p_1=-3,p_2=-7\end{cases}$$

Raccogliendo z_i e p_i si può passare alla forma 3

$$G(s)=\frac{5(s+2)(s+5)}{(s+3)(s+7)}=\frac{5\cdot5\cdot2\left(\frac{1}{2}s+1\right)\left(\frac{1}{5}s+1\right)}{3\cdot7\left(\frac{1}{3}s+1\right)\left(\frac{1}{7}s+1\right)}=\frac{\frac{50}{21}\left(1+\frac{1}{2}s\right)\left(1+\frac{1}{5}s\right)}{\left(1+\frac{1}{3}s\right)\left(1+\frac{1}{7}s\right)}$$

$$\mu=\frac{50}{21},T_1=\frac{1}{2},T_2=\frac{1}{5},\tau_1=\frac{1}{3},\tau_2=\frac{1}{7},g=0$$

5. Guadagno statico e guadagno di una funzione di trasferimento

C’è una relazione tra guadagno della funzione di trasferimento e guadagno statico?

Se $g = 0$

il guadagno statico del sistema è uguale al guadagno della funzione di trasferimento.

$$\boxed{\mu = G(0)}$$

Se $g \neq 0$

il guadagno della funzione di trasferimento si calcola così:

$$\mu = \lim_{s \to 0} s^g G(s)$$

Si dice **guadagno “generalizzato”** della funzione di trasferimento e non ha alcuna relazione con il guadagno statico del sistema.

Osservazione

Perché nel caso $g = 0$ il guadagno statico può essere calcolato come $\mu = G(0)$?

Il sistema è descritto dall'equazione differenziale

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \frac{d^i u(t)}{dt^i} \qquad \alpha_n = 1$$

che nel dominio delle trasformate diventa

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i s^i Y(s) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i s^i U(s) \quad \alpha_n = 1$$

Per il calcolo dell'equilibrio si annullano le derivate di ingresso ed uscita. Ciò equivale a porre $s = 0$ nel dominio delle trasformate.

Esempio

Sistema 1

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 21y(t) = \dot{u}(t) + 8u(t)$$

$$u(t) = \bar{u} \quad \Rightarrow \quad 21\bar{y} = 8\bar{u} \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = \frac{8}{21}$$

guadagno statico del sistema

Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema

$$G(s) = \frac{s+8}{s^2+5s+21} \xrightarrow{\text{forma 3}} G(s) = \underbrace{\frac{8}{21}}_{\mu} \frac{1+\frac{1}{8}s}{1+\frac{5}{21}s+\frac{1}{21}s^2}$$

$\boxed{g=0}$

guadagno della funzione di trasferimento

Sistema 2

$$\ddot{y}(t) + 14\dot{y}(t) + 40y(t) = 4\ddot{u}(t) + 32\dot{u}(t)$$

$$u(t) = \bar{u} \quad \Rightarrow \quad 40\bar{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = 0$$

guadagno statico del sistema

Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema

$\boxed{g<0}$

$$G(s) = \frac{4s^2 + 32s}{s^2 + 14s + 40} \xRightarrow{\text{forma 2}} \frac{4s(s+8)}{(s+4)(s+10)} \xRightarrow{\text{forma 3}} \frac{\frac{4}{5}s\left(1+\frac{1}{8}s\right)}{\left(1+\frac{1}{4}s\right)\left(1+\frac{1}{10}s\right)}$$

μ **guadagno (generalizzato) della funzione di trasferimento**

Infatti: $\mu = \lim_{s \to 0} s^g G(s) = \frac{4}{5}$

Sistema 3

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) = 4\dot{u}(t) + 32u(t)$$

$$u(t) = \bar{u} \Rightarrow 0 = 32\bar{u} \Rightarrow \text{Per } \bar{u} \neq 0 \quad \nexists\, \mu$$

Il guadagno statico del sistema non è definito

Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema

$$G(s) = \frac{4s+32}{s^2+4s} \xRightarrow{\text{forma 2}} \frac{4(s+8)}{s(s+4)} \xRightarrow{\text{forma 3}} \frac{8\left(1+\frac{1}{8}s\right)}{s\left(1+\frac{1}{4}s\right)} \quad \boxed{g>0}$$

μ **guadagno (generalizzato) della funzione di trasferimento**

Infatti: $\mu = \lim_{s\to 0} s^g G(s) = 8$

Esempio 1

$$G(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{1}{1 + sRC}$$ FdT del circuito RC

Poli: $s = -\frac{1}{RC}$ Costante di tempo del polo: $\tau = RC$

Zeri: no

Tipo: $g = 0$

Guadagno: $\mu = G(0) = 1$

Esempio 2

$$G(s)=\frac{\frac{k}{A}}{s+\frac{k}{A}}=\frac{k}{As+k}=\frac{1}{1+s\frac{A}{k}}$$ FdT del serbatoio

Poli: $s=-\frac{k}{A}$ Costante di tempo del polo: $\tau=\frac{A}{k}$

Zeri: no

Tipo: $g=0$

Guadagno: $\mu=G(0)=1$

Esempio 3

$$G(s)=\frac{\frac{1}{C}}{s+\frac{k}{C}}=\frac{1}{sC+k}=\frac{\frac{1}{k}}{1+s\frac{C}{k}}$$ FdT del forno

Poli: $s=-\frac{k}{C}$ Costante di tempo del polo: $\tau=\frac{C}{k}$

Zeri: no

Tipo: $g=0$

Guadagno: $\mu=G(0)=\frac{1}{k}$

Esempio 4

$$G(s)=\frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}=\frac{1}{1+sRC+s^2LC}$$ FdT del circuito RLC

Poli: $s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\frac{R}{2L}\sqrt{1-\frac{4L}{R^2C}}$

I poli sono complessi coniugati se: $R^2C-4L<0$

I poli sono immaginari se: $R=0$

e valgono $s_{1,2}=\pm j\sqrt{\frac{1}{LC}}$

Zeri: no

Tipo: $g=0$

Guadagno: $\mu=G(0)=1$

Esempio 5

$$G(s) = \frac{\frac{1}{M}}{s^2 + \frac{h}{M}s + \frac{k}{M}} = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{h}{k}s + \frac{M}{k}s^2}$$

FdT del sistema massa molla smorzatore

Poli: $s_{1,2} = -\frac{h}{2M} \pm \frac{h}{2M}\sqrt{1 - \frac{4kM}{h^2}}$

I poli sono complessi coniugati se: $h^2 - 4kM < 0$

I poli sono immaginari se: $h = 0$ e valgono

$$s_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{k}{M}}$$

Zeri: no

Tipo: $g = 0$

Guadagno: $\mu = G(0) = \frac{1}{k}$

10. Matlab

Con questo comando possiamo definire una funzione di trasferimento nella «forma 1» (specificando i coefficienti dei polinomi a numeratore e a denominatore).

```
tf  Construct transfer function or convert to transfer function.

   Construction:
     SYS = tf(NUM,DEN) creates a continuous-time transfer function SYS with
     numerator NUM and denominator DEN. SYS is an object of type tf when
     NUM,DEN are numeric arrays.

     Conversion:
     SYS = tf(SYS) converts any dynamic system SYS to the transfer function
     representation. The resulting SYS is always of class tf.
```

Con questo comando possiamo definire una funzione di trasferimento nella «forma 2» (specificando i poli, gli zeri e la costante di trasferimento).

```
zpk  Constructs zero-pole-gain model or converts to zero-pole-gain format.

   Construction:
     SYS = zpk(Z,P,K) creates a continuous-time zero-pole-gain (zpk) model
     SYS with zeros Z, poles P, and gains K. SYS is an object of class @zpk.

     Conversion:
     SYS = zpk(SYS) converts any dynamic system SYS to the zpk
     representation. The resulting SYS is of class @zpk.
```

```
>> Sistema1=tf([1 1],[1 5 6])

Sistema1 =

      s + 1
  -------------
  s^2 + 5 s + 6

Continuous-time transfer function.



>> Sistema2=zpk([-1],[-2 -3],1)

Sistema2 =

     (s+1)
  -----------
  (s+2) (s+3)

Continuous-time zero/pole/gain model.
```

```
>> Sistema=tf(([2 13],[1 9 17]);

ans =

     2 s + 13
  --------------
  s^2 + 9 s + 17

Continuous-time transfer function.

>> zpk(Sistema)

ans =

       2 (s+6.5)
  -------------------
  (s+2.697) (s+6.303)

Continuous-time zero/pole/gain model.

>> dcgain(Sistema2)

ans =

    0.1667
```

Attenzione!

Per curiosità…

```
>> Sistema=tf([1 1],[1 4 0])

Sistema =

    s + 1
  ---------
  s^2 + 4 s

Continuous-time transfer function.

>> dcgain(Sistema)

ans =

   Inf
```

```
>> Sistema=tf([1 4 0],[1 5 6])

Sistema =

    s^2 + 4 s
  -------------
  s^2 + 5 s + 6

Continuous-time transfer function.

>> dcgain(Sistema)

ans =

     0
```