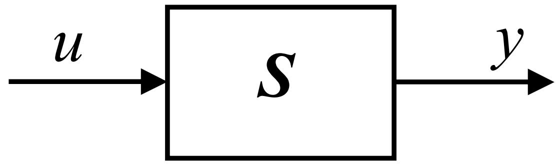
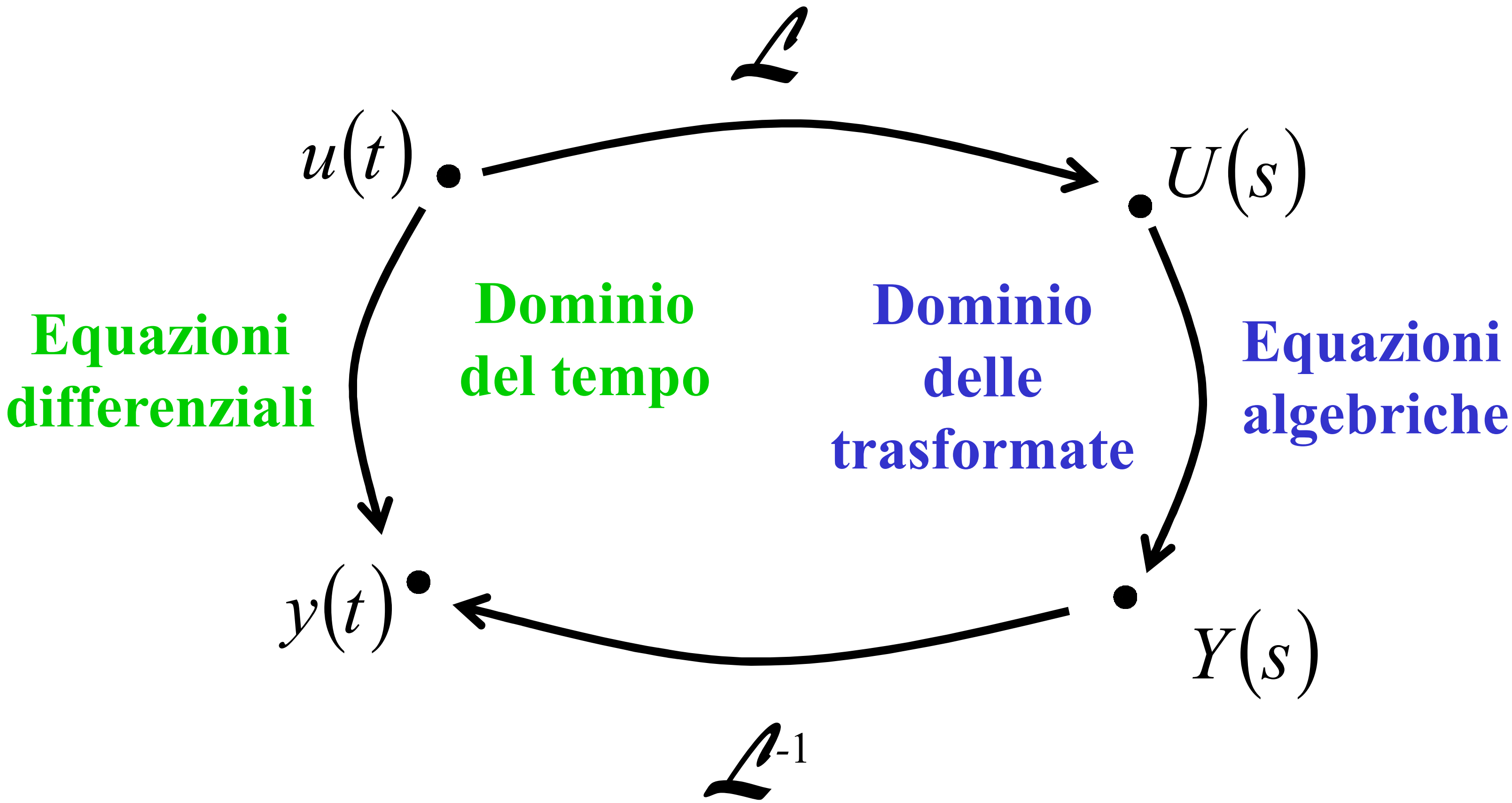
Lezione 5. Calcolo dell'antitrasformata di Laplace

Schema della lezione

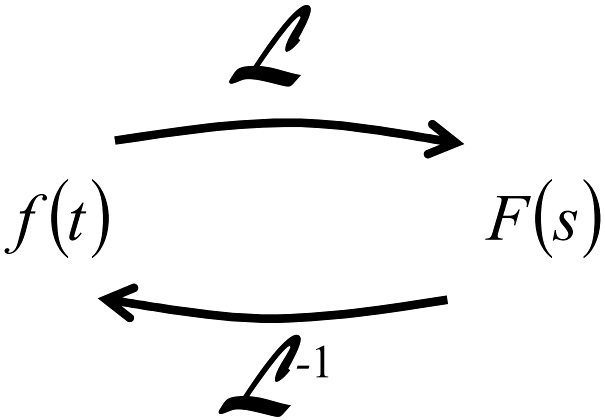
1. Introduzione
2. Antitrasformazione di Laplace
3. Strumenti per l'antitrasformazione
4. Teorema del valore iniziale
5. Teorema del valore finale
6. Antitrasformazione mediante sviluppo di Heaviside

1. Introduzione



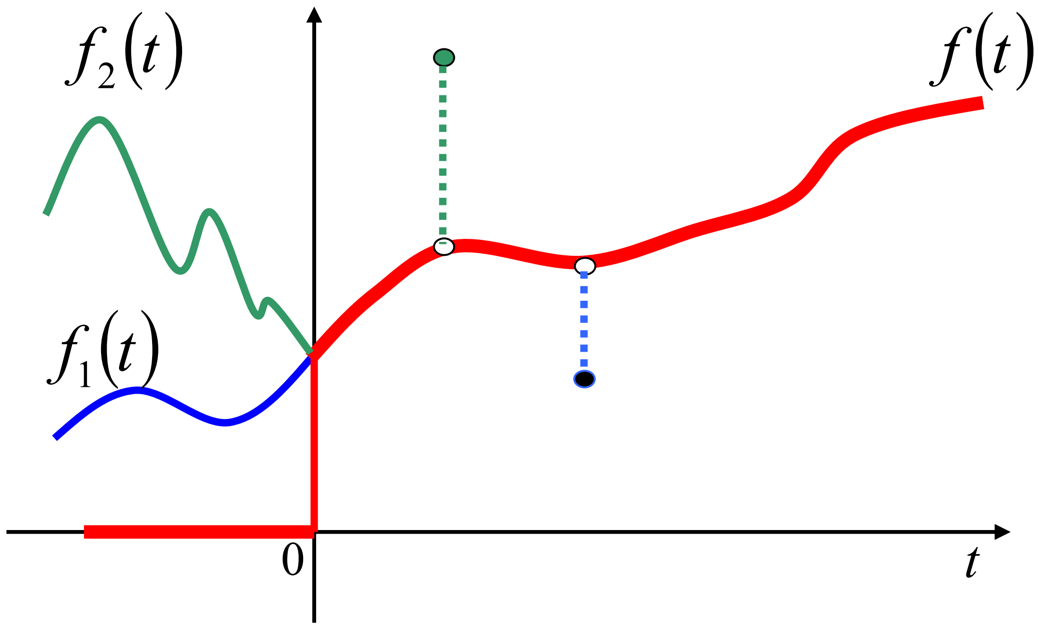


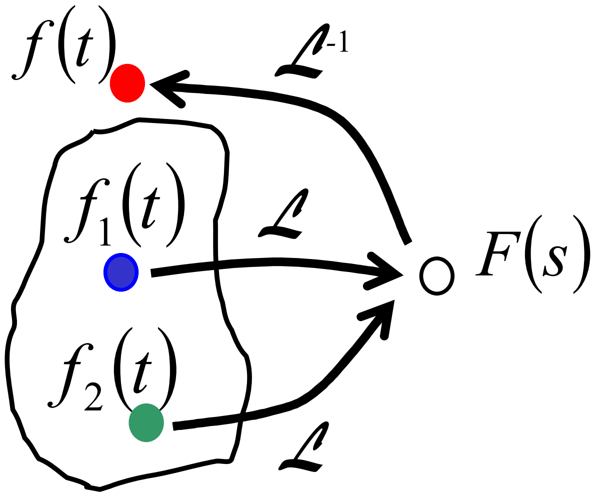
2. Antitrasformazione di Laplace



<u>Si ha corrispondenza biunivoca</u> considerando uguali le funzioni che lo sono:

- per $t \geq 0$
- a meno di un insieme di misura nulla (singoli punti)





3. Strumenti per l'antitrasformazione di Laplace

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]$$

- ✓ ~~Formula esplicita~~
- ✓ Teorema del valore iniziale $\Rightarrow$ $f(0)$
- ✓ Teorema del valore finale $\Rightarrow$ $f(\infty)$
- ✓ Sviluppo di Heaviside
  (solo per $F(s)$ razionale)

4. Teorema del valore iniziale

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right]$$

$$\boxed{f(0) = \lim_{s \to \infty} sF(s)}$$ se esiste finito

Esempio

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s) = 1 \qquad \text{infatti} \qquad f(0) = \cos(0) = 1$$

$$\dot{f}(0) = ? \qquad \mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0) = \frac{-\omega^2}{s^2 + \omega^2}$$

$$\dot{f}(0) = \lim_{s\to\infty} s\frac{-\omega^2}{s^2 + \omega^2} = 0 \quad \text{infatti} \quad \dot{f}(0) = -\sin(0) = 0$$

5. Teorema del valore finale

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

Ipotesi $F(s)$ ha solo:

- poli con parte reale negativa
- poli nulli, cioè in $s = 0$

$$\boxed{f(\infty) \equiv \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)}$$ se esiste finito

Esempio

$$F(s) = \mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Poli in $\pm j\omega$ $\Rightarrow$ il Teorema del valore finale non è applicabile !

$$F(s) = \mathcal{L}[\mathrm{sca}(t)] = \frac{1}{s}$$

$$f(\infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s} = 1$$

6. Antitrasformazione mediante sviluppo di Heaviside

Applicabile <u>solo per $F(s)$ razionali</u>

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1}+\cdots+b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1}+\cdots+a_n} \qquad m \le n$$

L'idea è scomporre $F(s)$ nella somma di elementi per i quali è nota l'antitrasformata.

$$F(s)=F_1(s)+F_2(s)+\cdots$$

$$\mathcal{L}^{-1} \qquad \mathcal{L}^{-1}$$

$$f_1(t)+f_2(t)+\cdots=f(t)$$

Si considerano solo i seguenti casi:

- $F(s)$ con poli reali distinti
- $F(s)$ con poli reali multipli
- $F(s)$ con poli complessi coniugati
- $F(s)$ con grado del denominatore uguale al grado del numeratore (m=n)

Poli reali distinti

$$D(s) = a_0 (s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)$$

poli in $-p_i$ con $p_i \neq p_j \, , \; i \neq j$

$$F(s) = \frac{\alpha_1}{s+p_1} + \frac{\alpha_2}{s+p_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s+p_n}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^{-1} \downarrow & \mathcal{L}^{-1} \downarrow & \mathcal{L}^{-1} \downarrow \\ \alpha_1 e^{-p_1 t} & \alpha_2 e^{-p_2 t} & \alpha_n e^{-p_n t} \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{-p_i t}} \quad t \geq 0$$

Esempio

Calcolare l'antitrasformata di $F(s) = \dfrac{s+2}{s(s+6)(s+1)}$

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+6)(s+1)} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+6} + \frac{\alpha_3}{s+1} =$$

$$= \frac{\alpha_1(s+6)(s+1) + \alpha_2 s(s+1) + \alpha_3 s(s+6)}{s(s+6)(s+1)} =$$

$$= \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)s^2 + (7\alpha_1 + \alpha_2 + 6\alpha_3)s + 6\alpha_1}{s(s+6)(s+1)}$$

Devono essere uguali

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 7\alpha_1 + \alpha_2 + 6\alpha_3 = 1 \\ 6\alpha_1 = 2 \end{cases}$$

Bisogna risolvere un sistema di tre equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 7\alpha_1 + \alpha_2 + 6\alpha_3 = 1 \\ 6\alpha_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1/3 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 7/3 + \alpha_2 + 6\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 = 1/3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = -\alpha_3 - 1/3 \\ 7/3 - \alpha_3 - 1/3 + 6\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 = 1/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -\alpha_3 - 1/3 \\ \alpha_3 = -1/5 \\ \alpha_1 = 1/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1/3 \\ \alpha_2 = -2/15 \\ \alpha_3 = -1/5 \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+6)(s+1)} = \frac{1/3}{s} - \frac{2/15}{s+6} - \frac{1/5}{s+1}$$

E' quindi possibile calcolare l'antitrasformata

$$F(s)=\frac{s+2}{s(s+6)(s+1)}=\frac{1/3}{s}-\frac{2/15}{s+6}-\frac{1/5}{s+1}$$

$\mathcal{L}^{-1}$ $\mathcal{L}^{-1}$ $\mathcal{L}^{-1}$

$$f(t)=\frac{1}{3}\mathrm{sca}(t)-\frac{2}{15}e^{-6t}-\frac{1}{5}e^{-t} \quad \text{per } t \geq 0$$

Si può scrivere anche così:

$$f(t)=\frac{1}{3}-\frac{2}{15}e^{-6t}-\frac{1}{5}e^{-t} \quad \text{per } t \geq 0$$

Poli reali multipli

$$D(s) = \cdots (s+p)^k \cdots \quad k > 1$$

Ci possono essere poli multipli

$$F(s) = \cdots + \frac{\beta_1}{s+p} + \frac{\beta_2}{(s+p)^2} + \cdots + \frac{\beta_k}{(s+p)^k} + \cdots$$

$$\frac{\beta_1}{s+p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \beta_1 e^{-pt} \qquad \frac{\beta_2}{(s+p)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \beta_2 t e^{-pt} \qquad \frac{\beta_k}{(s+p)^k} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \beta_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-pt}$$

Esempio

Calcolare l'antitrasformata di $F(s)=\dfrac{s+2}{s^2(s+1)}$

$$F(s)=\frac{s+2}{s^2(s+1)}=\frac{\alpha_{11}}{s}+\frac{\alpha_{12}}{s^2}+\frac{\alpha_2}{s+1}=$$

$$=\frac{\alpha_{11}s(s+1)+\alpha_{12}(s+1)+\alpha_2 s^2}{s^2(s+1)}=$$

$$=\frac{(\alpha_{11}+\alpha_2)s^2+(\alpha_{11}+\alpha_{12})s+\alpha_{12}}{s^2(s+1)}$$

Devono essere uguali

$$\begin{cases}\alpha_{11}+\alpha_2=0\\ \alpha_{11}+\alpha_{12}=1\\ \alpha_{12}=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_{11}=-1\\ \alpha_{12}=2\\ \alpha_2=1\end{cases}$$

E' quindi possibile calcolare l'antitrasformata

$$F(s)=\frac{s+2}{s^2(s+1)}=-\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s+1}$$

$$f(t)=-\mathrm{sca}(t)+2\mathrm{ram}(t)+e^{-t} \quad \text{per } t\geq 0$$

Si può scrivere anche così:

$$f(t)=-1+2t+e^{-t} \quad \text{per } t\geq 0$$

Poli complessi coniugati

$$D(s) = \cdots \underbrace{(s-\sigma-j\omega)(s-\sigma+j\omega)}_{(s-\sigma)^2+\omega^2} \cdots$$

poli in $\sigma \pm j\omega$

$$F(s) = \cdots + \frac{\beta s+\gamma}{(s-\sigma)^2+\omega^2} + \cdots$$

$$\frac{\beta s+\gamma-\beta\sigma+\beta\sigma}{(s-\sigma)^2+\omega^2} = \beta\frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2+\omega^2} + \frac{\gamma+\beta\sigma}{\omega}\frac{\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$$

$$\frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2+\omega^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{\sigma t}\cos\omega t$$

$$\frac{\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{\sigma t}\sin\omega t$$

$$F(s)=\cdots+\frac{\beta s+\gamma}{(s-\sigma)^2+\omega^2}+\cdots$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$\boxed{f(t)=\ldots+\beta\left(e^{\sigma t}\cos\omega t\right)+\frac{\gamma+\beta\sigma}{\omega}\left(e^{\sigma t}\sin\omega t\right)+\ldots} \quad t\geq 0$$

Esempio

Calcolare l'antitrasformata di $F(s) = \dfrac{3s-4}{(s^2+2s+5)(s+2)}$

$$F(s) = \frac{3s-4}{(s^2+2s+5)(s+2)} = \frac{\alpha}{s+2} + \frac{\beta s+\gamma}{s^2+2s+5} =$$

$$= \frac{\alpha(s^2+2s+5)+(\beta s+\gamma)(s+2)}{(s^2+2s+5)(s+2)} =$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)s^2+(2\alpha+2\beta+\gamma)s+(5\alpha+2\gamma)}{(s^2+2s+5)(s+2)}$$

Devono essere uguali

$$\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ 2\alpha+2\beta+\gamma=3 \\ 5\alpha+2\gamma=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-2 \\ \beta=2 \\ \gamma=3 \end{cases}$$

Si ha quindi la seguente scomposizione:

$$F(s) = -\frac{2}{s+2} + \frac{2s+3}{s^2+2s+5}$$

Non ha un'antitrasformata immediata

$$f(t) = -2e^{-2t} + \ldots \quad \text{?}$$

E' però possibile riscrivere il denominatore del secondo termine in modo differente:

$$F(s) = -\frac{2}{s+2} + \frac{2s+3}{s^2+2s+5} = -\frac{2}{s+2} + \frac{2s+3}{s^2+2s+1+4} =$$

$$= -\frac{2}{s+2} + \frac{2s+3}{(s+1)^2+4}$$

Qual è l'antitrasformata ?

Pro memoria

$$\frac{\omega}{(s+\sigma)^2+\omega^2} \Rightarrow e^{-\sigma t}\sin(\omega t) \quad \text{per } t \geq 0$$

$$\frac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2+\omega^2} \Rightarrow e^{-\sigma t}\cos(\omega t) \quad \text{per } t \geq 0$$

Quindi:

$$\frac{2s+3}{(s+1)^2+4} = k_1\frac{s+1}{(s+1)^2+4} + k_2\frac{2}{(s+1)^2+4} =$$

$$= \frac{k_1 s + k_1 + 2k_2}{(s+1)^2+4} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_1 + 2k_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = 1/2 \end{cases}$$

E’ quindi possibile calcolare l’antitrasformata

$$F(s) = -\frac{2}{s+2} + 2\frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2+4}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \qquad \mathcal{L}^{-1} \qquad \mathcal{L}^{-1}$$

$$f(t) = -2e^{-2t} + 2e^{-t}\cos(2t) + \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t) \qquad \text{per } t \geq 0$$

Grado relativo nullo ($m=n$)

Se il numeratore $N(s)$ e il denominatore $D(s)$ hanno lo stesso grado, nella scomposizione di $F(s)$ bisogna aggiungere un termine costante.

$$F(s) = \cdots + \alpha_0$$

$$\mathcal{L}^{-1}$$

$$f(t) = \ldots + \alpha_0 \mathrm{imp}(t)$$

Esempio

Calcolare l'antitrasformata di $F(s)=\frac{(s+2)^2}{s(s+1)}$

$$F(s)=\frac{(s+2)^2}{s(s+1)}=\frac{\alpha_1}{s}+\frac{\alpha_2}{s+1}+\alpha_0=$$

$$=\frac{\alpha_1(s+1)+\alpha_2 s+\alpha_0 s(s+1)}{s(s+1)}=$$

$$=\frac{\alpha_0 s^2+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_0)s+\alpha_1}{s(s+1)}$$

Devono essere uguali

$$\begin{cases}\alpha_0=1\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_0=4\\ \alpha_1=4\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha_0=1\\ \alpha_1=4\\ \alpha_2=-1\end{cases}$$

E' quindi possibile calcolare l'antitrasformata

$$F(s) = \frac{4}{s} - \frac{1}{s+1} + 1 =$$

$$f(t) = 4\mathrm{sca}(t) - e^{-t} + \mathrm{imp}(t) \quad \text{per } t \geq 0$$

Si può scrivere anche così:

$$f(t) = 4 - e^{-t} + \mathrm{imp}(t) \quad \text{per } t \geq 0$$

Esempio esplicativo
(Trasformazione di Laplace per la risoluzione di equazioni differenziali)

$$\dot{y}(t) = -y(t) + u(t) \xrightarrow[U(s)=\mathcal{L}[u(t)]]{Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]} \begin{aligned} sY(s)-y(0)&= \\ &=-Y(s)+U(s) \end{aligned}$$

Con $u(t)=\text{sca}(t)$
$y(0)=4$

$$sY(s)-y(0)=-Y(s)+U(s)$$

$$(s+1)Y(s)=4+\frac{1}{s}$$

$$Y(s)=\frac{4}{s+1}+\frac{1}{s(s+1)}$$

$$Y(s) = \frac{4}{s+1} + \frac{1}{s(s+1)}$$

$$4e^{-t}$$

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$\mathrm{sca}(t) \quad -e^{-t}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= 4e^{-t} + 1 - e^{-t} = \\ &= 3e^{-t} + 1 \end{aligned}}$$

per $t \geq 0$