

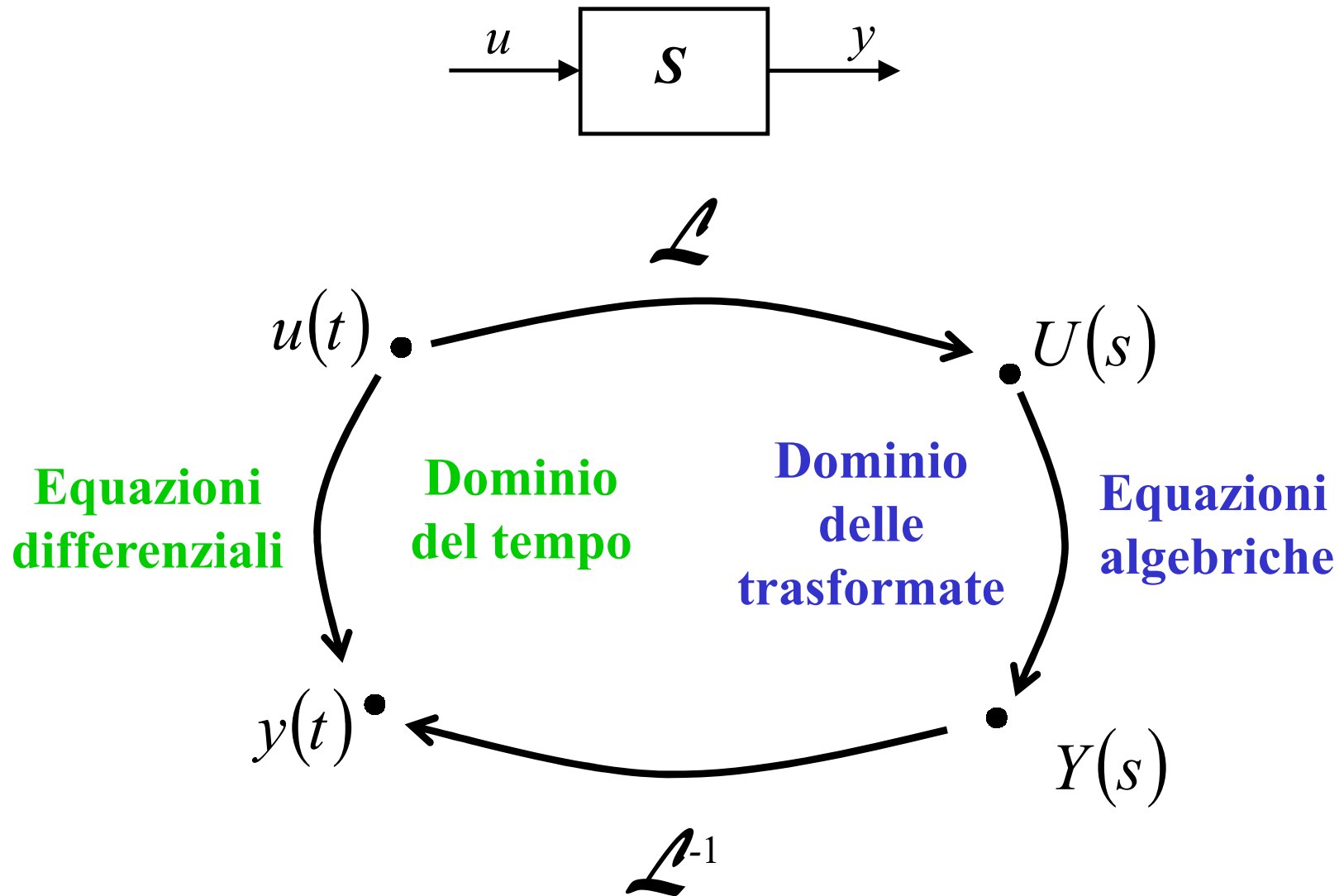
Lezione 4.

Trasformazione di Laplace

Schema della lezione

1. Introduzione
2. Definizione di trasformazione di Laplace
3. Legame tra scalino ed impulso
4. Proprietà della trasformazione di Laplace
5. Poli e zeri di una trasformata

1. Introduzione



2. Definizione di trasformazione di Laplace

$$f(t): \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$F(s): \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{R}$$

dove

$$s = \sigma + j\omega \in \mathcal{C}$$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \triangleq \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Osservazioni

- $\mathcal{L}[f(t)]$ è una funzione reale di variabile complessa
- $\mathcal{L}[f(t)]$ non dipende dai valori assunti da $f(t)$ per $t < 0$

Esempio

Trasformata dello scalino

Lo **scalino** (di ampiezza unitaria) è la seguente funzione del tempo:

$$\text{sca}(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

La trasformata di Laplace dello scalino è:

$$\mathcal{L}[\text{sca}(t)] = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} = 0 + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$$

Esempio

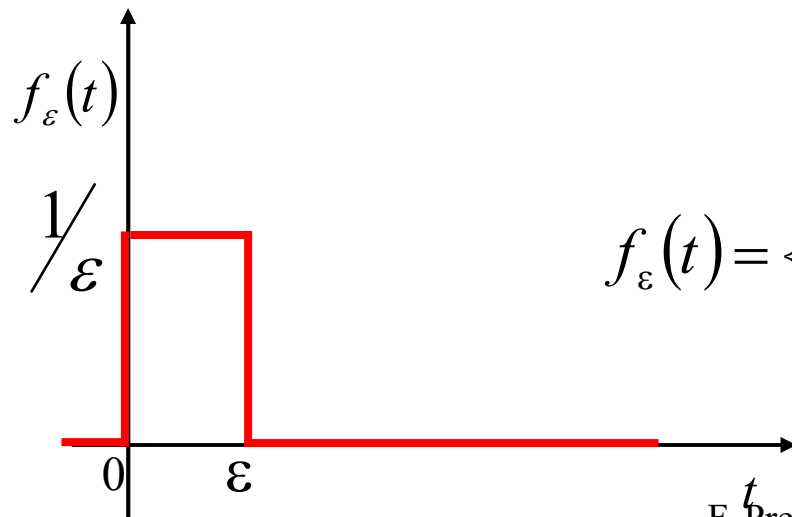
Trasformata dell'impulso

L'**impulso** è la funzione del tempo definita dalle seguenti proprietà:

$$\begin{cases} \text{imp}(t) = 0, & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \text{imp}(t) dt = 1 \end{cases} \quad ?$$

Cosa significano (insieme) queste due relazioni?

E' possibile pensare ad una funzione $f_\varepsilon(t)$ definita come segue:



$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0, t > \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{per } 0 \leq t \leq \varepsilon \end{cases}$$

e dire che:

$$\text{imp}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(t)$$

Quindi calcolare la trasformata di Laplace dell'impulso:

$$\text{imp}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\varepsilon}(t) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}[\text{imp}(t)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}[f_{\varepsilon}(t)]$$

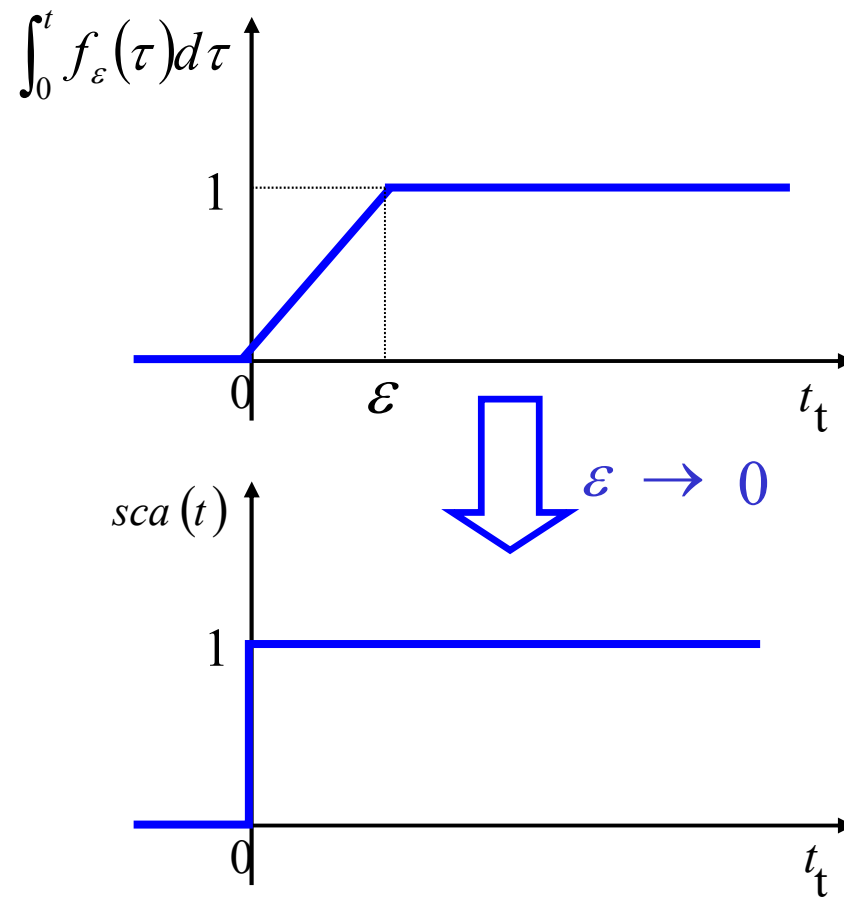
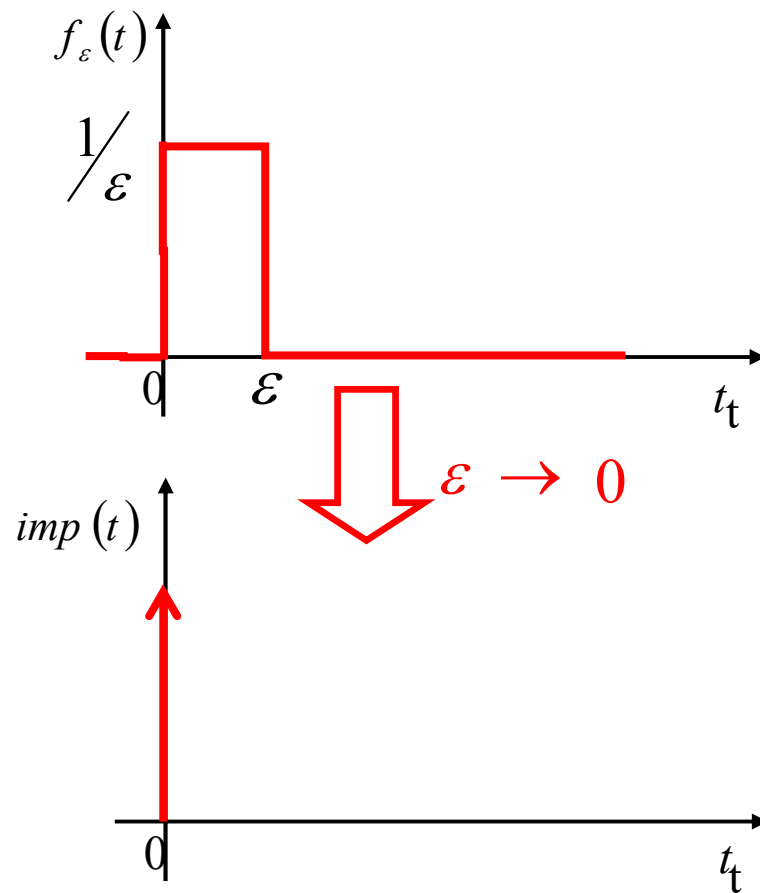
$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_{\varepsilon}(t)] &= \int_0^{\infty} f_{\varepsilon}(t) e^{-st} dt = \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} e^{-st} dt = \frac{1}{\varepsilon} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{\varepsilon} = \\ &= -\frac{1}{\varepsilon s} [e^{-\varepsilon s} - 1] = \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[\text{imp}(t)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}[f_{\varepsilon}(t)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{s e^{-\varepsilon s}}{s} = 1$$

3. Legame tra scalino e impulso

$$\text{sca}(t) = \int_0^t \text{imp}(\tau) d\tau$$

$$\text{imp}(t) = \frac{d}{dt} \text{sca}(t)$$



4. Trasformazione di Laplace: proprietà

4.1 Linearità

$$F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)] \quad F_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)]$$

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

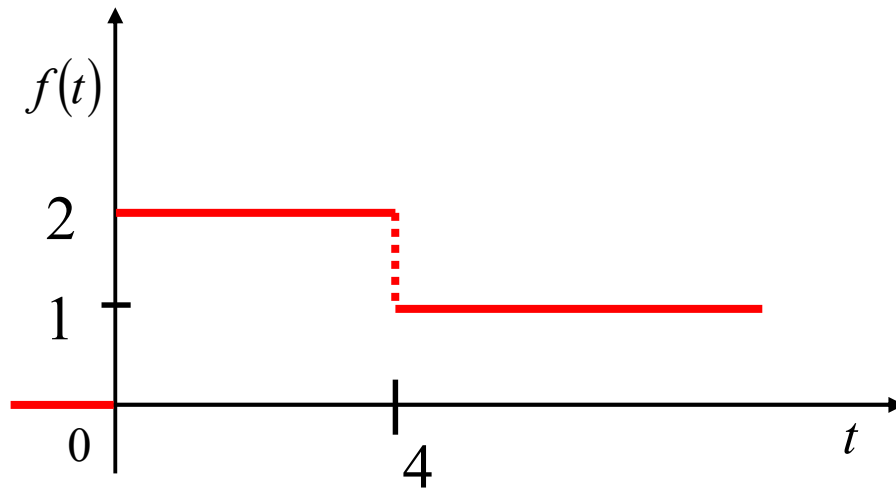
4.2 Traslazione nel dominio del tempo

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \quad f(t) = 0, t < 0$$

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-s\tau} F(s), \tau > 0$$

Esempio

$$f(t) = 2\text{sca}(t) - \text{sca}(t - 4)$$



$$\Rightarrow F(s) = \frac{2}{s} - \frac{e^{-4s}}{s}$$

4.3 Traslazione nel dominio delle trasformate

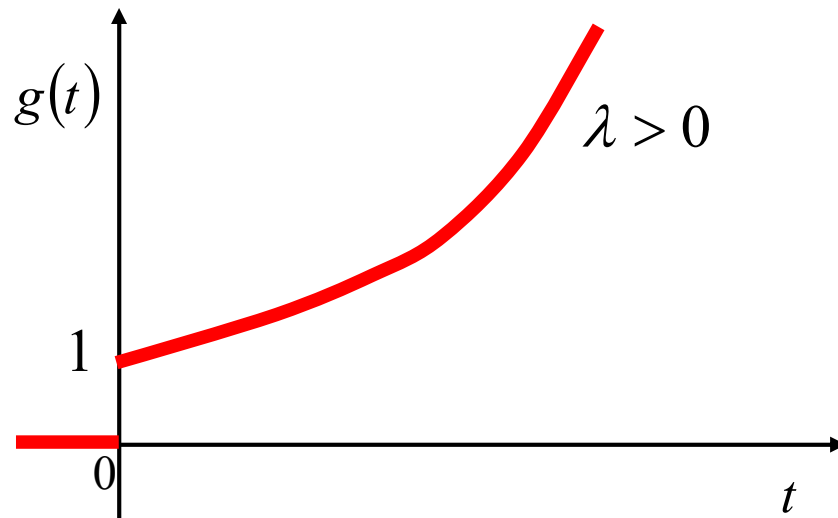
$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\mathcal{L}\left[e^{\lambda t} f(t)\right] = F(s - \lambda)$$

Esempio

$$f(t) = \text{sca}(t) \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{\lambda t} f(t)\right] = F(s - \lambda) = \frac{1}{s - \lambda}$$



$$g(t) = e^{\lambda t} \text{sca}(t)$$

e' un modo per dire

$$g(t) = e^{\lambda t}, \quad t \geq 0$$

Esempio

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \quad \text{A rigore sarebbe } \mathcal{L}[\sin(\omega t) \text{sca}(t)]$$

$$= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)\right] = \frac{1}{2j} \mathcal{L}\left[e^{j\omega t}\right] - \frac{1}{2j} \mathcal{L}\left[e^{-j\omega t}\right] =$$

$$= \frac{1}{2j} \frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{2j} \frac{1}{s + j\omega} = \frac{2j\omega}{2j(s^2 + \omega^2)} =$$

$$= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

4.4 Derivazione nel dominio delle trasformate

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$$

Esempio

$$\mathcal{L}[te^{\lambda t}] = -\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s - \lambda} \right] = \frac{1}{(s - \lambda)^2}$$

essendo $\mathcal{L}[e^{\lambda t}] = \frac{1}{s - \lambda}$

4.5 Derivazione nel dominio del tempo

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] \equiv \mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0)$$

Esempio

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos \omega t] &= \\ &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} \sin \omega t\right] = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} \sin \omega t\right] = \\ &= \frac{1}{\omega} \left[s \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - 0 \right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

Estensione a derivate di ordine superiore

- Ordine 2

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\ddot{f}(t)] &= s\mathcal{L}[\dot{f}(t)] - \dot{f}(0) = s(sF(s) - f(0)) - \dot{f}(0) \\ &= s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)\end{aligned}$$

- Ordine n

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - \left.\frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}}\right]_{t=0}$$

4.6 Integrazione nel dominio del tempo

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

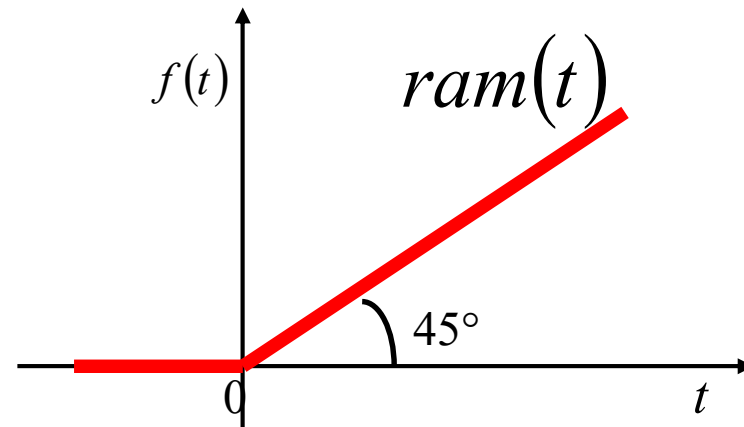
$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

Esempio

$$f(t) = t \cdot \text{sca}(t) = \text{ram}(t)$$

$$\text{ram}(t) = \int_0^t \text{sca}(\tau) d\tau$$

$$\mathcal{L}[\text{ram}(t)] = \frac{1}{s^2}$$



5. Poli e zeri di una trasformata

Poli: valori di s per cui $F(s) = \infty$

Zeri: valori di s per cui $F(s) = 0$

Caso notevole

$F(s)$ razionale, cioè $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ $N(s)$ e $D(s)$ polinomi in s

Poli: radici di $D(s) = 0$

Zeri: radici di $N(s) = 0$