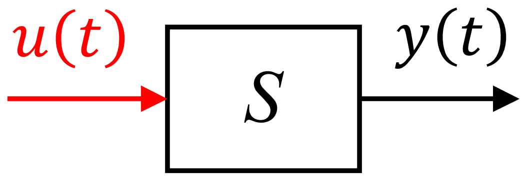
Lezione 3.
Movimento ed Equilibrio

Schema della lezione

1. Movimento dell'uscita di un sistema LTI SISO
2. Movimento libero e movimento forzato
3. Equilibrio di un sistema LTI SISO
4. Guadagno statico di un sistema LTI SISO

1. Movimento dell'uscita di un sistema LTI SISO



$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}$$

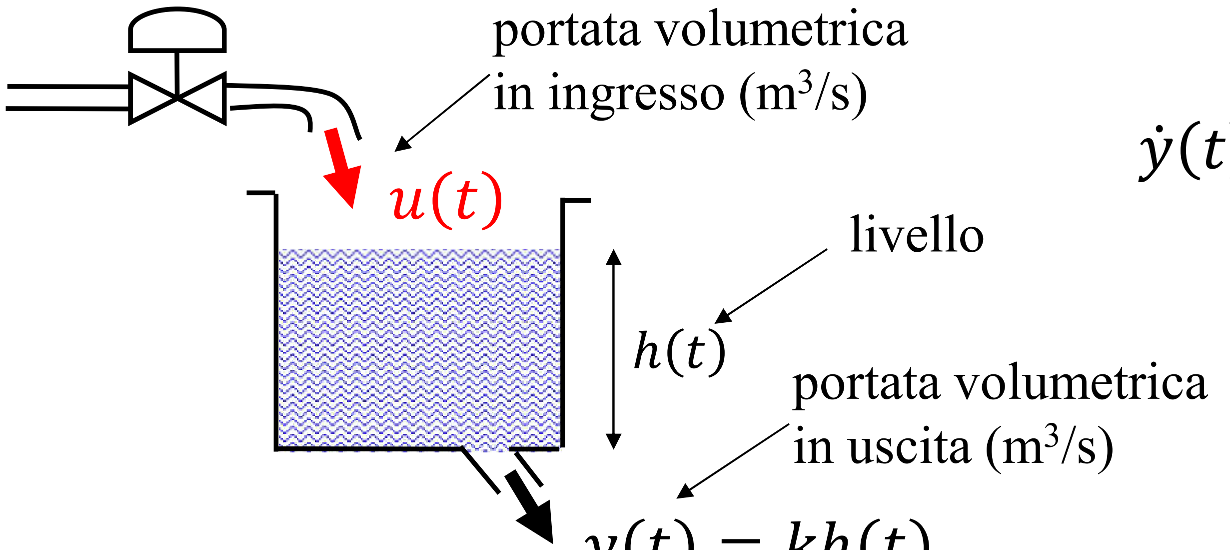
$$y_0; y_{1,0}; \cdots ; y_{n-1,0}$$

Assegnato un andamento dell'ingresso $u(t)$ [la "**forzante**"] e assegnate le condizioni iniziali, è possibile integrare l'equazione differenziale e ottenere l'andamento

$$\boxed{y(t)}$$

movimento dell'uscita

Esempio



$$y(t) = kh(t)$$

$$\dot{y}(t) + \frac{k}{A} y(t) = \frac{k}{A} u(t)$$

$$A = 1 \ m^2$$

$$k = 1 \ \frac{m^2}{s} \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Sia assegnato l'ingresso $u(t) = 2,\ t \geq 0$ con livello iniziale $h(0) = 5$

Per trovare il **movimento dell'uscita**, partendo da 5 m ed erogando una portata costante di 2 m^3/s, bisogna risolvere l'equazione differenziale lineare del primo ordine

$$\dot{y}(t) + y(t) = 2$$

con la condizione iniziale $y(0) = kh(0) = 5$

Innanzitutto si ricordi che:

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}[e^\tau y(\tau)]d\tau = e^t y(t) - y(0)$$

Quindi, si moltiplichino entrambi i membri dell'equazione per $e^t \neq 0$

$$e^t \dot{y}(t) + e^t y(t) = 2e^t \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^t y(t)\right) = 2e^t$$

Integrando entrambi i membri si ottiene

$$e^t y(t) - y(0) = \int_0^t 2e^{\tau} d\tau \quad \Rightarrow \quad y(t) = e^{-t} y(0) + \int_0^t 2e^{-(t-\tau)} d\tau$$

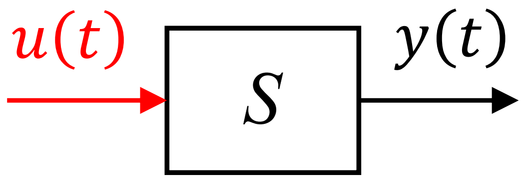
Sfruttando la condizione iniziale: $y(0) = 5$

$$y(t) = 5e^{-t} + \int_0^t 2e^{-(t-\tau)} d\tau = 5e^{-t} + 2e^{-t} \int_0^t e^{\tau} d\tau =$$

$$= 5e^{-t} + 2e^{-t}[e^{\tau}]_0^t = 5e^{-t} + 2e^{-t}(e^t - 1) = 5e^{-t} + 2 - 2e^{-t}$$
$$= 3e^{-t} + 2$$

Il **movimento dell'uscita** è $y(t) = 3e^{-t} + 2, \quad t \geq 0$

2. Movimento libero e movimento forzato



$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}$$

$$y_0; y_{1,0}; \cdots ; y_{n-1,0}$$

Si consideri il movimento dell'uscita che si ottiene in corrispondenza di $\boldsymbol{u(t)=0}$ e con condizioni iniziali assegnate $y_0; y_{1,0}; \cdots ; y_{n-1,0}$ [è la soluzione dell'*equazione omogenea associata*].

Tale movimento si dice **Movimento libero dell'uscita**

Alternativamente, si consideri il movimento dell'uscita che si ottiene in corrispondenza di **condizioni iniziali nulle** $\boldsymbol{y_0=y_{1,0}=\ldots=y_{n-1,0}=0}$ e con $u(t)$ assegnato.

Tale movimento si dice **Movimento forzato dell'uscita**

Movimento libero

Il **movimento libero** dell'uscita si ottiene integrando l'equazione differenziale

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = 0 \qquad \text{con c.i. } y_0; y_{1,0}; \cdots; y_{n-1,0}$$

La sua soluzione passa attraverso la ricerca delle **soluzioni dell'equazione caratteristica associata**, dette **autovalori**:

$$\varphi(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_0 = 0$$

dove $\varphi(s)$ è il **polinomio caratteristico**.

Nota Bene

Con un piccolo abuso, si parlerà di "**autovalori del sistema**" e "**polinomio caratteristico del sistema**"

Se gli **autovalori s_i sono reali e distinti** le soluzioni parziali dell'equazione differenziale sono del tipo $e^{s_i t}$ e la soluzione generale è data dalla loro combinazione lineare

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{s_i t}$$

Se gli **autovalori sono complessi coniugati e distinti** (a coppie), cioè $\boldsymbol{s_i = \sigma_i \pm j\omega_i}$, le soluzioni parziali dell'equazione differenziale sono del tipo $e^{\sigma_i t}\sin(\omega_i t)$, $e^{\sigma_i t}\cos(\omega_i t)$ e la soluzione generale è data dalla loro combinazione lineare

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\sigma_i t}\sin(\omega_i t) + d_i e^{\sigma_i t}\cos(\omega_i t)$$

I valori dei coefficienti della combinazione lineare si calcolano imponendo il rispetto dei vincoli imposti dalle condizioni iniziali.

Le soluzioni parziali si dicono **modi** del sistema dinamico LTI.

Nota bene

Le cose si complicano un po' se **le radici dell'equazione caratteristica non sono distinte**.

In particolare, se un autovalore ha molteplicità algebrica uguale alla sua molteplicità geometrica continuano a valere i risultati di prima.

In caso contrario si hanno modi del tipo

$te^{s_i t}, t^2 e^{s_i t}, \cdots$

$te^{\sigma_i t}\sin(\omega_i t), te^{\sigma_i t}\cos(\omega_i t), t^2 e^{\sigma_i t}\sin(\omega_i t), t^2 e^{\sigma_i t}\cos(\omega_i t), \cdots$

La potenza di *t* dipende dalla "deficienza" di molteplicità.

3. Equilibrio di un sistema LTI SISO

Si definisce **uscita di equilibrio** di un sistema dinamico lineare tempo-inviariante il **valore costante dell'uscita** $y(t) = \bar{y}$ (se esiste) che si ottiene in corrispondenza di un assegnato valore costante dell'ingresso $u(t) = \bar{u}\ , \quad t \geq t_0$

Operativamente si tratta di **annullare le derivate dell'ingresso e dell'uscita** nell'equazione differenziale che rappresenta il sistema.

Esempio

$$\dot{y}(t) + 2y(t) = -3u(t)$$

Calcolare l'uscita di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso costante $\bar{u} = 2, \quad t \geq 0$

Bisogna risolvere l'equazione algebrica

$2\bar{y} = -3 \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = -3$ **Uscita di equilibrio** (per $u(t) = \bar{u} = 2$)

Osservazione

L'uscita di equilibrio è diversa per diversi valori costanti dell'ingresso, per questo si sottolinea "**in corrispondenza di**".

Osservazione

Non è sempre detto che esista o sia unica l'uscita di equilibrio.
Per es. il sistema dinamico LTI

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) = u(t)$$

Non ammette alcuna uscita di equilibrio in corrispondenza di valori costanti dell'ingresso non nulli $\bar{u} \neq 0$

Teorema

Un sistema LTI SISO può avere (in corrispondenza di un dato $\bar{u}$):

- una sola uscita di equilibrio
- infinite uscite di equilibrio
- nessuna uscita di equilibrio

4. Guadagno statico di un sistema LTI SISO

Dato un sistema LTI SISO che ammette un'unica uscita di equilibrio $\bar{y}$ in corrispondenza di un ingresso costante assegnato $\bar{u}$, si dice **guadagno statico del sistema** il rapporto tra l'uscita di equilibrio ed il corrispondente ingresso costante:

$$\boxed{\mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}}}$$

Esempio - Modello di Goodwin

Ricordiamo che il modello è espresso mediante la seguente coppia di equazioni

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = \left(\frac{1}{\sigma} - \alpha - \beta\right) v(t) - \frac{1}{\sigma} u(t) v(t) \\ \dot{u}(t) = -(\alpha + \gamma) u(t) + \rho v(t) u(t) \end{cases}$$

Chiamando $\frac{1}{\sigma} - \alpha - \beta = \omega$; $-\frac{1}{\sigma} = \eta$; $-(\alpha + \gamma) = \delta$ e indicando le variabili di stato $x_1(t) = v(t)$ e $x_2(t) = u(t)$ si ha

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \omega x_1(t) + \eta x_1(t) x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \delta x_2(t) + \rho x_1(t) x_2(t) \end{cases}$$

La variabile di stato $x_1(t)$ indica il **tasso di occupazione**, mentre la seconda variabile di stato $x_2(t)$ indica la **frazione di prodotto destinata ai lavoratori**.

Modello di Goodwin - stati di equilibrio

Per calcolare lo stato di equilibrio (in questo caso NON è in corrispondenza di un assegnato ingresso costante) annulliamo le derivate

$$\begin{cases} 0 = \omega \bar{x}_1 + \eta \bar{x}_1 \bar{x}_2 \\ 0 = \delta \bar{x}_2 + \rho \bar{x}_1 \bar{x}_2 \end{cases}$$

dove $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ sono le componenti dello stato di equilibrio.

Le equazioni precedenti hanno due soluzioni.

Equilibrio A

$$\bar{\boldsymbol{x}}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Equilibrio B

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{x}}_B = \begin{bmatrix} -\dfrac{\delta}{\rho} \\ -\dfrac{\omega}{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha + \gamma}{\rho} \\ 1 - (\alpha + \beta)\sigma \end{bmatrix}}$$

L’equilibrio A è banale e non «fisicamente» significativo.

Nell’equilibrio B abbiamo che:

$$\bar{x}_1 = \frac{\alpha + \gamma}{\rho}$$

cioè, il **valore di equilibrio del tasso di occupazione** dipende da:

- tasso di crescita della produttività (o del progresso tecnologico) α
- i parametri γ e ρ che definiscono la dipendenza lineare del tasso di crescita dei salari dall’occupazione.

$$\bar{x}_2 = 1 - (\alpha + \beta)\sigma$$

cioè, il **valore di equilibrio della frazione di prodotto per i lavoratori** dipende da:

- tasso di crescita della produttività (del progresso tecnologico) α
- tasso di crescita dell’offerta di lavoro β
- rapporto capitale/prodotto σ

Si noti che, più rapidamente crescono i salari più basso sarà il tasso di occupazione.

Modello di Goodwin - vincoli sui parametri

Siccome il tasso di occupazione $v(t) \equiv x_1(t)$ è compreso tra 0 ed 1 si ha che anche il suo valore di equilibrio lo è, cioè

$$0 \leq \frac{\alpha + \gamma}{\rho} \leq 1$$

da cui

$$\boxed{0 \leq \alpha + \gamma \leq \rho}$$

Similmente, la frazione del prodotto destinata ai lavoratori $u(t) \equiv x_2(t)$ è compresa tra 0 ed 1 e quindi si ha che

$$0 \leq 1 - (\alpha + \beta)\sigma \leq 1$$

da cui

$$\boxed{0 \leq (\alpha + \beta)\sigma \leq 1}$$