

# Lezione 2.

## Sistemi dinamici a tempo continuo

# Schema della lezione

1. Cos'è un sistema dinamico ?
2. Modellistica dei sistemi dinamici
3. Il concetto di dinamica
4. Sistemi dinamici a tempo continuo LTI SISO
5. Classificazione dei sistemi dinamici

# 1. Cos'è un sistema dinamico?

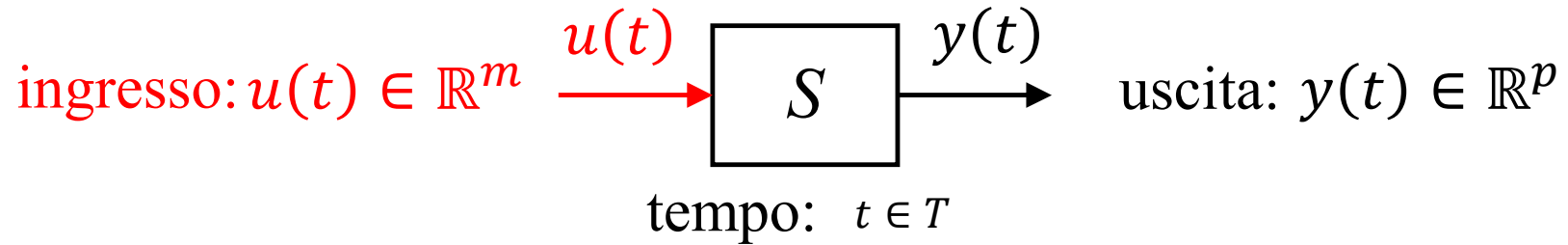


Un **sistema dinamico** è un oggetto (o insieme di oggetti tra loro interconnessi) che interagisce col mondo circostante mediante:

- **ingressi** (azioni compiute sul sistema da agenti esterni)
- **uscite** (descrivono la risposta del sistema agli stimoli)

E' indispensabile disporre di **modelli matematici** dei sistemi dinamici per descrivere il loro comportamento (e per poi progettare sistemi di controllo)

## 2. Modelli di sistemi dinamici



( Sistemi a tempo continuo  $T = \mathbb{R}$  )

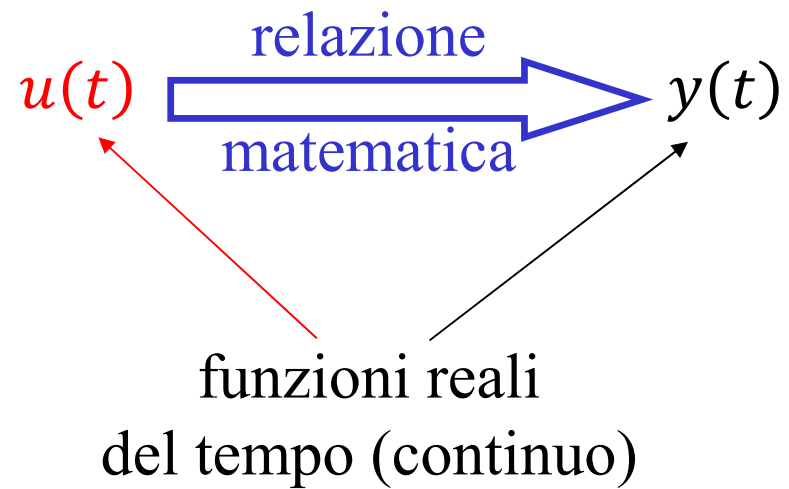
Sistemi a tempo discreto  $T = \mathbb{Z}$

IMAD-DSI 6-9 cfu

...alla fine del corso

Sistemi a eventi discreti

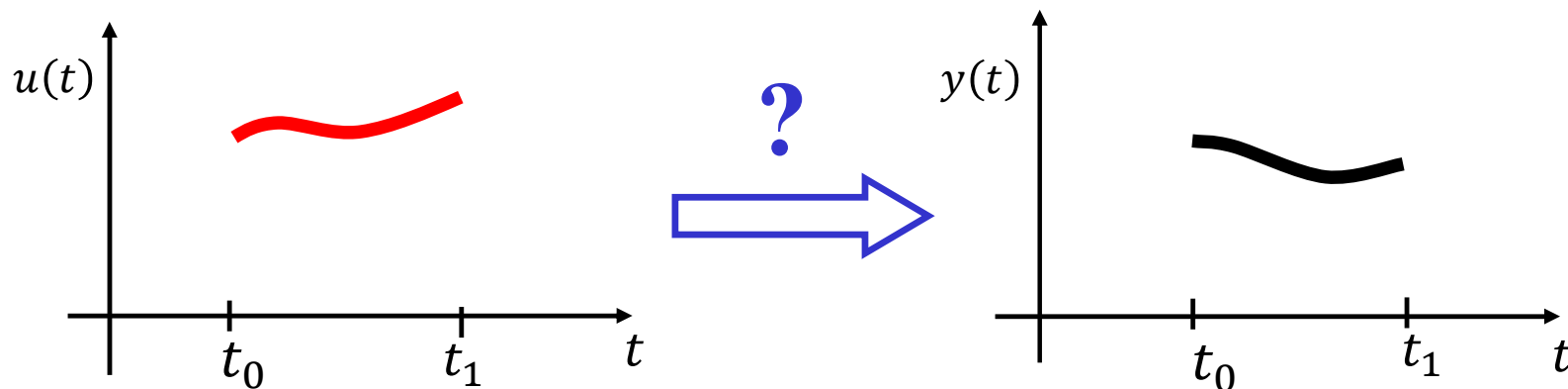
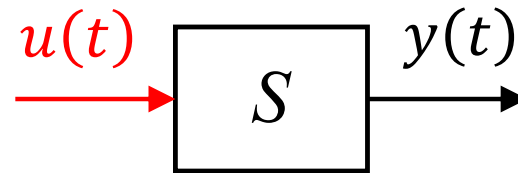
Automazione Industriale  
6 cfu



Che tipo di relazioni matematiche servono ?

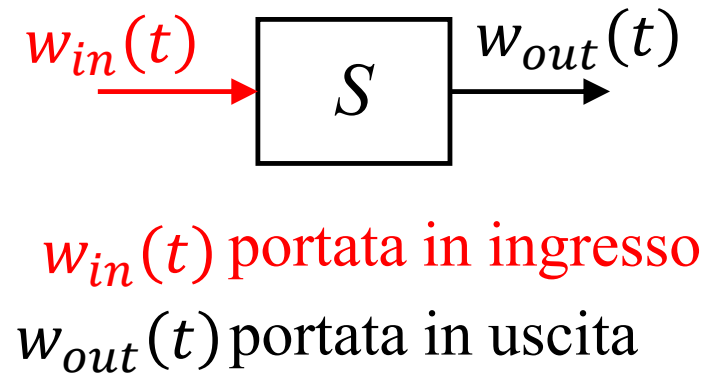
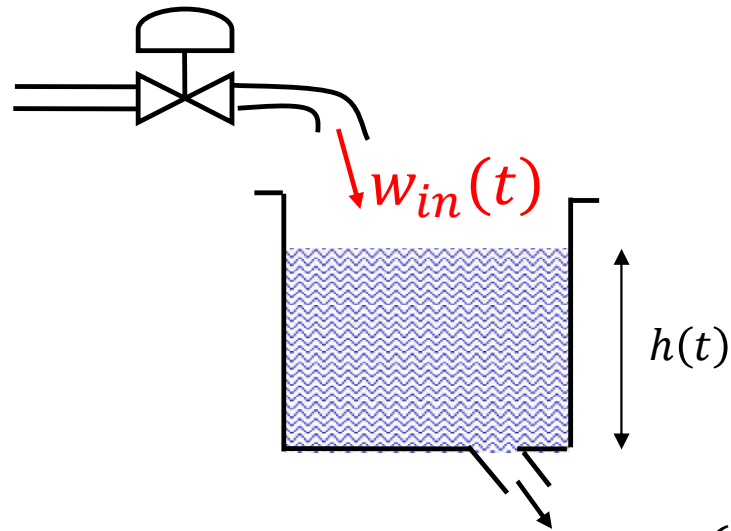
### 3. Il concetto di dinamica

Cosa significa l'aggettivo “**dinamico**” ?



La conoscenza del valore delle variabili di ingresso al tempo  $t$  non è sufficiente a determinare univocamente il valore delle variabili di uscita al medesimo tempo  $t$

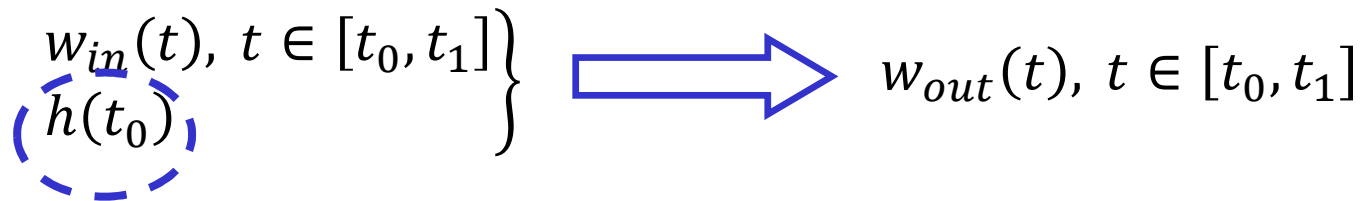
## Esempio



$w_{in}(t)$  portata in ingresso  
 $w_{out}(t)$  portata in uscita

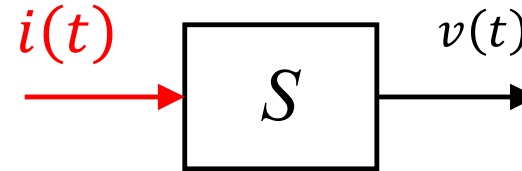
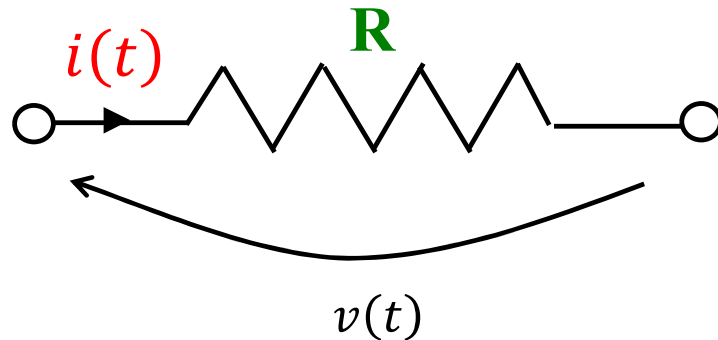
$$w_{out}(t) = kh(t)$$

Per determinare  $w_{out}$  bisogna conoscere (oltre a  $w_{in}$ ) il **livello iniziale del serbatoio**



**E' un sistema dinamico**

## Esempio



$i(t)$  corrente nella resistenza  
 $v(t)$  tensione ai capi della resistenza

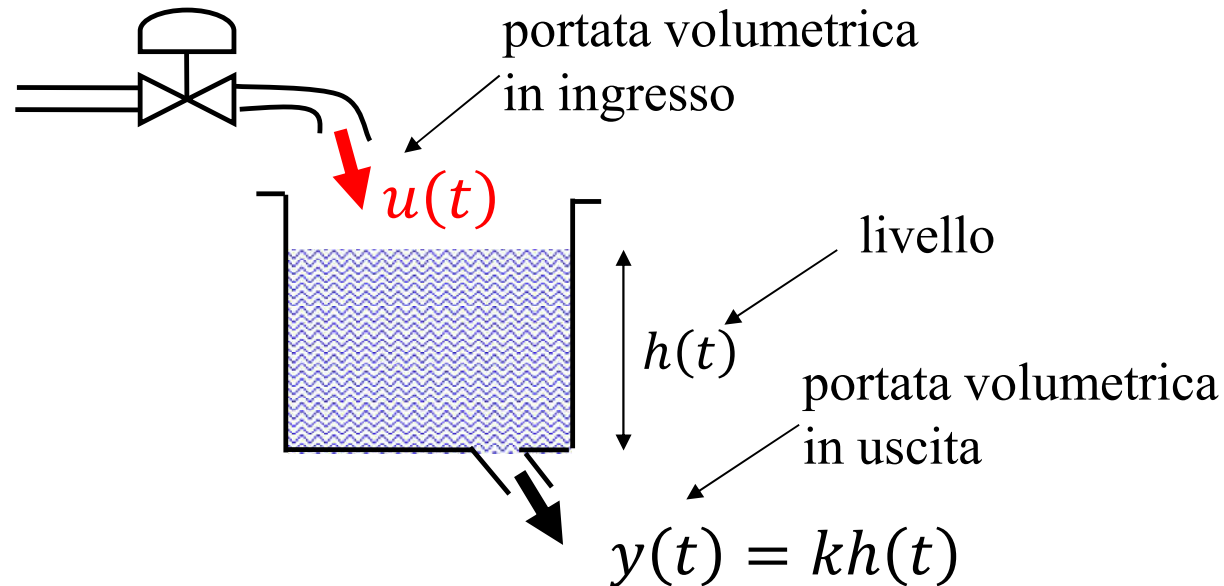
Legge di Ohm  $v(t) = Ri(t)$

Basta conoscere  $i(t)$  per determinare univocamente  $v(t)$

**E' un sistema NON dinamico**

- ✿ Bisogna conoscere **qualcosa di più** oltre al semplice andamento delle variabili di ingresso.
- ✿ Serve “**memoria**” per sapere in che condizioni, **in che stato iniziale si trova il sistema** nell’istante in cui si comincia ad applicare l’ingresso.
- ✿ La ragione non è puramente matematica  
(Se uso eq.differenziali devo conoscere le condizioni iniziali)

## Esempio 1



L'area di base è  $A$ ,  
quindi il volume è

$$V(t) = Ah(t)$$

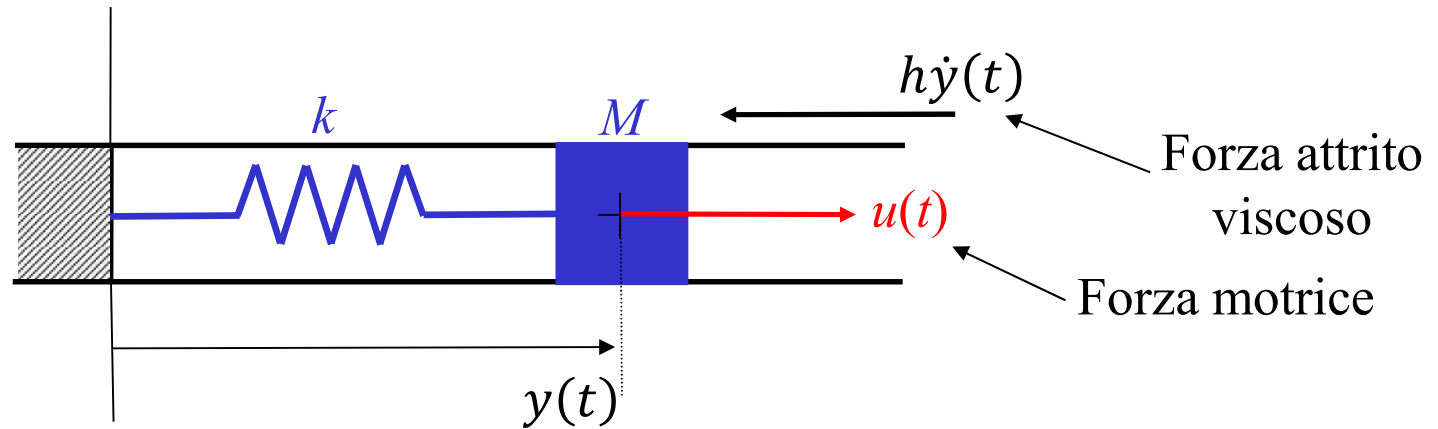
### Conservazione del volume

$$\frac{dV(t)}{dt} = u(t) - y(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{A}{k} \dot{y}(t) = u(t) - y(t) \quad \Longrightarrow$$

$$\dot{y}(t) + \frac{k}{A} y(t) = \frac{k}{A} u(t)$$

Equazione differenziale del 1° ordine,  
lineare, non omogenea, a coefficienti  
costanti

## Esempio 2



Forza apparente

**Bilancio forze**

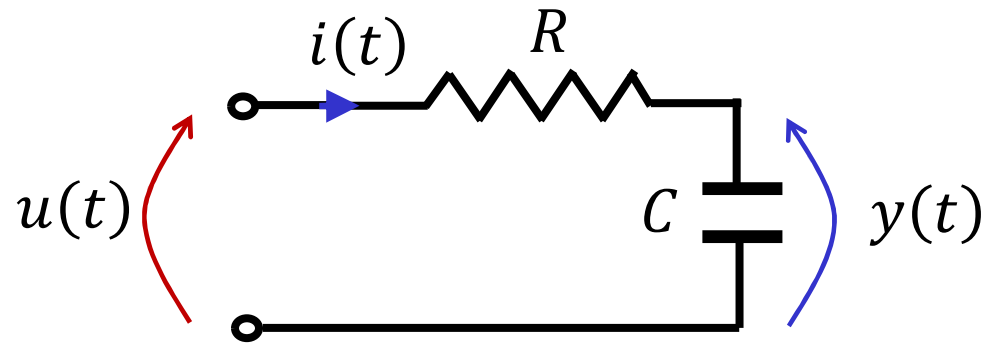
Forza di richiamo  
della molla

$$M\ddot{y}(t) = u(t) - ky(t) - h\dot{y}(t)$$

$$\ddot{y}(t) + \frac{h}{M}\dot{y}(t) + \frac{k}{M}y(t) = \frac{1}{M}u(t)$$

Equazione differenziale del 2° ordine, lineare, non omogenea, a coefficienti costanti

## Esempio 3



### Bilancio di tensione (nella maglia)

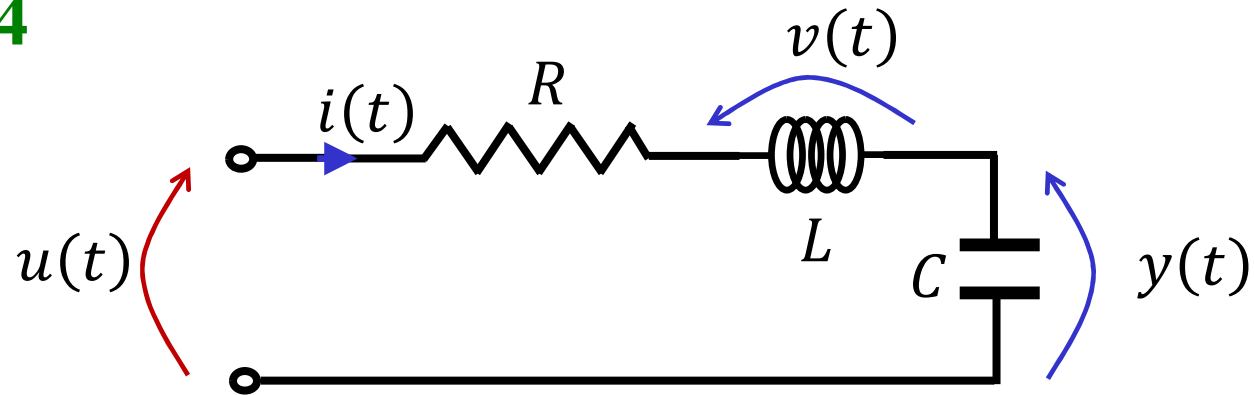
$$u(t) = Ri(t) + y(t)$$

$$i(t) = C\dot{y}(t) \quad \Longrightarrow \quad u(t) = RC\dot{y}(t) + y(t)$$

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}u(t)$$

Equazione differenziale del 1° ordine, lineare, non omogenea, a coefficienti costanti

## Esempio 4



### Bilancio di tensione (nella maglia)

$$u(t) = Ri(t) + v(t) + y(t)$$

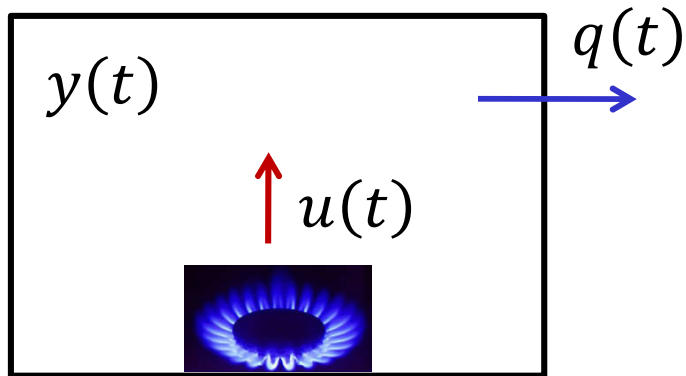
$$i(t) = C\dot{y}(t)$$

$$v(t) = L\dot{i}(t) = LC\ddot{y}(t) \implies u(t) = RC\dot{y}(t) + LC\ddot{y}(t) + y(t)$$

$$\ddot{y}(t) + \frac{R}{L}\dot{y}(t) + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{LC}u(t)$$

Equazione differenziale del 2° ordine, lineare, non omogenea, a coefficienti costanti

## Esempio 5



$u(t)$  Energia termica immessa nel forno

$y(t)$  Temperatura nel forno

$q(t)$  Energia termica dispersa nell'ambiente

$$q(t) = k(y(t) - y_{ext}(t)) \cong ky(t)$$

### Bilancio energetico

$$\frac{dQ(t)}{dt} = u(t) - ky(t)$$

$Q(t) = Cy(t)$  Energia interna  $\Longrightarrow C\dot{y}(t) = u(t) - ky(t)$

$$\dot{y}(t) + \frac{k}{C}y(t) = \frac{1}{C}u(t)$$

Equazione differenziale del 1° ordine, lineare, non omogenea, a coefficienti costanti

## Osservazione

$$\dot{y}(t) + \frac{k}{A}y(t) = \frac{k}{A}u(t) \quad \text{Serbatoio}$$

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}u(t) \quad \text{Carica  
condensatore}$$

$$\dot{y}(t) + \frac{k}{C}y(t) = \frac{1}{C}u(t) \quad \text{Forno}$$

$$\ddot{y}(t) + \frac{h}{M}\dot{y}(t) + \frac{k}{M}y(t) = \frac{1}{M}u(t) \quad \text{Massa-molla con  
attrito (smorzatore)}$$

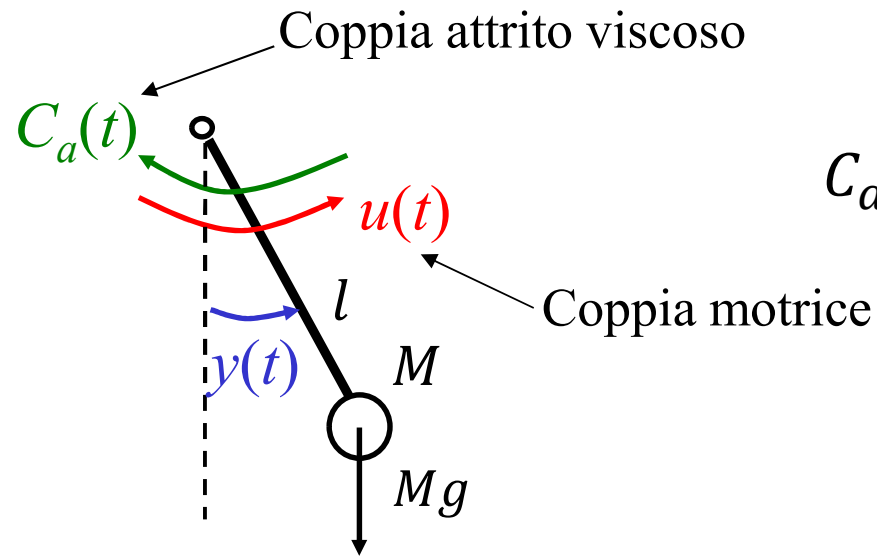
$$\ddot{y}(t) + \frac{R}{L}\dot{y}(t) + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{LC}u(t) \quad \text{Carica  
condensatore - induttore}$$

**Sono le stesse equazioni.**

**Descrivono le medesime  
relazioni causa-effetto.**

**Dal punto di vista  
dell'automatica sono  
sistemi dinamici con le  
medesime caratteristiche.**

## Esempio 6



$$J = Ml^2 \quad \text{Momento di inerzia}$$

$$C_a(t) = h\dot{y}(t) \quad \text{Coppia attrito viscoso}$$

### Bilancio coppie

Coppia apparente  $\longrightarrow J\ddot{y}(t) = u(t) - C_a(t) - Mgl \sin y(t)$

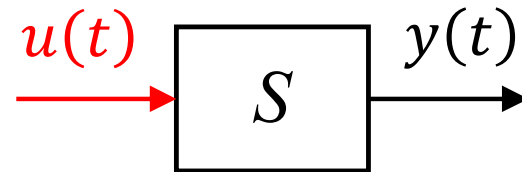
$$Ml^2\ddot{y}(t) = -h\dot{y}(t) - Mgl \sin y(t) + u(t)$$

Coppia di gravità

$$\ddot{y}(t) + \frac{h}{Ml^2}\dot{y}(t) + \frac{g}{l}\sin y(t) = \frac{1}{Ml^2}u(t)$$

Equazione differenziale del 2° ordine, **NON LINEARE**, non omogenea, a coefficienti costanti

## 4. Sistemi dinamici LTI SISO (punto di vista “esterno”)



Un sistema dinamico in cui la relazione tra l'ingresso (scalare)  $u(t)$  e l'uscita (scalare)  $y(t)$  è descritta da un'equazione differenziale di ordine  $n$ , lineare, a coefficienti costanti nella singola incognita  $y(t)$  si dice **sistema dinamico Lineare Tempo Invariante di ordine  $n$  SISO (Single Input Single Output)**.

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m \beta_i \frac{d^i u(t)}{dt^i} \quad \alpha_n = 1$$

con condizioni iniziali

$$y(0) = y_0; \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = y_{1,0}; \dots; \left. \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} \right|_{t=0} = y_{n-1,0}$$

con il vincolo  $m \leq n$  e con  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  reali.

## Osservazione

I sistemi LTI hanno una struttura semplice e sono disponibili molti risultati teorici per il loro studio (e per il progetto di controllori).

Inoltre, molti sistemi dinamici non lineari o tempo-varianti sono descrivibili mediante sistemi LTI (almeno in prima approssimazione).

Noi ci occuperemo in questo corso solo di **sistemi LTI SISO**.

## 5. Classificazione dei sistemi dinamici

### Sistema lineare

L'equazione differenziale è lineare nell'ingresso e nell'uscita.

Altrimenti, si dice non lineare

### Sistema tempo-invariante (o stazionario)

L'equazione differenziale ha coefficienti costanti (non dipendono dal tempo).

Altrimenti, si dice tempo-variante (o non stazionario)

## Sistema proprio

L'equazione differenziale ha derivate massime dell'uscita e dell'ingresso dello stesso ordine  $n$ .

Altrimenti, si dice strettamente proprio.

## Sistema SISO (Single Input Single Output)

Ingresso ed uscita sono scalari, cioè  $u(t) \in \mathfrak{R}$     $y(t) \in \mathfrak{R}$

Altrimenti, si dice MIMO (Multiple Input Multiple Output)

## Esempio - Il modello di Goodwin

E' un modello pubblicato\* nel 1965 da **Richard Goodwin**, un matematico ed economista statunitense.

L'obiettivo del lavoro è trovare un **modello matematico** in grado di spiegare perché, nell'economia globale del secondo dopoguerra, si siano alternati **periodi storici di forte crescita e sviluppo a periodi di crisi economica**.

Il modello è stato sviluppato con l'obiettivo di dimostrare che, nell'economia capitalista, è naturale che ci sia un alternarsi di periodi di crescita relativamente elevata con periodi di recessione.

Alla base di questo modello c'è il **modello preda-predatore** descritto dall'**equazione di Lotka-Volterra**.

*\*A Growth Cycle, Proceedings of the First World Congress of the Econometric Society, Rome, 1965*

Le **ipotesi di partenza** per la costruzione del modello sono le seguenti:

- 1) Solo due fattori produttivi: **lavoro** e **capitale** (macchinari, stabilimenti).
- 2) Il **tasso di crescita del progresso tecnologico** (e quindi della **produttività**) è costante.
- 3) Il **tasso di crescita dell'offerta di lavoro** è costante.
- 4) I **salari** vengono completamente spesi ed i **profitti** completamente reinvestiti (quindi gli investimenti sono uguali ai profitti).
- 5) Il **rapporto capitale/prodotto\*** è costante.
- 6) Il **tasso di crescita del salario orario** cresce con l'occupazione.
- 7) Le quantità utilizzate sono reali e nette.

\*capital/output ratio: capitale necessario per produrre un'unità di prodotto

Le **variabili in gioco** sono le seguenti:

<b>Grandezza</b>	<b>Simbolo</b>	<b>Unità di misura</b>
<b>Prodotto</b>	$q(t)$	\$
<b>Capitale</b>	$k(t)$	\$
<b>Salario orario</b>	$w(t)$	\$/h
<b>Forza lavoro</b>	$l(t)$	h
<b>Produttività</b>	$a(t) = \frac{q(t)}{l(t)}$	\$/h
<b>Rapporto capitale/prodotto</b>	$\frac{k(t)}{q(t)} = \sigma *$	
<b>Offerta di lavoro</b>	$n(t)$	h
<b>Tasso di occupazione</b>	$v(t) = \frac{l(t)}{n(t)}$	
<b>Investimenti</b>	$i(t)$	\$

\*per l'ipotesi 5).

Altre grandezze importanti sono:

✓ la **frazione di prodotto destinata ai lavoratori** è

$$\frac{w(t)l(t)}{q(t)} = \frac{w(t)}{a(t)} = u(t)$$

$u(t)$  è un numero puro ed è compreso tra 0 ed 1.

✓ la **frazione di prodotto per i capitalisti** è

$$1 - \frac{w(t)}{a(t)} = 1 - u(t)$$

Per l'**ipotesi 4)** si ha che tutta la frazione di prodotto dei capitalisti viene reinvestita, quindi gli **investimenti** sono

$$i(t) = (1 - u(t))q(t)$$

Per l'**ipotesi 2)**, il tasso di crescita della produttività è costante e pari ad  $\alpha$ , quindi

$$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \alpha$$

da cui

$$\dot{a}(t) = \alpha a(t)$$

e quindi l'**andamento della produttività** è

$$a(t) = a_0 e^{\alpha t}$$

Similmente, per l'**ipotesi 3)** se il tasso di crescita dell'offerta di lavoro è costante, cioè

$$\frac{\dot{n}(t)}{n(t)} = \beta$$

l'**andamento dell'offerta di lavoro** è

$$n(t) = n_0 e^{\beta t}$$

### **Nota**

Dire che il tasso di crescita di una quantità  $x(t)$  è costante, significa che  $\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = k$ .

Quindi se  $\dot{x}(t) = k x(t)$  si ottiene  $x(t) = x_0 e^{kt}$ , con  $x(0) = x_0$ .

## Prima equazione

La variazione del capitale è uguale agli investimenti

$$\dot{k}(t) = i(t)$$

Quindi

$$\dot{k}(t) = (1 - u(t))q(t)$$

da cui, dividendo per  $k(t)$  si ha il tasso di crescita del capitale

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = (1 - u(t)) \frac{q(t)}{k(t)} = \frac{1 - u(t)}{\sigma}$$

Siccome  $k(t) = \sigma q(t)$ , si ha che  $\dot{k}(t) = \sigma \dot{q}(t)$  da cui

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{1 - u(t)}{\sigma}$$

## Parentesi tecnica

Date tre variabili  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  tali che  $z(t) = \frac{x(t)}{y(t)}$  si ha che

$$\frac{\dot{z}(t)}{z(t)} = \frac{\frac{\dot{x}(t)y(t) - x(t)\dot{y}(t)}{y^2(t)}}{\frac{x(t)}{y(t)}} = \frac{\dot{x}(t)y(t) - x(t)\dot{y}(t)}{x(t)y(t)}$$

da cui si ha

$$\frac{\dot{z}(t)}{z(t)} = \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} - \frac{\dot{y}(t)}{y(t)}$$

Quindi, tornando alla prima equazione

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{1 - u(t)}{\sigma}$$

ricordando che  $a(t) = \frac{q(t)}{l(t)}$ , si ha che

$$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{\dot{q}(t)}{q(t)} - \frac{\dot{l}(t)}{l(t)}$$

e quindi

$$\frac{\dot{l}(t)}{l(t)} = \frac{\dot{q}(t)}{q(t)} - \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

Dal momento che  $a(t) = a_o e^{\alpha t}$ , si ha

$$\frac{\dot{l}(t)}{l(t)} = \frac{\dot{q}(t)}{q(t)} - \alpha$$

e quindi

$$\frac{\dot{l}(t)}{l(t)} = \frac{1 - u(t)}{\sigma} - \alpha$$

Similmente, ricordando che il tasso di occupazione è  $v(t) = \frac{l(t)}{n(t)}$  si ha che

$$\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = \frac{\dot{l}(t)}{l(t)} - \frac{\dot{n}(t)}{n(t)}$$

Ricordando l'equazione precedente e dal momento che  $n(t) = n_0 e^{\beta t}$ , si ha

$$\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = \frac{1 - u(t)}{\sigma} - \alpha - \beta$$

Ricordiamo che  $v(t)$  è il tasso di occupazione e  $u(t)$  è la frazione di prodotto destinata ai lavoratori (in sintesi il totale dei guadagni di tutti i lavoratori).

## Seconda equazione

L'ipotesi 6) afferma che il **tasso di crescita del salario orario**  $w(t)$  cresce con l'occupazione  $v(t)$ .

Questo si esprime come

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} = f(v(t))$$

dove  $f(\cdot)$  è una funzione monotona tipicamente con andamento esponenziale o di potenza. In questo contesto scegliamo una funzione lineare, per semplicità:

$$f(v(t)) = -\gamma + \rho v(t)$$

Dal momento che  $\frac{w(t)}{a(t)} = u(t)$  si ha che  $\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = \frac{\dot{w}(t)}{w(t)} - \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$  e quindi, ricordando che  $a(t) = a_0 e^{\alpha t}$  si ha

$$\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = -\gamma + \rho v(t) - \alpha$$

## Modello complessivo

Il modello complessivo è quindi espresso mediante la seguente coppia di equazioni

$$\begin{cases} \frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = \frac{1 - u(t)}{\sigma} - \alpha - \beta \\ \frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = -\gamma + \rho v(t) - \alpha \end{cases}$$

che si può scrivere come

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = \left( \frac{1}{\sigma} - \alpha - \beta \right) v(t) - \frac{1}{\sigma} u(t)v(t) \\ \dot{u}(t) = -(\alpha + \gamma)u(t) + \rho v(t)u(t) \end{cases}$$

Chiamando  $\frac{1}{\sigma} - \alpha - \beta = \omega$  ;  $-\frac{1}{\sigma} = \eta$ ;  $-(\alpha + \gamma) = \delta$  e indicando le variabili di stato  $x_1(t) = v(t)$  e  $x_2(t) = u(t)$  si ha

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \omega x_1(t) + \eta x_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \delta x_2(t) + \rho x_1(t)x_2(t) \end{cases}$$

Sistema non lineare, tempo invariante, del II ordine, autonomo (senza ingresso).

La variabile di stato  $x_1(t)$  indica il **tasso di occupazione**, mentre la seconda variabile di stato  $x_2(t)$  indica la **frazione di prodotto destinata ai lavoratori**.

Quindi il modello di Goodwin descrive la relazione (che vedremo essere ciclica) tra occupazione e salari in un'economia capitalista basata sul lavoro.