

**Esempio**

**Goodwin model**

# Il modello di Goodwin

E' un modello pubblicato\* nel 1965 da **Richard Goodwin**, un matematico ed economista statunitense.

L'obiettivo del lavoro è trovare un **modello matematico** in grado di spiegare perché, nell'economia globale del secondo dopoguerra, si siano alternati **periodi storici di forte crescita e sviluppo a periodi di crisi economica**.

Il modello è stato sviluppato con l'obiettivo di dimostrare che, nell'economia capitalista, è naturale che ci sia un alternarsi di periodi di crescita relativamente elevata con periodi di recessione.

Alla base di questo modello c'è il **modello preda-predatore** descritto dall'**equazione di Lotka-Volterra**.

*\*A Growth Cycle, Proceedings of the First World Congress of the Econometric Society, Rome, 1965*

Le **ipotesi di partenza** per la costruzione del modello sono le seguenti:

- 1) Solo due fattori produttivi: **lavoro** e **capitale** (macchinari, stabilimenti).
- 2) Il **tasso di crescita del progresso tecnologico** (e quindi della **produttività**) è costante.
- 3) Il **tasso di crescita dell'offerta di lavoro** è costante.
- 4) I **salari** vengono completamente spesi ed i **profitti** completamente reinvestiti (quindi gli investimenti sono uguali ai profitti).
- 5) Il **rapporto capitale/prodotto\*** è costante.
- 6) Il **tasso di crescita del salario orario** cresce con l'occupazione.
- 7) Le quantità utilizzate sono reali e nette.

\*capital/output ratio: capitale necessario per produrre un'unità di prodotto

Le **variabili in gioco** sono le seguenti:

<b>Grandezza</b>	<b>Simbolo</b>	<b>Unità di misura</b>
<b>Prodotto</b>	$q(t)$	\$
<b>Capitale</b>	$k(t)$	\$
<b>Salario orario</b>	$w(t)$	\$/h
<b>Forza lavoro</b>	$l(t)$	h
<b>Produttività</b>	$a(t) = \frac{q(t)}{l(t)}$	\$/h
<b>Rapporto capitale/prodotto</b>	$\frac{k(t)}{q(t)} = \sigma *$	
<b>Offerta di lavoro</b>	$n(t)$	h
<b>Tasso di occupazione</b>	$v(t) = \frac{l(t)}{n(t)}$	
<b>Investimenti</b>	$i(t)$	\$

\*per l'ipotesi 5).

Altre grandezze importanti sono:

- ✓ la **frazione di prodotto destinata ai lavoratori** è

$$\frac{w(t)l(t)}{q(t)} = \frac{w(t)}{a(t)} = u(t)$$

$u(t)$  è un numero puro ed è compreso tra 0 ed 1.

- ✓ la **frazione di prodotto per i capitalisti** è

$$1 - \frac{w(t)}{a(t)} = 1 - u(t)$$

Per l'**ipotesi 4)** si ha che tutta la frazione di prodotto dei capitalisti viene reinvestita, quindi gli **investimenti** sono

$$i(t) = (1 - u(t))q(t)$$

Per l'**ipotesi 2)**, il tasso di crescita della produttività è costante e pari ad  $\alpha$ , quindi

$$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \alpha$$

da cui

$$\dot{a}(t) = \alpha a(t)$$

e quindi l'**andamento della produttività** è

$$a(t) = a_0 e^{\alpha t}$$

Similmente, per l'**ipotesi 3)** se il tasso di crescita dell'offerta di lavoro è costante, cioè

$$\frac{\dot{n}(t)}{n(t)} = \beta$$

l'**andamento dell'offerta di lavoro** è

$$n(t) = n_0 e^{\beta t}$$

### **Nota**

Dire che il tasso di crescita di una quantità  $x(t)$  è costante, significa che  $\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = k$ .

Quindi se  $\dot{x}(t) = k x(t)$  si ottiene  $x(t) = x_0 e^{kt}$ , con  $x(0) = x_0$ .

## Prima equazione

La variazione del capitale è uguale agli investimenti

$$\dot{k}(t) = i(t)$$

Quindi

$$\dot{k}(t) = (1 - u(t))q(t)$$

da cui, dividendo per  $k(t)$  si ha il tasso di crescita del capitale

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = (1 - u(t)) \frac{q(t)}{k(t)} = \frac{1 - u(t)}{\sigma}$$

Siccome  $k(t) = \sigma q(t)$ , si ha che  $\dot{k}(t) = \sigma \dot{q}(t)$  da cui

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{1 - u(t)}{\sigma}$$

## Parentesi tecnica

Date tre variabili  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  tali che  $z(t) = \frac{x(t)}{y(t)}$  si ha che

$$\frac{\dot{z}(t)}{z(t)} = \frac{\frac{\dot{x}(t)y(t) - x(t)\dot{y}(t)}{y^2(t)}}{\frac{x(t)}{y(t)}} = \frac{\dot{x}(t)y(t) - x(t)\dot{y}(t)}{x(t)y(t)}$$

da cui si ha

$$\frac{\dot{z}(t)}{z(t)} = \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} - \frac{\dot{y}(t)}{y(t)}$$

Quindi, tornando alla prima equazione

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{1 - u(t)}{\sigma}$$

ricordando che  $a(t) = \frac{q(t)}{l(t)}$ , si ha che

$$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{\dot{q}(t)}{q(t)} - \frac{\dot{l}(t)}{l(t)}$$

e quindi

$$\frac{\dot{l}(t)}{l(t)} = \frac{\dot{q}(t)}{q(t)} - \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

Dal momento che  $a(t) = a_0 e^{\alpha t}$ , si ha

$$\frac{\dot{l}(t)}{l(t)} = \frac{\dot{q}(t)}{q(t)} - \alpha$$

e quindi

$$\frac{\dot{l}(t)}{l(t)} = \frac{1 - u(t)}{\sigma} - \alpha$$

Similmente, ricordando che il tasso di occupazione è  $v(t) = \frac{l(t)}{n(t)}$  si ha che

$$\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = \frac{\dot{l}(t)}{l(t)} - \frac{\dot{n}(t)}{n(t)}$$

Ricordando l'equazione precedente e dal momento che  $n(t) = n_0 e^{\beta t}$ , si ha

$$\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = \frac{1 - u(t)}{\sigma} - \alpha - \beta$$

Ricordiamo che  $v(t)$  è il tasso di occupazione e  $u(t)$  è la frazione di prodotto destinata ai lavoratori (in sintesi il totale dei guadagni di tutti i lavoratori).

## Seconda equazione

L'ipotesi 6) afferma che il **tasso di crescita del salario orario**  $w(t)$  cresce con l'occupazione  $v(t)$ .

Questo si esprime come

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} = f(v(t))$$

dove  $f(\cdot)$  è una funzione monotona tipicamente con andamento esponenziale o di potenza. In questo contesto scegliamo una funzione lineare, per semplicità:

$$f(v(t)) = -\gamma + \rho v(t)$$

Dal momento che  $\frac{w(t)}{a(t)} = u(t)$  si ha che  $\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = \frac{\dot{w}(t)}{w(t)} - \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$  e quindi, ricordando che  $a(t) = a_0 e^{\alpha t}$  si ha

$$\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = -\gamma + \rho v(t) - \alpha$$

## Modello complessivo

Il modello complessivo è quindi espresso mediante la seguente coppia di equazioni

$$\begin{cases} \frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = \frac{1 - u(t)}{\sigma} - \alpha - \beta \\ \frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = -\gamma + \rho v(t) - \alpha \end{cases}$$

che si può scrivere come

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = \left( \frac{1}{\sigma} - \alpha - \beta \right) v(t) - \frac{1}{\sigma} u(t)v(t) \\ \dot{u}(t) = -(\alpha + \gamma)u(t) + \rho v(t)u(t) \end{cases}$$

Chiamando  $\frac{1}{\sigma} - \alpha - \beta = \omega$  ;  $-\frac{1}{\sigma} = \eta$ ;  $-(\alpha + \gamma) = \delta$  e indicando le variabili di stato  $x_1(t) = v(t)$  e  $x_2(t) = u(t)$  si ha

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \omega x_1(t) + \eta x_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \delta x_2(t) + \rho x_1(t)x_2(t) \end{cases}$$

Sistema non lineare, tempo invariante, del II ordine, autonomo (senza ingresso).

La variabile di stato  $x_1(t)$  indica il **tasso di occupazione**, mentre la seconda variabile di stato  $x_2(t)$  indica la **frazione di prodotto destinata ai lavoratori**.

Quindi il modello di Goodwin descrive la relazione (che vedremo essere ciclica) tra occupazione e salari in un'economia capitalista basata sul lavoro.

## Stati di equilibrio

Per calcolare lo stato di equilibrio (in questo caso NON è in corrispondenza di un assegnato ingresso costante) annulliamo le derivate

$$\begin{cases} 0 = \omega \bar{x}_1 + \eta \bar{x}_1 \bar{x}_2 \\ 0 = \delta \bar{x}_2 + \rho \bar{x}_1 \bar{x}_2 \end{cases}$$

dove  $\bar{x}_1$  e  $\bar{x}_2$  sono le componenti dello stato di equilibrio.

Le equazioni precedenti hanno due soluzioni.

### *Equilibrio A*

$$\bar{\mathbf{x}}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### *Equilibrio B*

$$\bar{\mathbf{x}}_B = \begin{bmatrix} -\frac{\delta}{\rho} \\ \frac{\omega}{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha + \gamma}{\rho} \\ 1 - (\alpha + \beta)\sigma \end{bmatrix}$$

L'equilibrio A è banale e non «fisicamente» significativo.

Nell'equilibrio B abbiamo che:

$$\bar{x}_1 = \frac{\alpha + \gamma}{\rho}$$

cioè, il **valore di equilibrio del tasso di occupazione** dipende da:

- tasso di crescita della produttività (o del progresso tecnologico)  $\alpha$
- i parametri  $\gamma$  e  $\rho$  che definiscono la dipendenza lineare del tasso di crescita dei salari dall'occupazione.

$$\bar{x}_2 = 1 - (\alpha + \beta)\sigma$$

cioè, il **valore di equilibrio della frazione di prodotto per i lavoratori** dipende da:

- tasso di crescita della produttività (del progresso tecnologico)  $\alpha$
- tasso di crescita dell'offerta di lavoro  $\beta$
- rapporto capitale/prodotto  $\sigma$

Si noti che, più rapidamente crescono i salari più basso sarà il tasso di occupazione.

## Vincoli sui parametri

Siccome il tasso di occupazione  $v(t) \equiv x_1(t)$  è compreso tra 0 ed 1 si ha che anche il suo valore di equilibrio lo è, cioè

$$0 \leq \frac{\alpha + \gamma}{\rho} \leq 1$$

da cui

$$0 \leq \alpha + \gamma \leq \rho$$

Similmente, la frazione del prodotto destinata ai lavoratori  $u(t) \equiv x_2(t)$  è compresa tra 0 ed 1 e quindi si ha che

$$0 \leq 1 - (\alpha + \beta)\sigma \leq 1$$

da cui

$$0 \leq (\alpha + \beta)\sigma \leq 1$$

## Linearizzazione

Calcoliamo il sistema lineare tangente approssimato intorno all'equilibrio B.

Il modello non lineare è

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \omega x_1(t) + \eta x_1(t)x_2(t) \equiv f_1(x_1(t), x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) = \delta x_2(t) + \rho x_1(t)x_2(t) \equiv f_2(x_1(t), x_2(t)) \end{cases}$$

e quindi il sistema linearizzato sarà descritto dall'equazione lineare

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t)$$

dove  $\xi(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) - \bar{x}_1 \\ x_2(t) - \bar{x}_2 \end{bmatrix}$  è lo stato del sistema linearizzato («piccole variazioni») e

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} = \begin{bmatrix} \omega + \eta\bar{x}_2 & \eta\bar{x}_1 \\ \rho\bar{x}_2 & \delta + \rho\bar{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega + \eta\left(-\frac{\omega}{\eta}\right) & \eta\left(-\frac{\delta}{\rho}\right) \\ \rho\left(-\frac{\omega}{\eta}\right) & \delta + \rho\left(-\frac{\delta}{\rho}\right) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \eta\left(-\frac{\delta}{\rho}\right) \\ \rho\left(-\frac{\omega}{\eta}\right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\alpha+\gamma}{\sigma\rho} \\ \rho[1 - (\alpha + \beta)\sigma] & 0 \end{bmatrix}$$

## Stabilità del sistema linearizzato

Calcoliamo gli autovalori della matrice  $A$

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & \frac{\delta\eta}{\rho} \\ \frac{\omega\rho}{\eta} & s \end{bmatrix} = s^2 - \delta\omega$$

Si ha che  $\delta = -(\alpha + \gamma) < 0$ , mentre  $\omega = \frac{1}{\sigma} - \alpha - \beta$  è positivo se  $\frac{1}{\sigma} > \alpha + \beta$ , condizione sempre verificata perché deve essere  $(\alpha + \beta)\sigma \leq 1$ .

Quindi  $\delta\omega < 0$  e gli autovalori della matrice  $A$  sono immaginari puri:

$$s^2 - \delta\omega = s^2 + |\delta|\omega = 0$$
$$s_{1,2} = \pm j\theta$$

dove  $\theta = \sqrt{-\delta\omega}$  è la **frequenza propria naturale** del sistema.

Il sistema linearizzato è quindi **semplicemente stabile**.

Nulla si può dire della stabilità del corrispondente equilibrio del sistema non lineare.

## Movimento dello stato del sistema linearizzato

Il modello linearizzato è

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t)$$

Applichiamo la trasformazione di Laplace ad entrambi i membri

$$s\mathbf{Z}(s) - \xi(0) = A\mathbf{Z}(s)$$

$$(sI - A)\mathbf{Z}(s) = \xi(0)$$

$$\mathbf{Z}(s) = (sI - A)^{-1}\xi(0)$$

Calcoliamo  $(sI - A)^{-1}$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & \frac{\delta\eta}{\rho} \\ \frac{\omega\rho}{\eta} & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \begin{bmatrix} s & -\frac{\delta\eta}{\rho} \\ -\frac{\omega\rho}{\eta} & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + \theta^2} & \frac{-\frac{\delta\eta}{\rho}}{s^2 + \theta^2} \\ \frac{-\frac{\omega\rho}{\eta}}{s^2 + \theta^2} & \frac{s}{s^2 + \theta^2} \end{bmatrix}$$

Quindi, data una condizione iniziale per lo stato  $\xi(0) = \begin{bmatrix} \xi_{10} \\ \xi_{20} \end{bmatrix}$  si ha

$$\mathbf{Z}(s) = (sI - A)^{-1} \xi(0) = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + \theta^2} & \frac{-\frac{\delta\eta}{\rho}}{s^2 + \theta^2} \\ \frac{-\frac{\omega\rho}{\eta}}{s^2 + \theta^2} & \frac{s}{s^2 + \theta^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{10} \\ \xi_{20} \end{bmatrix}$$

Quindi

$$Z_1(s) = \frac{s}{s^2 + \theta^2} \xi_{10} + \frac{-\frac{\delta\eta}{\rho}}{s^2 + \theta^2} \xi_{20} = \xi_{10} \boxed{\frac{s}{s^2 + \theta^2}} - \xi_{20} \frac{\eta}{\rho} \sqrt{\frac{-\delta}{\omega}} \boxed{\frac{\theta}{s^2 + \theta^2}}$$

$$Z_2(s) = \frac{-\frac{\omega\rho}{\eta}}{s^2 + \theta^2} \xi_{10} + \frac{s}{s^2 + \theta^2} \xi_{20} = \xi_{20} \boxed{\frac{s}{s^2 + \theta^2}} - \xi_{10} \frac{\rho}{\eta} \sqrt{\frac{\omega}{-\delta}} \boxed{\frac{\theta}{s^2 + \theta^2}}$$

da cui, antitrasformando, si ottiene il movimento dello stato del sistema linearizzato

$$\xi_1(t) = \xi_{10} \cos(\theta t) - \xi_{20} \varepsilon \sin(\theta t)$$

$$\xi_2(t) = \xi_{20} \cos(\theta t) - \frac{\xi_{10}}{\varepsilon} \sin(\theta t)$$

## Simulazione Matlab

Risoluzione numerica di equazioni differenziali usando Matlab/Simulink (senza pretesa di esaustività, è solo un esempio).

Usiamo il comando **ode45**. La sintassi è la seguente

```
[t,y] = ode45(odefun,tspan,y0)
```

**odefun** è una Matlab function creata dall'utente, che descrive l'equazione differenziale.

**tspan** è l'intervallo di tempo su cui desidero integrare l'equazione.

**y0** è la condizione iniziale.

**t,y** sono due vettori che contengono la soluzione  $y$  al tempo  $t$ .

Come si costruisce una `odefun` per il modello di Goodwin?

E' una matlab `function`, che si scrive dentro un file `.m`, e che contiene l'espressione della derivata prima dell'incognita in funzione dell'incognita stessa, del tempo e di eventuali parametri.

```
function dydt=goodwin(y,t,parameters)
```

```
omega=parameters(1); eta=parameters(2);
```

```
delta=parameters(3); rho=parameters(4);
```

```
dydt(1)=omega*y(1)+eta*y(1)*y(2);
```

```
dydt(2)=delta*y(2)+rho*y(1)*y(2);
```

L'utilizzo di `ode45` è molto semplice.

Direttamente nel Workspace definiamo i valori dei parametri e li mettiamo nel vettore `parameters`, per esempio:

```
>> sigma=3; alpha=0.001; beta=0.001; rho=1; gamma=0.95;
```

Poi calcoliamo i parametri derivati:

```
>> omega=1/sigma-alpha-beta;
```

```
>> eta=-1/sigma;
```

```
>> delta=-alpha-gamma;
```

Quindi, “impacchettiamo” tutto:

```
>> parameters(1)=omega; parameters(2)=eta;
```

```
>> parameters(3)=delta; parameters(4)=rho;
```

Ovviamente, si può fare tutto “in un colpo solo”.

A questo punto bisogna scegliere delle condizioni iniziali, ricordando che le due incognite sono comprese tra 0 ed 1. Per esempio possiamo sceglierle causalmente:

```
>> y0=rand(2,1);
```

Poi scegliamo l'intervallo di tempo di integrazione, per esempio da 0 a 10 :

```
>> tspan=[0 50];
```

Quindi, calcoliamo la soluzione:

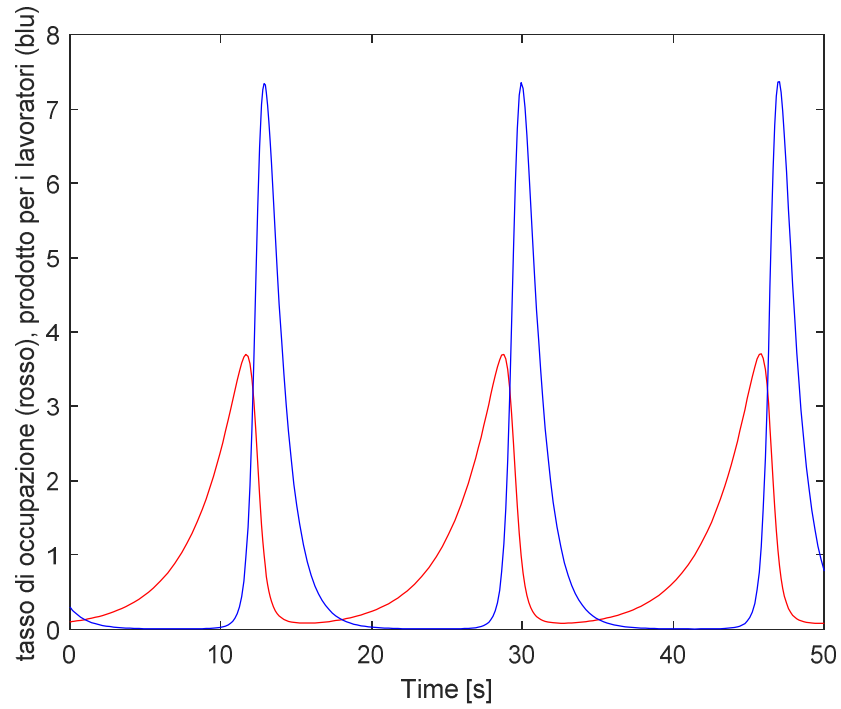
```
>> [t,y] = ode45(@(t,y) goodwin(t,y,parameters),tspan,y0);
```

Ed infine disegnare l'andamento delle soluzioni

```
>> plot(t,y(:,1),'r',t,y(:,2),'b')
```

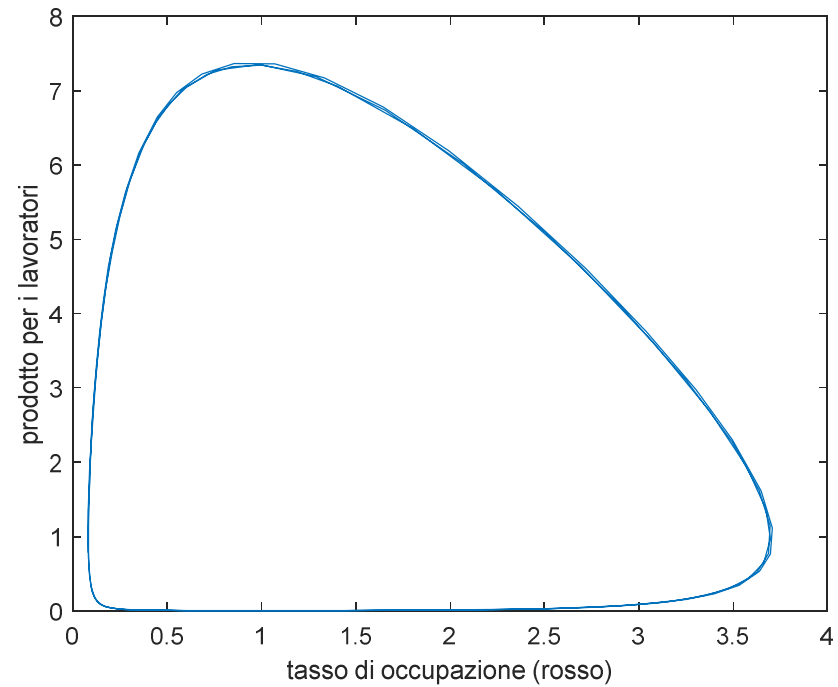
```
>> xlabel('Time [s]')
```

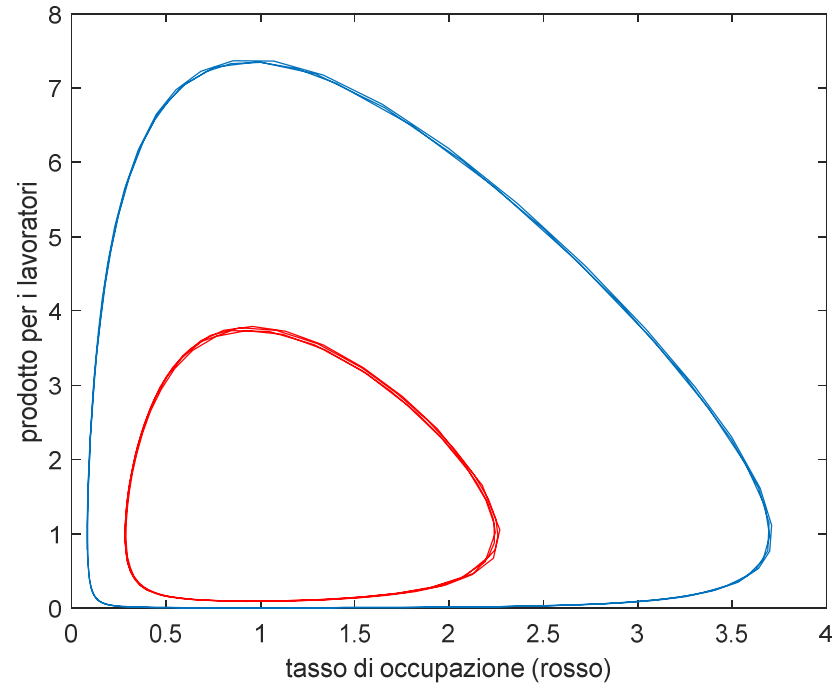
```
>> ylabel('tasso di occupazione (rosso), prodotto per i  
lavoratori (blu)')
```



Movimento del sistema  
(andamento nel tempo delle soluzioni)

Diagramma delle fasi





Diagrammi delle fasi per due differenti condizioni iniziali

### Nota

Si osservi che le soluzioni assumono valori superiori ad 1, fatto fisicamente non significativo. Ciò è dovuto all'approssimazione lineare del tasso di crescita dei salari.