ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico LTI SISO a tempo discreto descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$\boldsymbol{y(k) = \frac{3}{4}y(k-1) - \frac{1}{8}y(k-2) + u(k-1) - \frac{3}{4}u(k-2)}$$

1) **Calcolare, se esiste, l'uscita di equilibrio del sistema in corrispondenza dell'ingresso costante $\boldsymbol{u(k) = \bar{u} = 1}$.**
   All'equilibrio, oltre che un ingresso costante, si ha che $y(k) = y(k-1) = y(k-2) = \bar{y}$.
   $$\bar{y} = \frac{3}{4}\bar{y} - \frac{1}{8}\bar{y} + \bar{u} - \frac{3}{4}\bar{u}$$
   da cui si ha
   $$\bar{y}\left(1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{8}\right) = \left(1 - \frac{3}{4}\right)\bar{u}$$
   $$\frac{3}{8}\bar{y} = \frac{1}{4}$$
   $$\bar{y} = \frac{2}{3}$$

2) **Calcolare, se possibile, il guadagno statico del sistema.**
   Il guadagno statico è definito dal rapporto tra l'uscita di regime ed il valore costante dell'ingresso che l'ha generata
   $$\mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{2}{3}$$

3) **Calcolare i primi quattro campioni $\boldsymbol{y(0), y(1), y(2), y(3)}$ della risposta allo scalino unitario del sistema.**

k	$u(k)$	$y(k)$
0	1	$y(0) = \frac{3}{4}y(-1) - \frac{1}{8}y(-2) + u(-1) - \frac{3}{4}u(-2) = 0$
1	1	$y(1) = \frac{3}{4}y(0) - \frac{1}{8}y(-1) + u(0) - \frac{3}{4}u(-1) = 1$
2	1	$y(2) = \frac{3}{4}y(1) - \frac{1}{8}y(0) + u(1) - \frac{3}{4}u(0) = \frac{3}{4} + 1 - \frac{3}{4} = 1$
3	1	$y(3) = \frac{3}{4}y(2) - \frac{1}{8}y(1) + u(2) - \frac{3}{4}u(1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} + 1 - \frac{3}{4} = \frac{7}{8}$

4) Calcolare la funzione di trasferimento del sistema e calcolare poli, zeri, guadagno e tipo del sistema e giudicare la stabilità del sistema

$$y(k) = \frac{3}{4}z^{-1}y(k) - \frac{1}{8}z^{-2}y(k) + z^{-1}u(k) - \frac{3}{4}z^{-2}u(k)$$
$$y(k)\left(1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}\right) = \left(z^{-1} - \frac{3}{4}z^{-2}\right)u(k)$$

da cui si ottiene

$$G(z) = \frac{z^{-1} - \frac{3}{4}z^{-2}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{z - \frac{3}{4}}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}}$$

La funzione di trasferimento ha

Zero in $z_1 = +\frac{3}{4}$

Poli in $p_{1,2} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9}{64} - \frac{1}{8}} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{3}{8} \pm \frac{1}{8}$ $\qquad p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{1}{2}$

Tipo $g = 0$

Guadagno $\mu = G(1) = \frac{1-\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}+\frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}$

Si osservi che, come doveva essere, il guadagno della funzione di trasferimento è uguale al guadagno statico del sistema.

Infine, essendo entrambi i poli interni al cerchio di raggio unitario, si può concludere che il sistema è asintoticamente stabile.

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema dinamico LTI SISO a tempo discreto descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$\boldsymbol{y(k) = \frac{1}{2}y(k-1) + \frac{1}{2}y(k-2) + u(k-1) - \frac{1}{4}u(k-2)}$$

1) **Calcolare, se esiste, l'uscita di equilibrio del sistema in corrispondenza dell'ingresso costante $\boldsymbol{u(k) = \bar{u} = 4}$.**
   All'equilibrio, oltre che un ingresso costante, si ha che $y(k) = y(k-1) = y(k-2) = \bar{y}$.
   $$\bar{y} = \frac{1}{2}\bar{y} + \frac{1}{2}\bar{y} + \bar{u} - \frac{1}{4}\bar{u}$$
   da cui si ha
   $$\bar{y}\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\bar{u}$$
   L'equazione è impossibile per tutti gli $\bar{u} \neq 0$, cioè non esiste alcuna uscita di equilibrio in corrispondenza di qualsiasi ingresso costante non nullo.
   In corrispondenza di $\bar{u} = 0$ l'equazione è indeterminata, ovvero è risolta da qualsiasi $\bar{y}$ e quindi, in corrispondenza di ingresso nullo il sistema ammette infiniti stati di equilibrio

2) **Calcolare, se possibile, il guadagno statico del sistema.**
   In questo caso non è possibile calcolare il guadagno statico del sistema (non è definito), poiché non esiste un valore costante dell'uscita in corrispondenza di alcun ingresso costante.

3) **Calcolare la funzione di trasferimento del sistema e calcolare poli, zeri, guadagno e tipo del sistema e giudicare la stabilità del sistema**

   $$y(k) = \frac{1}{2}z^{-1}y(k) + \frac{1}{2}z^{-2}y(k) + z^{-1}u(k) - \frac{1}{4}z^{-2}u(k)$$
   $$y(k)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}\right) = \left(z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-2}\right)u(k)$$
   da cui si ottiene
   $$G(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{z - \frac{1}{4}}{z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}}$$
   La funzione di trasferimento ha
   Zero in $z_1 = +\frac{1}{4}$
   Poli in $p_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$ $\qquad p_1 = -\frac{1}{2}, p_2 = +1$
   Tipo $g = 1$
   Guadagno (generalizzato) $\mu = \lim_{z \to 1}(z-1)^g\, G(z) = \lim_{z \to 1}(z-1)\frac{z - \frac{1}{4}}{(z-1)\left(z + \frac{1}{2}\right)} = \lim_{z \to 1}\frac{z - \frac{1}{4}}{z + \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$
   La funzione di trasferimento ha un polo in $+1$ (un integratore a tempo discreto) ed un polo con modulo minore di 1 è quindi il sistema è semplicemente stabile.

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema dinamico LTI SISO a tempo discreto descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$\boldsymbol{y(k)=\frac{1}{2}y(k-1)-\frac{1}{16}y(k-2)+u(k)-\frac{3}{2}u(k-1)+\frac{1}{2}u(k-2)}$$

1) **Calcolare, se esiste, l'uscita di equilibrio del sistema in corrispondenza dell'ingresso costante $\boldsymbol{u(k)=\bar{u}=2}$.**
   All'equilibrio, oltre che un ingresso costante, si ha che $y(k)=y(k-1)=y(k-2)=\bar{y}$.
   $$\bar{y}=\frac{1}{2}\bar{y}-\frac{1}{16}\bar{y}+\bar{u}-\frac{3}{2}\bar{u}+\frac{1}{2}\bar{u}$$
   da cui si ha
   $$\bar{y}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{16}\right)=\left(1-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\bar{u}$$
   e quindi
   $$\bar{y}=0$$
   L'uscita di equilibrio è nulla per tutti gli ingressi costanti $\bar{u}$.

2) **Calcolare, se possibile, il guadagno statico del sistema.**
   Il guadagno statico è definito dal rapporto tra l'uscita di regime ed il valore costante dell'ingresso che l'ha generata
   $$\mu=\frac{\bar{y}}{\bar{u}}=\frac{0}{\bar{u}}=0$$
   Il guadagno statico è nullo.

3) **Calcolare la funzione di trasferimento del sistema e calcolare poli, zeri, guadagno e tipo del sistema e giudicare la stabilità del sistema**

$$y(k)=\frac{1}{2}z^{-1}y(k)-\frac{1}{16}z^{-2}y(k)+u(k)-\frac{3}{2}z^{-1}u(k)+\frac{1}{2}z^{-2}u(k)$$
$$y(k)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{16}z^{-2}\right)=\left(1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)u(k)$$

da cui si ottiene

$$G(z)=\frac{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{16}z^{-2}}=\frac{z^2-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}}{z^2-\frac{1}{2}z+\frac{1}{16}}$$

La funzione di trasferimento ha

Zeri in $z_{1,2}=\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}-\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{3}{4}\pm\frac{1}{4}$ $\qquad z_1=+\frac{1}{2}, z_2=+1$

Poli in $p_{1,2}=\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}-\frac{1}{16}}=+\frac{1}{4}$ coincidenti

Tipo $g=-1$

Guadagno (generalizzato) $\mu=\lim_{z\to1}(z-1)^g\,G(z)=\lim_{z\to1}\frac{1}{(z-1)}\frac{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}{\left(z-\frac{1}{4}\right)^2}=$

$$=\lim_{z\to1}\frac{z-\frac{1}{2}}{\left(z-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{1-\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{16}}=\frac{8}{9}$$

La funzione di trasferimento ha uno zero in $+1$ (un derivatore a tempo discreto) ed è questo il motivo per cui il guadagno statico del sistema è nullo. Infatti, per effetto della presenza del derivatore, in seguito ad un ingresso costante, l'uscita di equilibrio sarà nulla.
Infine, avendo due poli con modulo minore di 1, il sistema è asintoticamente stabile.

ESERCIZIO 4

Si considerino i due sistemi dinamici LTI SISO a tempo descritti dalle seguenti funzioni di trasferimento

$$\boldsymbol{G_1(z) = \frac{z+\frac{1}{2}}{z\left(z-\frac{1}{2}\right)} \qquad G_2(z) = \frac{\alpha}{z}}$$

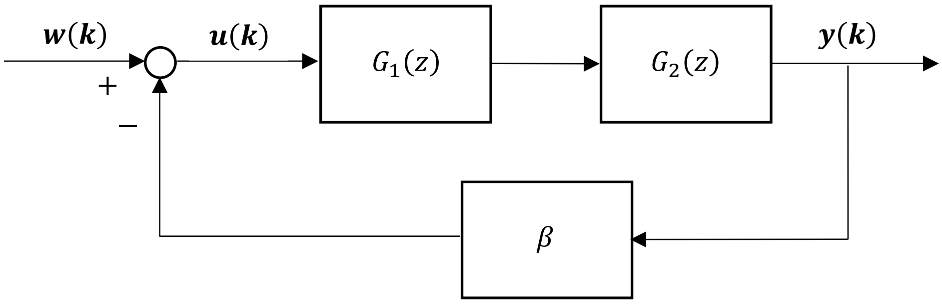
1) **Giudicare la stabilità dei due sistemi.**
   Il sistema descritto dalla funzione di trasferimento $G_1(z)$ ha due poli, uno nell'origine ed uno in $+\frac{1}{2}$, entrambi interni al cerchio di raggio unitario. Perciò il sistema è asintoticamente stabile.
   Il sistema descritto dalla funzione di trasferimento $G_2(z)$ ha un polo nell'origine, quindi interno al cerchio di raggio unitario. Perciò il sistema è asintoticamente stabile.

2) **Calcolare la funzione di trasferimento del sistema che si ottiene mediante connessione in serie dei due sistemi. Giudicare la stabilità del sistema complessivo.**
   La funzione di trasferimento complessiva è

$$G(z) = G_1(z)G_2(z) = \frac{z+\frac{1}{2}}{z\left(z-\frac{1}{2}\right)}\frac{\alpha}{z} = \frac{\alpha\left(z+\frac{1}{2}\right)}{z^2\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

   Il sistema complessivo è ovviamente asintoticamente stabile, dal momento che la connessione in serie di sistemi asintoticamente stabili è asintoticamente stabile.

3) **Considerando il sistema ottenuto al punto precedente, siano $\boldsymbol{u(k)}$ ed $\boldsymbol{y(k)}$ rispettivamente l'ingresso e l'uscita del sistema complessivo.**
   Si consideri la legge di controllo $\boldsymbol{u(k) = w(k) - \beta y(k)}$, dove $\boldsymbol{w(k)}$ è la variabile di riferimento.
   Si disegni lo schema a blocchi del sistema complessivo.



4) **Con riferimento al sistema retroazionato del punto precedente, con ingresso $\boldsymbol{w(k)}$ ed uscita $\boldsymbol{y(k)}$ calcolare, se esistono, i valori di $\boldsymbol{\alpha, \beta}$ reali per cui il sistema è un sistema FIR.**
   Innanzitutto, calcoliamo la funzione di trasferimento complessiva del sistema retroazionato dall'ingresso $w(k)$ all'uscita $y(k)$.
   La funzione di trasferimento d'andata è

$$G_A(z) = G_1(z)G_2(z)$$

   La funzione di trasferimento d'anello è

$$L(z) = \beta G_1(z)G_2(z)$$

Quindi, essendo la retroazione negativa, si ha

$$F(z)=\frac{G_A(z)}{1+L(z)}=\frac{G_1(z)G_2(z)}{1+\beta G_1(z)G_2(z)}=\frac{\dfrac{\alpha\left(z+\frac{1}{2}\right)}{z^2\left(z-\frac{1}{2}\right)}}{1+\dfrac{\alpha\beta\left(z+\frac{1}{2}\right)}{z^2\left(z-\frac{1}{2}\right)}}=\frac{\alpha\left(z+\frac{1}{2}\right)}{z^2\left(z-\frac{1}{2}\right)+\alpha\beta\left(z+\frac{1}{2}\right)}=$$

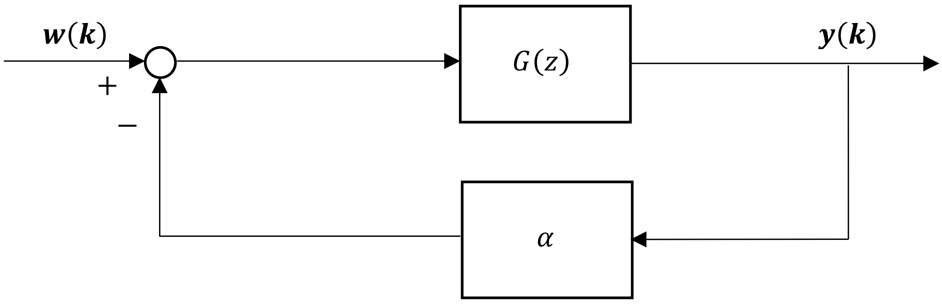
$$=\frac{\alpha\left(z+\frac{1}{2}\right)}{z^3-\frac{1}{2}z^2+\alpha\beta z+\frac{1}{2}\alpha\beta}$$

Perché il sistema complessivo sia un FIR è necessario che la sua funzione di trasferimento abbia tutti e soli i poli nell'origine, cosa che non può accadere per alcun valore di α,β.

Nota Bene. Si osservi che era possibile giungere alla medesima conclusione senza calcolare esplicitamente la funzione di trasferimento del sistema retroazionato. Infatti, calcolando la funzione di trasferimento d'anello $L(z)=\frac{N_L(z)}{D_L(z)}$, è noto che i poli del sistema retroazionato sono le radici di $N_L(z)+D_L(z)=0$.

ESERCIZIO 5

Si consideri il sistema dinamico LTI SISO a tempo discreto descritto dal seguente schema a blocchi



dove $G(z)=\frac{\frac{1}{4}}{z+2}$ e α è una costante reale.

1) **Si calcoli per quali valori di α il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.**
La funzione di trasferimento d'anello è

$$L(z)=\alpha G(z)=\frac{\frac{1}{4}\alpha}{z+2}$$

Quindi il polo in anello chiuso è dato dall'equazione

$$\frac{1}{4}\alpha+z+2=0$$
$$z=-\frac{1}{4}\alpha-2$$

Perché il sistema sia asintoticamente stabile deve essere

$$\left|-\frac{1}{4}\alpha-2\right|<1$$

ed essendo α reale si ha

$$-1<-\frac{1}{4}\alpha-2<+1$$

da cui si ottiene

$$-12<\alpha<-4$$

2) **In corrispondenza di $\alpha=-6$ calcolare i primi quattro campioni $y(0), y(1), y(2), y(3)$ della risposta allo scalino unitario del sistema utilizzando il metodo della lunga divisione.**
In corrispondenza di $\alpha=-6$ la funzione di trasferimento complessiva del sistema retroazionato è

$$F(z)=\frac{Y(z)}{W(z)}=\frac{\frac{\frac{1}{4}}{z+2}}{1+\frac{\frac{1}{4}\alpha}{z+2}}=\frac{\frac{1}{4}}{z+2+\frac{1}{4}\alpha}=\frac{\frac{1}{4}}{z+\frac{1}{2}}$$

L'ingresso è $w(k)=sca(k)$ e quindi $W(z)=\frac{z}{z-1}$ per cui si ha

$$Y(z)=F(z)W(z)=\frac{\frac{1}{4}}{z+\frac{1}{2}}\frac{z}{z-1}=\frac{\frac{1}{4}z}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-1)}=\frac{\frac{1}{4}z}{z^2-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}}$$

$$
\begin{array}{l|l}
+\frac{1}{4}z & z^2-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2} \\
\hline
-\frac{1}{4}z+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}z^{-1} & \frac{1}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}+\frac{3}{16}z^{-3} \\
\hline
\quad +\frac{1}{8}+\frac{1}{8}z^{-1} & \\
\quad -\frac{1}{8}+\frac{1}{16}z^{-1}+\frac{1}{16}z^{-2} & \\
\hline
\qquad +\frac{3}{16}z^{-1}+\frac{1}{16}z^{-2} &
\end{array}
$$

Dal risultato della lunga divisione possiamo ricavare che $y(0)=0, y(1)=\frac{1}{4}, y(2)=\frac{1}{8}, y(3)=\frac{3}{16}$.

3) Si calcoli, se esistono, per quali valori di α il sistema retroazionato è un filtro FIR

Come già detto al punto 1, la funzione di trasferimento d’anello è

$$L(z)=\alpha G(z)=\frac{\frac{1}{4}\alpha}{z+2}$$

e quindi il polo in anello chiuso è dato dall’equazione

$$\frac{1}{4}\alpha+z+2=0$$
$$z=-\frac{1}{4}\alpha-2$$

Esso è nell’origine se $-\frac{1}{4}\alpha-2=0$, cioè se $\alpha=-8$.

Utilizzando i calcoli svolti al punto 2 si può verificare che in corrispondenza di tale valore di α la funzione di trasferimento in anello chiuso è

$$F(z)=\frac{Y(z)}{W(z)}=\frac{\frac{\frac{1}{4}}{z+2}}{1+\frac{\frac{1}{4}\alpha}{z+2}}=\frac{\frac{1}{4}}{z+2+\frac{1}{4}\alpha}=\frac{\frac{1}{4}}{z}$$

che è la funzione di trasferimento di un sistema FIR.