

ESERCIZIO 1

Si consideri un sistema dinamico a tempo continuo LTI SISO con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$ descritto da una funzione di trasferimento $G(s)$ del primo ordine, strettamente propria e con guadagno positivo.

Determinare $G(s)$ sapendo che a fronte dell'ingresso $u(t) = \sin(3t)$ l'uscita a transitorio esaurito vale $y(t) = 4\sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$

La funzione di trasferimento ha la seguente espressione

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + s\tau}$$

con $\mu > 0$.

Per il teorema della risposta in frequenza, nell'ipotesi $\tau > 0$ per avere asintotica stabilità, si ha che applicando l'ingresso $u(t) = \sin(3t)$, l'uscita a transitorio esaurito sarà

$$y(t) = |G(j3)|\sin(3t + \arg G(j3))$$

Per rispettare la condizione del testo dell'esercizio deve essere

$$\begin{cases} |G(j3)| = 4 \\ \arg G(j3) = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Essendo

$$G(j\omega) = \frac{\mu}{1 + j\omega\tau}$$

si ha che

$$G(j3) = \frac{\mu}{1 + j3\tau}$$

da cui

$$\begin{cases} |G(j3)| = \frac{\mu}{\sqrt{1 + 9\tau^2}} \\ \arg G(j3) = -\arctg(3\tau) \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{cases} \frac{\mu}{\sqrt{1 + 9\tau^2}} = 4 \\ \arctg(3\tau) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene $\tau = \frac{1}{3}$ che sostituito nella prima equazione fornisce $\mu = 4\sqrt{2}$.

Quindi il risultato è

$$G(s) = \frac{4\sqrt{2}}{1 + \frac{1}{3}s}$$

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo LTI SISO con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$ descritto dalla seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = 2 - 3e^{-2s}$$

1) Scrivere l'espressione del legame tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$ nel dominio del tempo.

$$Y(s) = G(s)U(s) = (2 - 3e^{-2s})U(s) = 2U(s) - 3e^{-2s}U(s)$$

Antitrasformando si ottiene

$$y(t) = 2u(t) - 3u(t - 2)$$

2) Giustificare il fatto che il sistema è lineare.

Il sistema è lineare perché per esso vale il principio di sovrapposizione degli effetti.

Infatti, applicando l'ingresso $u'(t)$ si ha l'uscita $y'(t) = 2u'(t) - 3u'(t - 2)$.

Applicando l'ingresso $u''(t)$ si ha l'uscita $y''(t) = 2u''(t) - 3u''(t - 2)$.

Applicando infine una combinazione lineare dei due ingressi precedenti $u(t) = \alpha u'(t) + \beta u''(t)$, con α, β reali, si ottiene come uscita la combinazione lineare delle due uscite precedenti (la sovrapposizione degli effetti) con i medesimi coefficienti:

$$\begin{aligned} y(t) &= 2(\alpha u'(t) + \beta u''(t)) - 3(\alpha u'(t - 2) + \beta u''(t - 2)) = \\ &= 2\alpha u'(t) - 3\alpha u'(t - 2) + 2\beta u''(t) - 3\beta u''(t - 2) = \\ &= \alpha(2u'(t) - 3u'(t - 2)) + \beta(2u''(t) - 3u''(t - 2)) = \\ &= \alpha y'(t) + \beta y''(t) \end{aligned}$$

3) Calcolare la risposta allo scalino unitario del sistema e verificare che essa tende asintoticamente al valore del guadagno del sistema.

Si può procedere direttamente nel dominio del tempo.

Applicando l'ingresso $u(t) = sca(t)$ si ha

$$y(t) = 2sca(t) - 3sca(t - 2)$$

Si ha che

$$y(\infty) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (2sca(t) - 3sca(t - 2)) = -1$$

Il guadagno del sistema è

$$\mu = G(0) = 2 - 3e^{-2 \cdot 0} = 2 - 3 = -1$$

4) Determinare la risposta del sistema all'ingresso $u(t) = \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$ e verificare che il risultato ottenuto è in accordo con il teorema della risposta in frequenza.

Applicando l'ingresso $u(t) = \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$ si ha

$$y(t) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{4}(t-2)\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Ricordando che $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$ si ha che

$$y(t) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \quad (1)$$

Per verificare se questo risultato è in accordo con il teorema della risposta in frequenza è necessario ricondurlo, se possibile, alla forma

$$y(t) = \alpha \sin\left(\frac{\pi}{4}t + \gamma\right) \quad (2)$$

con $\alpha > 0$ dal momento che esso rappresenta il modulo della risposta in frequenza.

Per trovare i valori di α e γ tali per cui le due espressioni (1) e (2) dell'uscita $y(t)$ siano identiche, si possono imporre le seguenti condizioni:

- Per $t = 0$ si ha che $y(0) = 2\sin(0) + 3\cos(0) = 3$ e similmente nella (2) $y(0) = \alpha \sin(\gamma)$
- Per $t = 2$ si ha che $y(2) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ e similmente nella (2)
 $y(2) = \alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) = \alpha \cos(\gamma)$

Si hanno quindi le seguenti equazioni

$$\begin{cases} \alpha \sin(\gamma) = 3 \\ \alpha \cos(\gamma) = 2 \end{cases}$$

da cui si ottiene che $\operatorname{tg}(\gamma) = \frac{3}{2}$ e quindi

$$\gamma = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\right)$$

e $\alpha^2 \sin^2(\gamma) + \alpha^2 \cos^2(\gamma) = 9 + 4$ e quindi

$$\alpha = \sqrt{13}$$

e quindi si può concludere che applicando l'ingresso $u(t) = \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$ l'uscita vale

$$y(t) = \sqrt{13} \sin\left(\frac{\pi}{4}t + \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\right)\right)$$

Ora, perché valga il teorema della risposta in frequenza, nella (2) deve essere $\alpha = \left|G\left(j\frac{\pi}{4}\right)\right|$ e $\gamma = \arg G\left(j\frac{\pi}{4}\right)$.

Essendo $G(j\omega) = 2 - 3e^{-2j\omega}$ si ha che, come ci si aspettava

$$\alpha = \left|G\left(j\frac{\pi}{4}\right)\right| = \left|2 - 3e^{-j\frac{\pi}{2}}\right| = |2 + 3j| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$\gamma = \arg G\left(j\frac{\pi}{4}\right) = \arg(2 + 3j) = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\right)$$

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo LTI SISO con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$ descritto dalla seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s + 5}{\beta s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

con $\beta > 0$

1) Calcolare per quali valori di β il sistema è asintoticamente stabile

E' possibile applicare il criterio di Routh. Predisponiamo la tabella.

β	2	0
2	1	0
&	0	0
$\$$	0	0

$$\& = -\frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} \beta & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}(\beta - 4)$$

$$\$ = \frac{2}{\beta - 4} \det \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(\beta - 4) & 1 \\ -\frac{1}{2}(\beta - 4) & 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{\beta - 4} \left(\frac{1}{2}(\beta - 4) \right) = 1$$

Quindi, essendo $\beta > 0$, il sistema è asintoticamente stabile se e solo se

$$-\frac{1}{2}(\beta - 4) > 0$$

cioè per

$$0 < \beta < 4$$

2) In corrispondenza del valore dell'estremo superiore dell'intervallo di valori di β trovato al punto precedente, disegnare il diagramma asintotico del modulo della risposta in frequenza del sistema e disegnare approssimativamente il diagramma effettivo.

Il valore è $\beta = 4$. Si osservi che per questo valore il sistema non è asintoticamente stabile.

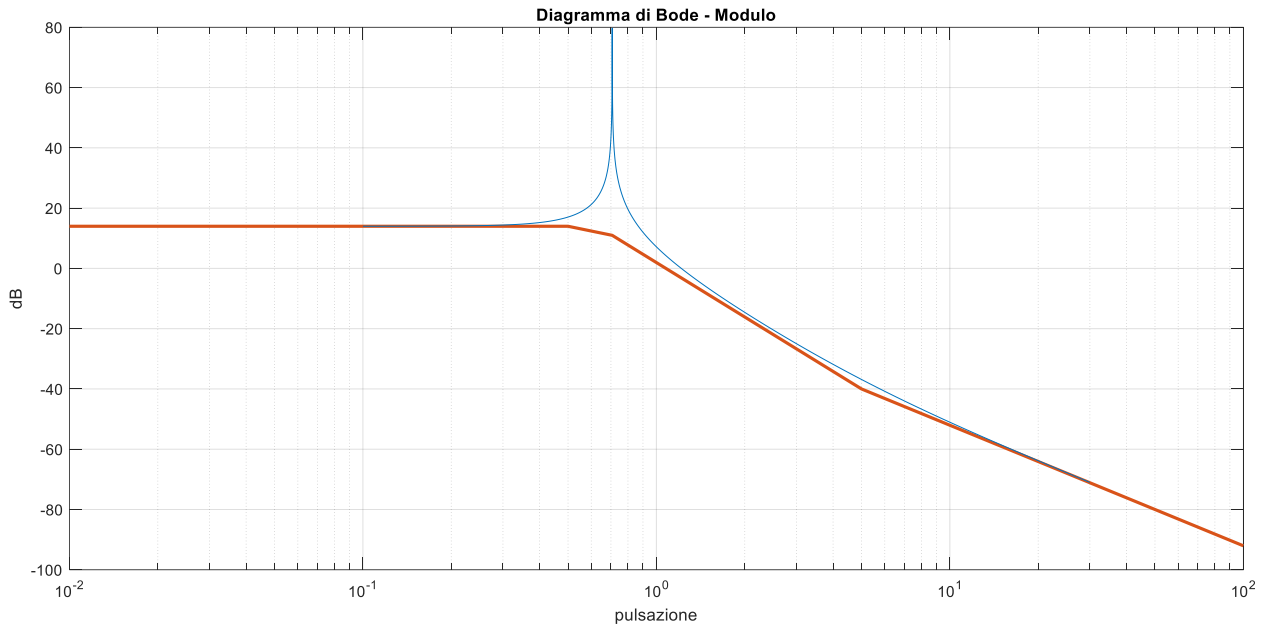
$$G(s) = \frac{s + 5}{4s^3 + 2s^2 + 2s + 1} = \frac{s + 5}{2s^2(2s + 1) + 2s + 1} = \frac{s + 5}{(2s + 1)(2s^2 + 1)}$$

Questo sistema ha:

- tipo $g = 0$
- guadagno $\mu = G(0) = 5$
- zeri in $z_1 = -5$
- poli in $p_1 = -\frac{1}{2}$; $p_{2,3} = \pm j \frac{1}{\sqrt{2}}$

Come si nota, il sistema ha un polo reale negativo ed una coppia di poli a parte reale nulla (immaginari coniugati) ed è quindi semplicemente stabile.

Nel tracciamento del diagramma asintotico i poli immaginari sono considerati come due poli reali posizionati nel valore della loro pulsazione naturale $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.7$. Nel diagramma effettivo, la presenza di una coppia di poli immaginari con pulsazione naturale ω_n è tale che $|G(j\omega_n)| \rightarrow \infty$ (picco di risonanza di “ampiezza infinita”).



3) Trovare il valore di β in corrispondenza del quale il sistema ha un polo in $s_1 = -1$ e disegnare approssimativamente la risposta allo scalino unitario del sistema.

Se il sistema ha un polo in $s_1 = -1$, il suo denominatore si annullerà in corrispondenza di tale valore, cioè

$$\beta(-1)^3 + 2(-1)^2 + 2(-1) + 1 = 0$$

quindi

$$-\beta + 2 - 2 + 1 = 0$$

$$\beta = 1$$

La funzione di trasferimento è quindi

$$G(s) = \frac{s + 5}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} = \frac{s + 5}{s^3 + 1 + 2s(s + 1)} = \frac{s + 5}{(s + 1)(s^2 - s + 1) + 2s(s + 1)} = \frac{s + 5}{(s + 1)(s^2 + s + 1)}$$

Questo sistema ha:

- tipo $g = 0$
- guadagno $\mu = G(0) = 5$
- zeri in $z_1 = -5$
- poli in $p_1 = -1; p_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ora, l'unico modo (a noi noto) per tracciare manualmente la risposta allo scalino è trovare un'approssimazione a poli dominanti. I poli complessi coniugati sono i più vicini all'asse immaginario, ma non si possono proprio dire "dominanti". La nostra approssimazione non sarà quindi particolarmente buona.

La funzione di trasferimento approssimata è quindi

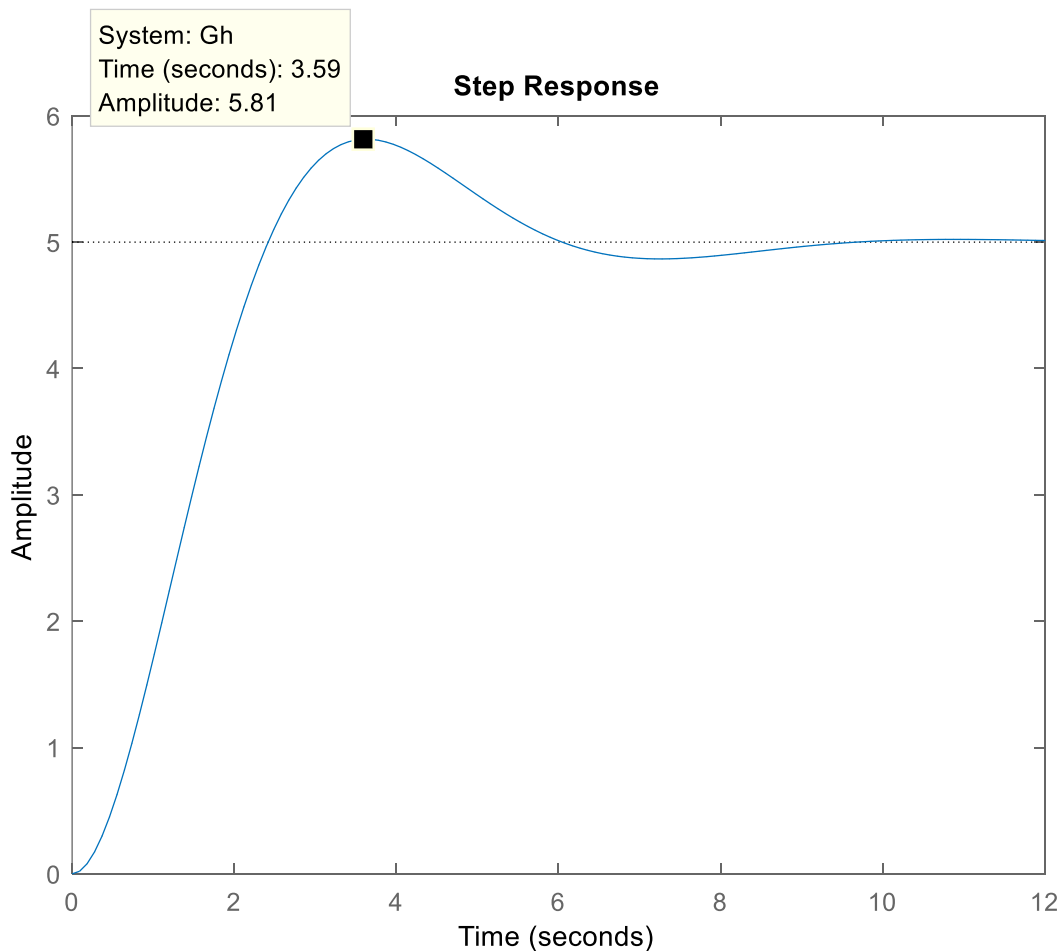
$$\hat{G}(s) = \frac{5}{s^2 + s + 1}$$

Questo sistema ha:

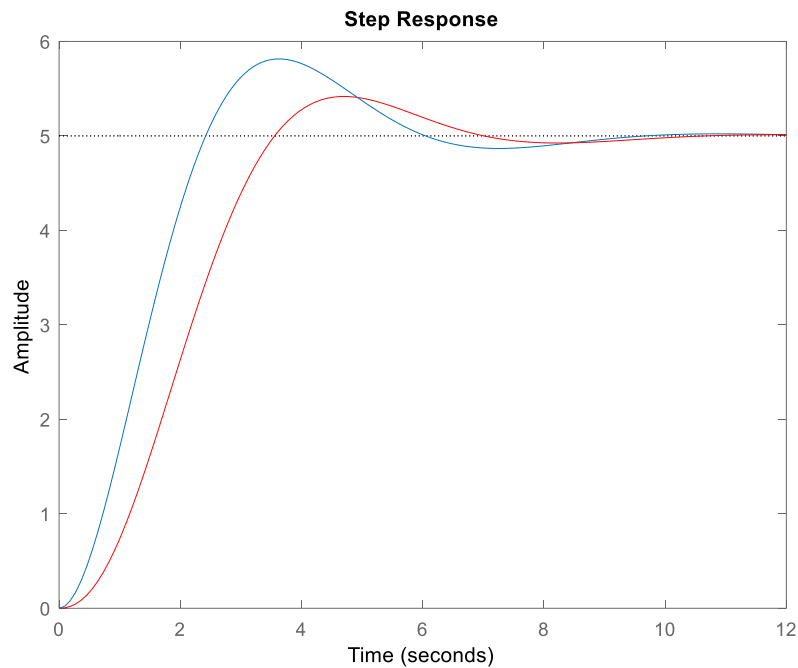
- tipo $g = 0$
- guadagno $\mu = G(0) = 5$
- zeri nessuno
- poli complessi coniugati con pulsazione naturale $\omega_n = 1$ e smorzamento $\xi = 0.5$.

Quindi le caratteristiche della risposta allo scalino sono

- tempo di assestamento $t_a \cong \frac{5}{\xi \omega_n} \cong 10 \text{ s}$
- periodo delle oscillazioni $T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \cong 7.2 \text{ s}$
- tempo del primo picco $t_p = \frac{1}{2}T \cong 3.6$
- massima sovralongazione relativa percentuale $\Delta\% = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \cong 16.3\%$

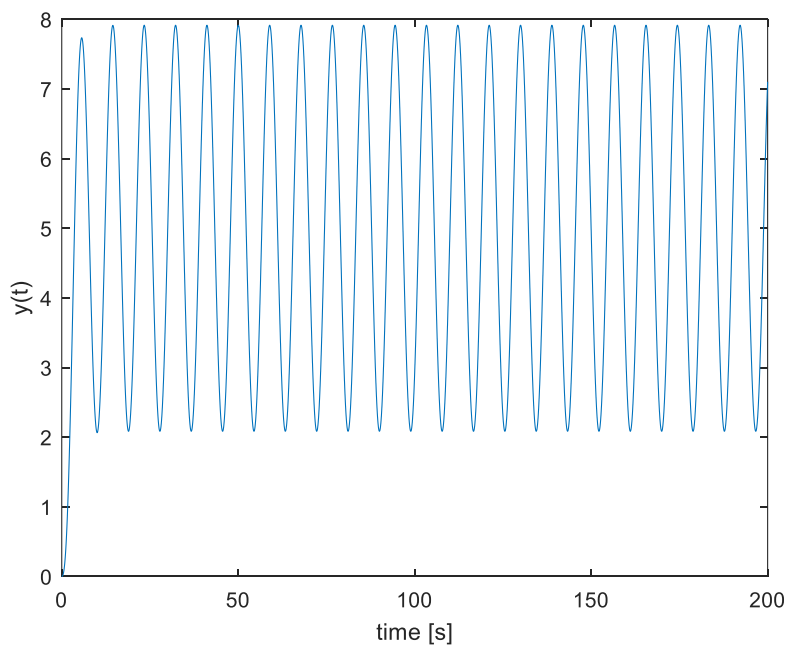


Nella seguente figura il confronto fra la risposta allo scalino di $\hat{G}(s)$ (in blu) e quella di $G(s)$ (in rosso).



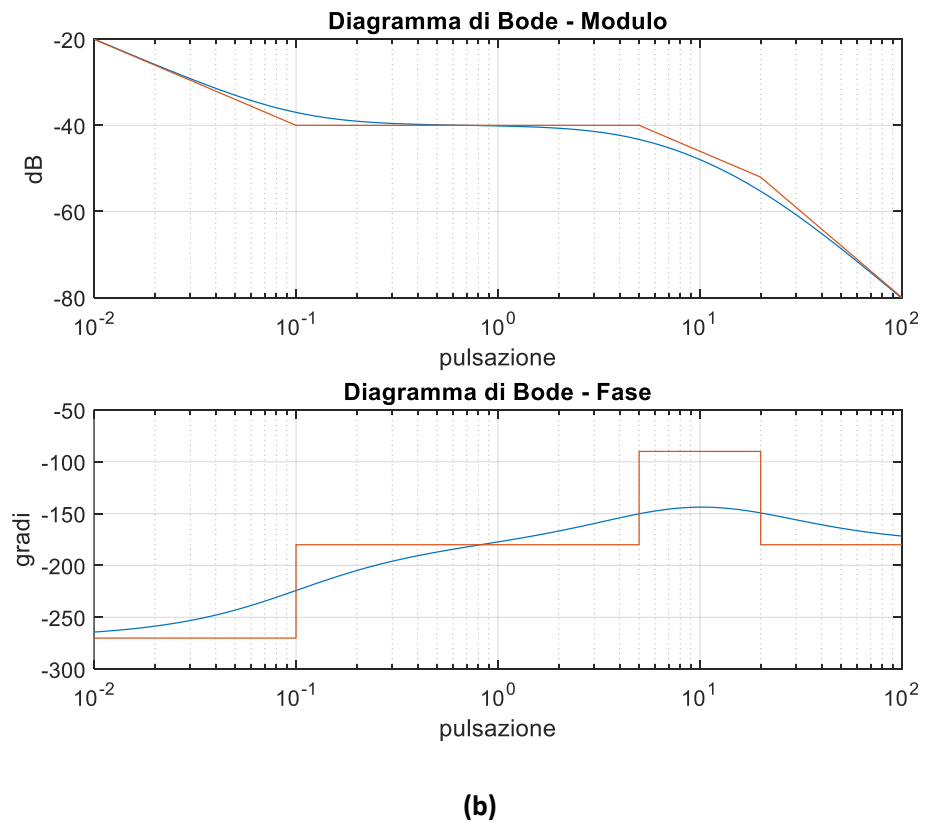
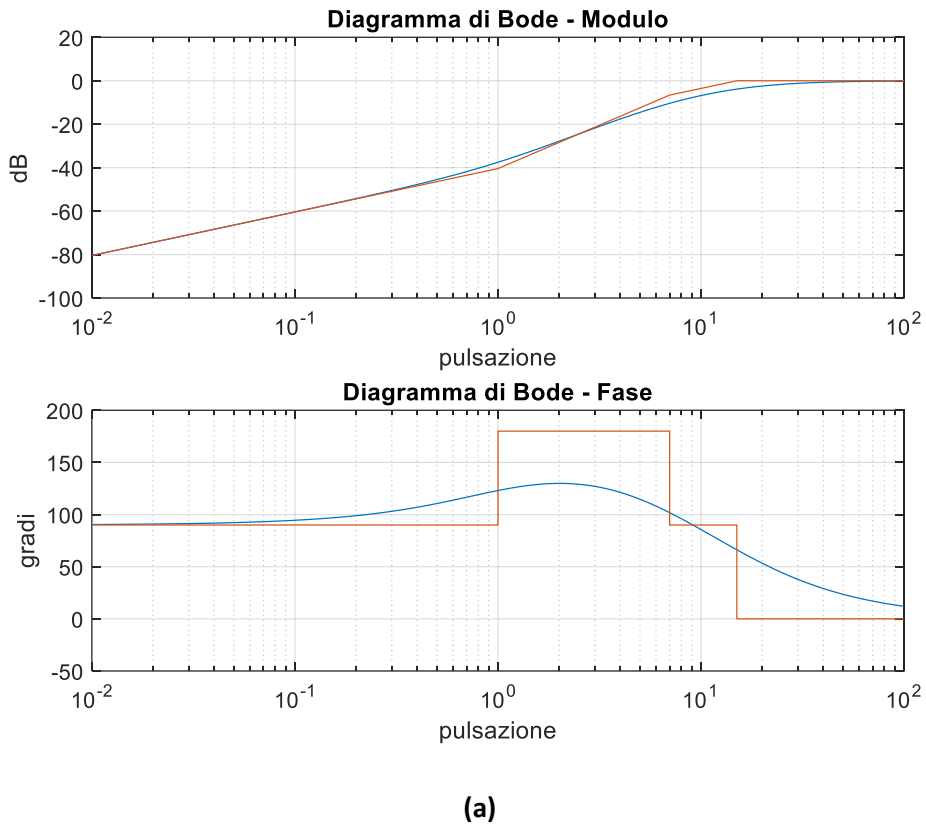
4) Che aspetto ha la risposta allo scalino unitario del sistema approssimato in corrispondenza del valore di β di cui al punto 2?

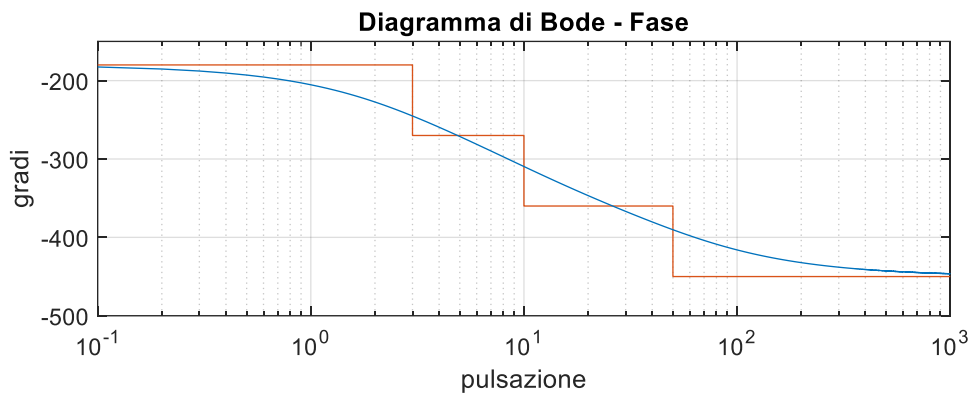
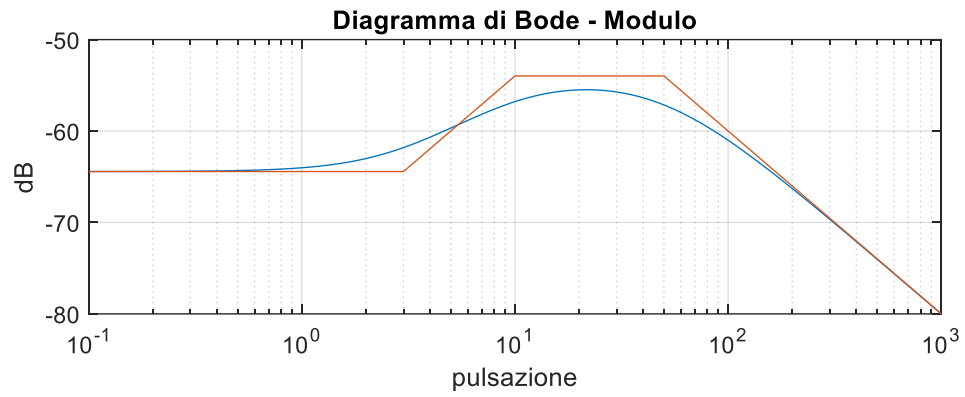
In corrispondenza di $\beta = 4$ il sistema ha due poli immaginari coniugati e la risposta allo scalino unitario mostrerà oscillazioni permanenti, dopo un transitorio governato dal polo con costante di tempo pari a 2.



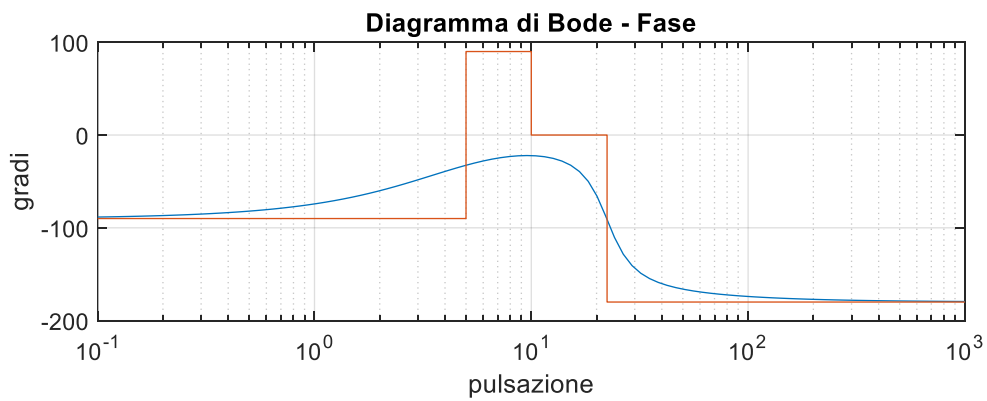
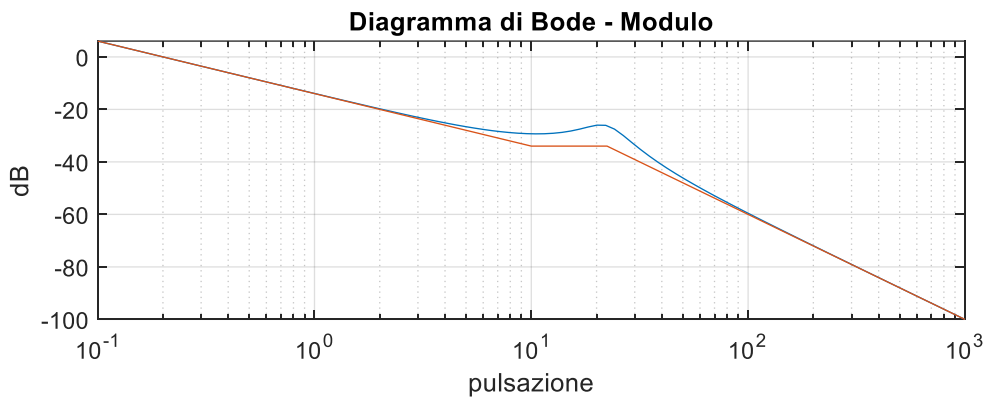
ESERCIZIO 4

Nella figura seguente sono mostrati i diagrammi di Bode del modulo e della fase della risposta in frequenza di 4 sistemi dinamici a tempo continuo LTI SISO.





(c)



(d)

Dire quali di essi rappresentano:

4.1 Un sistema con un polo nell'origine	[a]	[b]	[c]	[d]
4.2 Un sistema con uno zero nell'origine	[a]	[b]	[c]	[d]
4.3 Un sistema con poli complessi coniugati poco smorzati	[a]	[b]	[c]	[d]
4.4 Un sistema con ritardo	[a]	[b]	[c]	[d]
4.5 Un sistema strettamente proprio	[a]	[b]	[c]	[d]
4.6 Un sistema proprio (non strettamente)	[a]	[b]	[c]	[d]
4.7 Un sistema a fase minima	[a]	[b]	[c]	[d]
4.8 Un sistema asintoticamente stabile	[a]	[b]	[c]	[d]

4.9 Ora, siano i diagrammi precedenti relativi alla funzione di anello $L(s)$ di sistemi retroazionati. Si dica, se possibile, quali di essi sono asintoticamente stabili in anello chiuso

[a] [b] [c] [d] [non so]

4.1 Polo nell'origine \Rightarrow diagramma del modulo con pendenza iniziale -1

[b] [d]

4.2 Zero nell'origine \Rightarrow diagramma del modulo con pendenza iniziale $+1$

[a]

4.3 Poli complessi coniugati poco smorzati \Rightarrow diagramma del modulo con picco di risonanza

[d]

4.4 Sistema con ritardo \Rightarrow diagramma della fase esponenzialmente decrescente

nessuno

4.5 Sistema strettamente proprio \Rightarrow diagramma del modulo con pendenza finale negativa

[b] [c] [d]

4.6 Sistema proprio \Rightarrow diagramma del modulo con pendenza finale nulla

[a]

4.7 Sistema a fase minima \Rightarrow diagramma della fase costante a tratti con valori $k90^\circ$ dove k è la pendenza del diagramma del modulo in quel tratto.

[a]

4.8 Sistema asintoticamente stabile \Rightarrow in corrispondenza di cambi di pendenza negativi (poli) la fase compie salti di -90° (per ciascun polo). Inoltre il diagramma del modulo non può avere pendenza iniziale -1 .

[a] [c]

4.9 Con le conoscenze acquisite fino ad ora, possiamo solo applicare (ove possibile) il criterio di Bode. Esso però non è applicabile per nessuno dei sistemi: [b] e [d] hanno poli a destra, [a] e [c] hanno diagrammi di Bode del modulo che non attraversano l'asse a 0 dB.

[non so]

A scopo di verifica le funzioni di trasferimento sono:

$$G_a(s) = \frac{s(s+1)}{(s+7)(s+15)}$$

$$G_b(s) = \frac{0.1(1-10s)}{s(s+20)(s-5)}$$

$$G_c(s) = \frac{0.1(s-3)}{(s+10)(s+50)}$$

$$G_d(s) = \frac{10(s+5)(s-10)}{s(s-5)(s^2+10s+500)}$$

Esercizio 5

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo LTI SISO con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$ descritto dalla seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = 10 \frac{s + 1}{(s + 0.1)(s^2 + 20s + 100)}$$

1) Valutare la stabilità del sistema

Si calcolino i poli del sistema

$$p_1 = -0.1, p_{2,3} = -10$$

Dato che i poli sono reali negativi il sistema è asintoticamente stabile.

2) Dire qual è il polo dominante del sistema

Il polo dominante del sistema è il polo più vicino all'asse immaginario. Quindi, il polo dominante è p_1 .

3) Determinare la risposta del sistema all'ingresso

$$u(t) = 2 + \sin(0.01t) + \sin(0.1t) + 2\cos(100t), t \geq 0$$

Siccome il sistema dinamico è lineare, possiamo utilizzare il principio di sovrapposizione degli effetti per ricavare l'uscita di regime. Inoltre, essendo il sistema asintoticamente stabile, possiamo applicare il teorema della risposta in frequenza per ottenere i contributi di regime degli ingressi sinusoidali.

Quindi, la risposta di regime corrisponde alla somma delle risposte dei segnali di ingresso, ovvero:

$$u_1(t) = 2$$

$$u_2(t) = \sin(0.01t)$$

$$u_3(t) = \sin(0.1t)$$

$$u_4(t) = 2\cos(100t)$$

a) $u_1(t) = 2$

Questo segnale corrisponde a $u_1(t) = 2\text{sca}(t)$ per $t \geq 0$.

Siccome siamo nel caso $g = 0$, il guadagno statico del sistema è $\mu = G(0)$ e quindi l'uscita di regime

$$\text{sarà } y(\infty) = 2G(0) = 2 \cdot 10 \frac{1}{(0.1)(100)} = 2$$

$$y_1(t) = 2$$

b) $u_2(t) = \sin(0.01t)$

Applichiamo il teorema della risposta in frequenza, a transitorio esaurito, avremo:

$$y_2(t) = |G(j0.01)| \sin(0.01t + \arg G(j0.01))$$

$$\begin{cases} |G(j0.01)| = \left| 10 \frac{j0.01 + 1}{(j0.01 + 0.1)(j0.01 + 10)^2} \right| \\ \arg G(j0.01) = \arg(j0.01 + 1) - \arg(j0.01 + 0.1) - 2 \arg(j0.01 + 10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |G(j0.01)| = 10 \frac{\sqrt{1 + 10^{-4}}}{\sqrt{10^{-2} + 10^{-4}}(100 + 10^{-4})} \cong 1 \\ \arg G(j0.01) = \arctan(0.01) - \arctan\left(\frac{0.01}{0.1}\right) - 2 \arctan\left(\frac{0.01}{10}\right) \cong 0 \text{ rad} \end{cases}$$

$$y_2(t) \cong \sin(0.01t)$$

c) $u_3(t) = \sin(0.1t)$

Applichiamo il teorema della risposta in frequenza, a transitorio esaurito, avremo:

$$y_3(t) = |G(j0.1)| \sin(0.1t + \arg G(j0.1))$$

$$\begin{cases} |G(j0.1)| = \left| 10 \frac{j0.1 + 1}{(j0.1 + 0.1)(j0.1 + 10)^2} \right| \\ \arg G(j0.1) = \arg(j0.1 + 1) - \arg(j0.1 + 0.1) - 2 \arg(j0.1 + 10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |G(j0.1)| = \frac{10\sqrt{1 + 10^{-2}}}{\sqrt{10^{-2} + 10^{-2}}(10^{-2} + 100)} \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \arg G(j0.1) = \arctan(0.1) - \arctan\left(\frac{0.1}{0.1}\right) - 2 \arctan\left(\frac{0.1}{10}\right) \cong -0.706 \text{ rad} \end{cases}$$

$$y_3(t) \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(0.1t - 0.706)$$

d) $u_4(t) = 2\cos(100t) = -2\sin\left(100t - \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(100t + \frac{\pi}{2}\right)$

Applichiamo il teorema della risposta in frequenza, a transitorio esaurito, avremo:

$$y_4(t) = 2|G(j100)| \sin\left(100t + \frac{\pi}{2} + \arg G(j100)\right)$$

$$\begin{cases} |G(j100)| = \left| 10 \frac{j100 + 1}{(j100 + 0.1)(j100 + 10)^2} \right| \\ \arg G(j100) = \arg(j100 + 1) - \arg(j100 + 0.1) - 2 \arg(j100 + 10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |G(j100)| = \frac{10\sqrt{1 + 10^4}}{\sqrt{10^4 + 10^{-2}}(10^4 + 10^2)} \cong 10^{-3} \\ \arg G(j100) = \arctan(100) - \arctan(1000) - 2 \arctan(10) \cong -2.95 \end{cases}$$

$$y_4(t) \cong 2 \cdot 10^{-3} \sin(100t - 1.38)$$

Per il principio della sovrapposizione degli effetti, si ottiene:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + y_4(t) \cong \\ &\cong 2 + \sin(0.01t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(0.1t - 0.706) + 2 \cdot 10^{-3} \sin(100t - 1.38) \end{aligned}$$

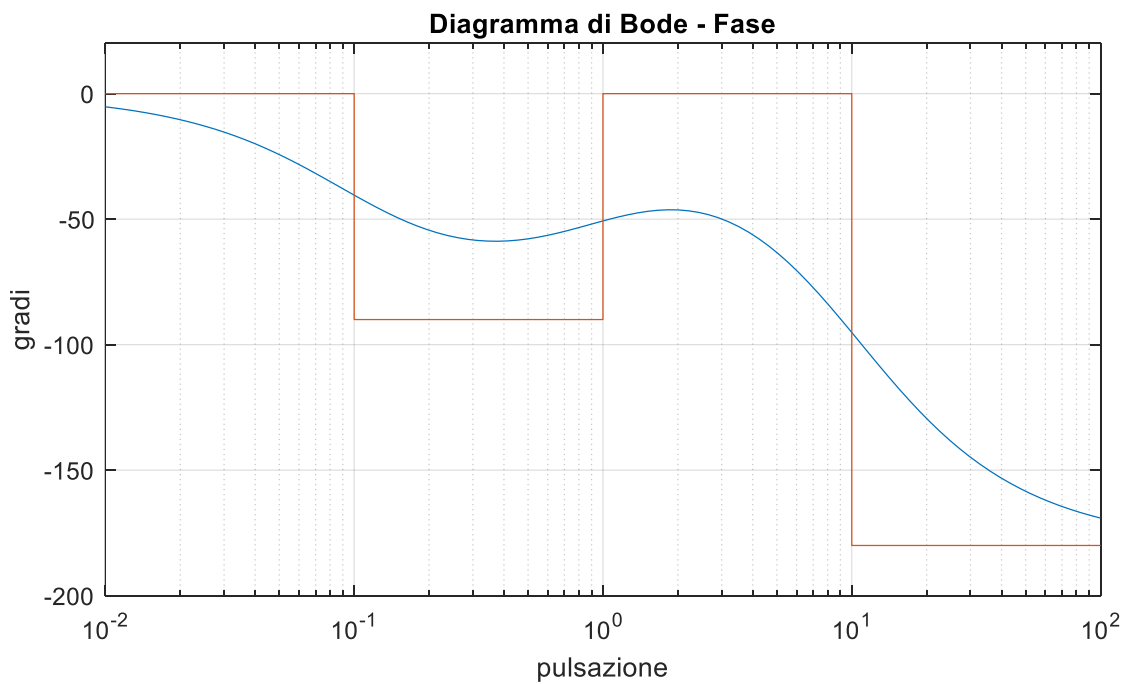
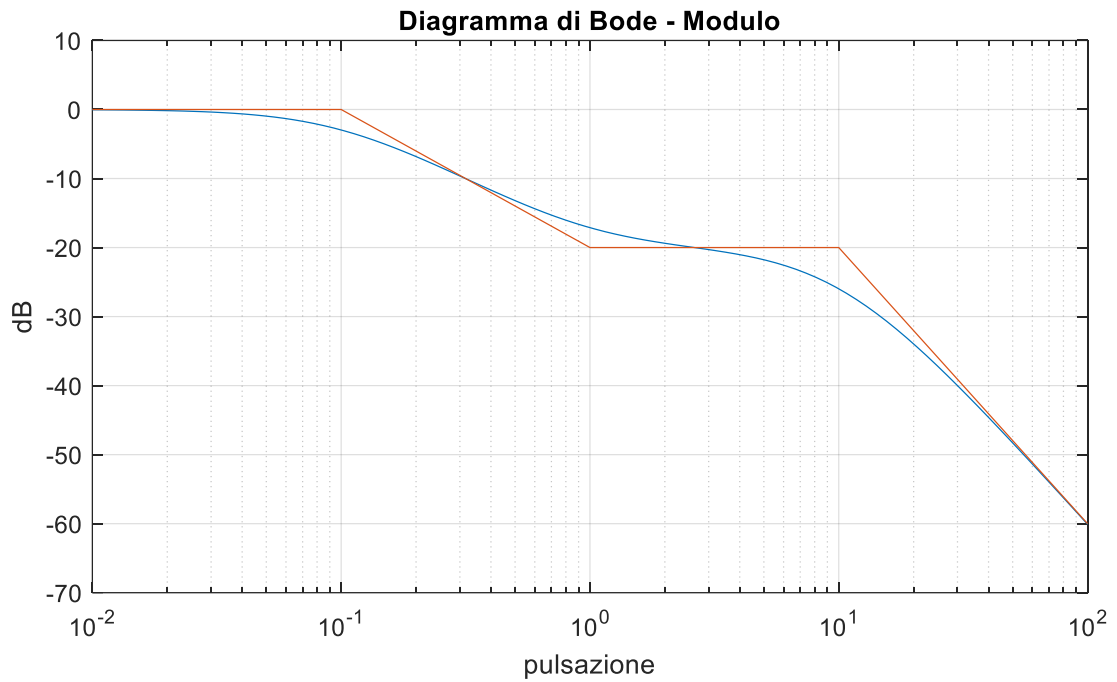
4) Tracciare i diagrammi di bode asintotici della risposta in frequenza e verificare che siano consistenti con i risultati della domanda precedente.

Zeri: $z_1 = -1$

Poli: $p_1 = -0.1, p_{2,3} = -10$

Tipo : $g=0$:

Guadagno: $\mu = 1 \rightarrow \mu_{dB} = 0 \text{ dB}$



È possibile ricavare direttamente dai grafici in modo approssimato le uscite di regime ai 4 ingressi del punto 3. Ciò è possibile analizzando i diagrammi di Bode

a) $u_1(t) = 2$

Dal diagramma di Bode del modulo si può ricavare il valore del guadagno

$$\begin{cases} |G(j0)|_{dB} = 0 \text{ dB} \rightarrow |G(j0)| = 1 \\ \arg G(j0) = 0^\circ \end{cases}$$

cioè $\mu = 1$

Quindi l'uscita sarà:

$$y_1(t) = 2$$

b) $u_2(t) = \sin(0.01t)$

Si analizzano i diagrammi di Bode in $\bar{\omega} = 0.01 \frac{rad}{s}$

Valutiamo modulo e fase in $\bar{\omega}$:

$$\begin{cases} |G(j\bar{\omega})|_{dB} \cong 0 \text{ dB} \rightarrow |G(j\bar{\omega})| \cong 1 \\ \arg G(j\bar{\omega}) \cong 0^\circ \end{cases}$$

Quindi l'uscita sarà:

$$y_2(t) \cong \sin(0.01t)$$

c) $u_3(t) = \sin(0.1t)$

Si analizzano i diagrammi di Bode in $\bar{\omega} = 0.1 \frac{rad}{s}$

In corrispondenza del polo in $\bar{\omega} = 0.1$ il diagramma effettivo del modulo è, come noto, inferiore di 3 dB rispetto al diagramma asintotico.

Similmente il diagramma effettivo della fase, in corrispondenza del polo in $\bar{\omega} = 0.1$ si trova all'incirca, come noto, a metà del "salto" del diagramma asintotico, cioè a circa -45° .

Valutiamo modulo e fase in $\bar{\omega}$:

$$\begin{cases} |G(j\bar{\omega})|_{dB} \cong -3 \text{ dB} \rightarrow |G(j\bar{\omega})| \cong 10^{-\frac{3}{20}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \arg G(j\bar{\omega}) \cong -45^\circ = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Quindi l'uscita sarà:

$$y_3(t) \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(0.1t - \frac{\pi}{4}\right)$$

d) $u_4(t) = 2\cos(100t) = 2\sin\left(100t + \frac{\pi}{2}\right)$

Si analizzano i diagrammi di bode in $\bar{\omega} = 100 \frac{rad}{s}$

Valutiamo modulo e fase in $\bar{\omega}$:

$$\begin{cases} |G(j\bar{\omega})|_{dB} \cong -60 \text{ dB} \rightarrow |G(j\bar{\omega})| \cong 10^{-\frac{60}{20}} = 10^{-3} \\ \arg G(j\bar{\omega}) \cong -180^\circ = -\pi \end{cases}$$

Quindi l'uscita sarà:

$$y_3(t) \cong 2 \cdot 10^{-3} \sin\left(100t - \frac{\pi}{2}\right)$$

5) Approssimare il sistema con un sistema di ordine ridotto in modo che la risposta allo scalino unitario sia simile a quella originato dal sistema $G(s)$. Successivamente tracciare i diagrammi di Bode del sistema approssimante.

Calcoliamo un'approssimazione a poli dominanti.

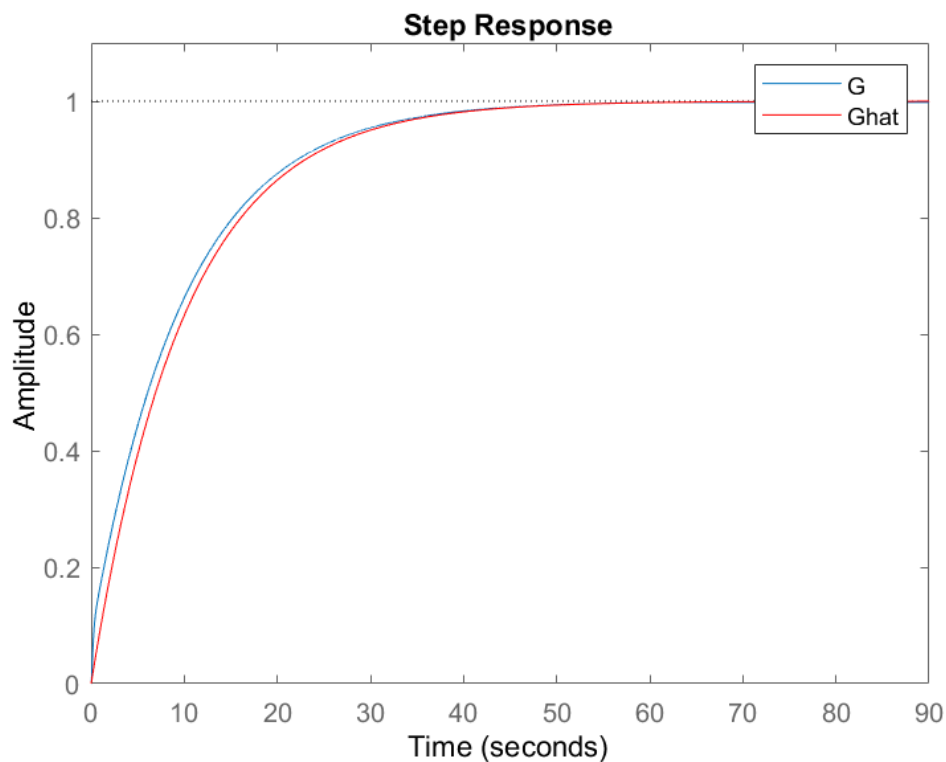
Il polo dominante è p_1 come calcolato nella domanda 2, quindi togliamo i poli non dominanti e l'unico zero presente ottenendo l'approssimazione a polo dominante $\hat{G}(s)$

$$G(s) = 10 \frac{s + 1}{(s + 0.1)(s^2 + 20s + 100)} = \frac{1 + s}{(1 + 10s)(1 + 0.1s)^2}$$
$$\hat{G}(s) = \frac{1}{1 + 10s}$$

La risposta allo scalino di $\hat{G}(s)$ è la tipica risposta a scalino unitario di un sistema del primo ordine. Avendo guadagno unitario e un solo polo con costante di tempo pari a 10 sec andrà al valore di regime $y(\infty) = 1$ in circa 50 sec.

Ovviamente non abbiamo modo di tracciare l'andamento della risposta allo scalino del sistema originale $G(s)$ ma ci aspettiamo che non sia troppo differente da quella della sua approssimazione $\hat{G}(s)$.

Infatti, in questa figura possiamo osservare che le due risposte sono effettivamente molto simili.



Analogamente è possibile confrontare i diagrammi di Bode di $G(s)$ e di $\hat{G}(s)$. Come si nota i diagrammi sono molto simili in bassa frequenza, fino a circa 1 rad/s.

Bode Diagram

