

## ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo LTI SISO con ingresso  $u(t)$  ed uscita  $y(t)$  descritto dalla seguente equazione differenziale

$$\dot{y}(t) + 9y(t) + 20y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t)$$

- 1) Si calcoli l'uscita di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso costante  $u(t) = \bar{u} = 2$

Si annullano le derivate di ingresso e uscita, sostituendo ad  $u(t)$  il suo valore  $\bar{u}$  e ad  $y(t)$  l'incognita  $\bar{y}$ . Si deve ottenere un'equazione algebrica nell'incognita  $\bar{y}$

$$20\bar{y} = 2\bar{u}$$

$$20\bar{y} = 4$$

$$\bar{y} = \frac{1}{5}$$

- 2) Calcolare il guadagno statico del sistema

$$\mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = \frac{\frac{1}{5}}{2} = \frac{1}{10}$$

- 3) Calcolare la funzione di trasferimento del sistema

Applicando la trasformazione di Laplace all'equazione (sempre a partire da condizioni iniziali nulle per definizione di funzione di trasferimento) si ottiene

$$s^2Y(s) + 9sY(s) + 20Y(s) = sU(s) + 2U(s)$$

$$(s^2 + 9s + 20)Y(s) = (s + 2)U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + 2}{s^2 + 9s + 20}$$

- 4) Calcolare poli, zeri, tipo e guadagno della funzione di trasferimento. Confrontare il guadagno della funzione di trasferimento con il guadagno statico del sistema.

Tipo  $g = 0$

Zeri  $z_1 = -2$

Poli  $p_1 = -4$ ;  $p_2 = -5$

Guadagno  $G(0) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$  Il guadagno della funzione di trasferimento è uguale al guadagno statico (come doveva essere, essendo  $g = 0$ )

- 5) Calcolare la risposta allo scalino del sistema

$u(t) = sca(t)$  da cui  $U(s) = \frac{1}{s}$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 9s + 20} \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s+4} + \frac{\gamma}{s+5} = \frac{(\alpha + \beta + \gamma)s^2 + (9\alpha + 5\beta + 4\gamma)s + 20\alpha}{s(s+4)(s+5)}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 9\alpha + 5\beta + 4\gamma = 1 \\ 20\alpha = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{10} \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{1}{10} \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+4} - \frac{3}{5} \frac{1}{s+5}$$

$$y(t) = \frac{1}{10} \text{sca}(t) + \frac{1}{2} e^{-4t} - \frac{3}{5} e^{-5t}$$

## ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo LTI SISO con ingresso  $u(t)$  ed uscita  $y(t)$  descritto dalla seguente equazione differenziale

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 9y(t) = \dot{u}(t) + u(t)$$

1) Si calcoli l'uscita di equilibrio in corrispondenza del generico ingresso costante  $u(t) = \bar{u}$

Si annullano le derivate di ingresso e uscita, sostituendo ad  $u(t)$  il suo valore  $\bar{u}$  e ad  $y(t)$  il valore cercato  $\bar{y}$ . Si deve ottenere un'equazione algebrica nell'incognita  $\bar{y}$ . Si ottiene

$$0 = \bar{u}$$

che significa che non esiste alcun  $\bar{y}$  in corrispondenza di  $\bar{u} \neq 0$ . Questo sistema non ha nessuna uscita di equilibrio in corrispondenza di  $\bar{u} \neq 0$ .

Solo per  $\bar{u} = 0$  si ha che la relazione è verificata, per qualsiasi valore di  $\bar{y}$ , cioè questo sistema ha infinite uscite di equilibrio in corrispondenza di  $\bar{u} = 0$ .

2) Calcolare la funzione di trasferimento del sistema

$$\begin{aligned} s^3 Y(s) + 6s^2 Y(s) + 9s Y(s) &= sU(s) + U(s) \\ (s^3 + 6s^2 + 9s)Y(s) &= (s + 1)U(s) \\ G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{s + 1}{s^3 + 6s^2 + 9s} = \frac{s + 1}{s(s^2 + 6s + 9)} \end{aligned}$$

3) Calcolare poli, zeri, tipo e guadagno della funzione di trasferimento.

Tipo  $g = 1$

Zeri  $z_1 = -1$

Poli  $p_1 = -3$ ;  $p_2 = -3$ ;  $p_3 = 0$

Guadagno (generalizzato)  $\mu = \lim_{s \rightarrow 0} s^g G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s+1}{s(s^2+6s+9)} = \frac{1}{9}$

4) Calcolare il valore iniziale ed il valore finale di  $y(t)$  quando l'ingresso è  $u(t) = \text{imp}(t)$ .

$u(t) = \text{imp}(t)$  da cui  $U(s) = 1$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s + 1}{s(s^2 + 6s + 9)} \cdot 1$$

Applico il Teorema del valore iniziale

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{s + 1}{s(s^2 + 6s + 9)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s + 1}{s^2 + 6s + 9} = 0$$

Applico il Teorema del valore finale

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s + 1}{s(s^2 + 6s + 9)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s + 1}{s^2 + 6s + 9} = \frac{1}{9}$$

5) Calcolare analiticamente la risposta allo scalino del sistema

$$u(t) = sca(t) \text{ da cui } U(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s+1}{s(s^2+6s+9)} \frac{1}{s} = \frac{s+1}{s^2(s+3)^2}$$

$$Y(s) = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2} + \frac{\gamma}{s+3} + \frac{\delta}{(s+3)^2} = \frac{(\alpha+\gamma)s^3 + (6\alpha+\beta+3\gamma+\delta)s^2 + (9\alpha+6\beta)s + 9\beta}{s^2(s+3)^2}$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ 6\alpha + \beta + 3\gamma + \delta = 0 \\ 9\alpha + 6\beta = 1 \\ 9\beta = 1 \end{cases} \begin{cases} \alpha = \frac{1}{27} \\ \beta = \frac{1}{9} \\ \gamma = -\frac{1}{27} \\ \delta = -\frac{2}{9} \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{1}{27} \frac{1}{s} + \frac{1}{9} \frac{1}{s^2} - \frac{1}{27} \frac{1}{s+3} - \frac{2}{9} \frac{1}{(s+3)^2}$$

$$y(t) = \frac{1}{27} sca(t) + \frac{1}{9} ram(t) - \frac{1}{27} e^{-3t} - \frac{2}{9} te^{-3t}$$

o anche più semplicemente

$$y(t) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9}t - \frac{1}{27}e^{-3t} - \frac{2}{9}te^{-3t}, t \geq 0$$

### ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo LTI SISO con ingresso  $u(t)$  ed uscita  $y(t)$  descritto dalla seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{as + b}{s^2 + cs + d}$$

con  $a, b, c, d$  reali e non nulli.

Dire quali relazioni devono rispettare i valori di  $a, b, c, d$  per avere:

#### 1) Guadagno della funzione di trasferimento negativo

Essendo  $a, b, c, d$  non nulli si ha che  $g = 0$  e quindi

$$\mu = G(0) = \frac{b}{d}$$

Perché sia  $\mu < 0$ ,  $b$  e  $d$  devono essere discordi.

#### 2) Guadagno della funzione di trasferimento unitario

$$\mu = G(0) = \frac{b}{d} = 1$$

Perché sia  $\mu = 1$ ,  $b$  e  $d$  devono essere uguali,  $b = d$ .

#### 3) I poli del sistema siano a parte reale negativa

Ricordiamo che le radici  $p_1$  e  $p_2$  di un'equazione di secondo grado  $s^2 + cs + d$  sono tali che

$$p_1 + p_2 = -c$$

$$p_1 p_2 = d$$

Quindi, se desideriamo che  $p_1$  e  $p_2$  siano entrambi negativi, allora deve essere  $c > 0$  e  $d > 0$ .

#### 4) La pendenza iniziale della risposta allo scalino valga 1

$u(t) = sca(t)$  da cui  $U(s) = \frac{1}{s}$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{as + b}{(s^2 + cs + d)s}$$

Bisogna calcolare la trasformata di Laplace della derivata dell'uscita  $\dot{y}(t)$

$$\mathcal{L}[\dot{y}(t)] = sY(s) - y(0)$$

e applicare a questa il teorema del valore iniziale

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s(sY(s) - y(0))$$

Per calcolare  $y(0)$ , applico il Teorema del valore iniziale alla risposta allo scalino

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{as + b}{(s^2 + cs + d)s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{as + b}{s^2 + cs + d} = 0$$

Quindi

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \frac{as + b}{(s^2 + cs + d)s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{as^2 + bs}{(s^2 + cs + d)} = a$$

da cui  $a = 1$ .

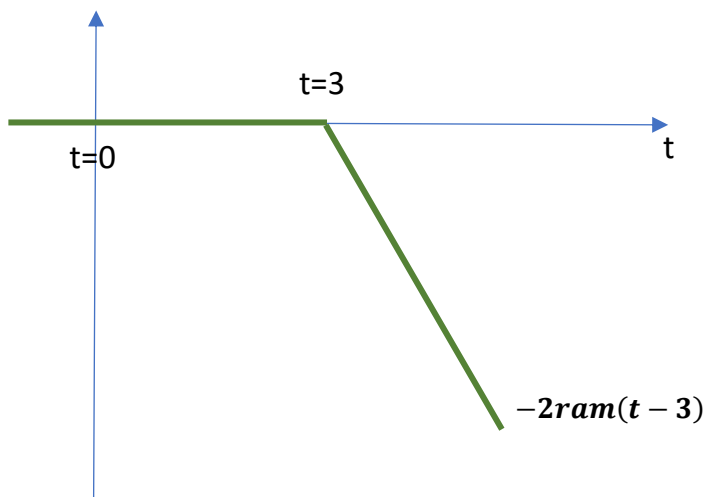
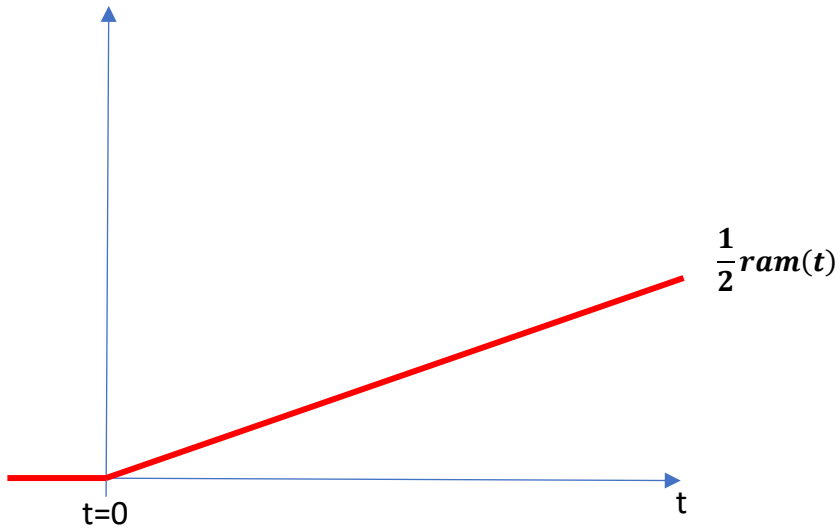
#### ESERCIZIO 4

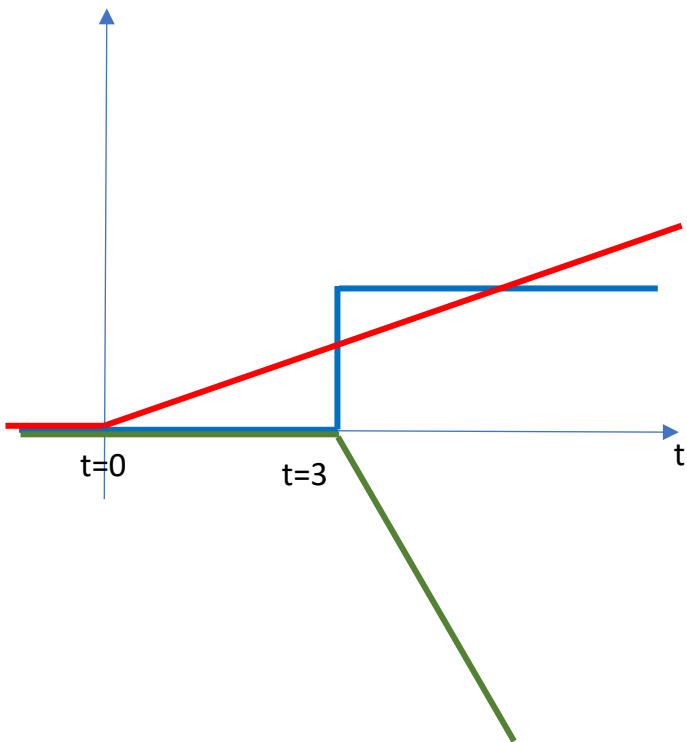
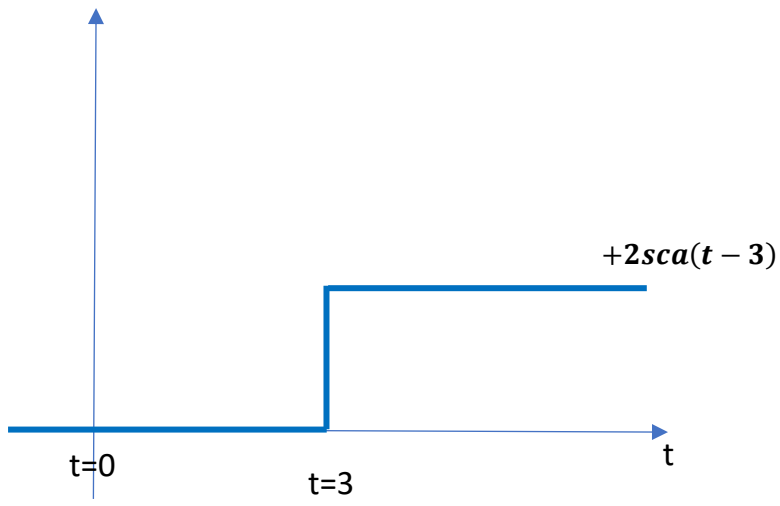
Si consideri il segnale

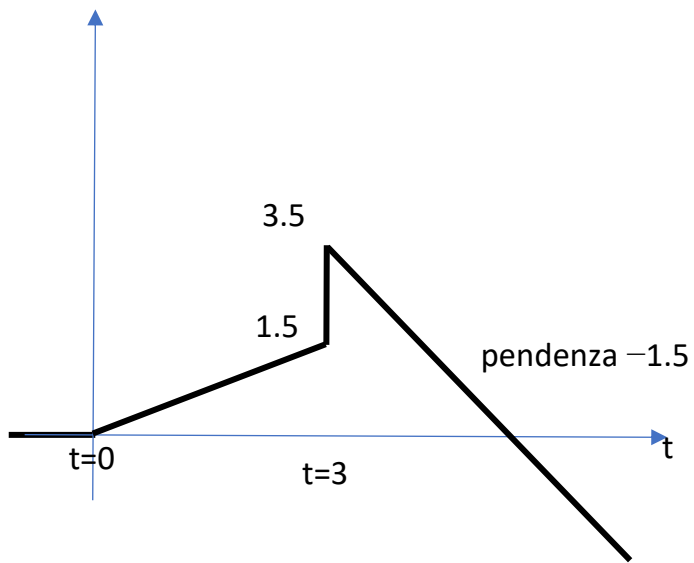
$$f(t) = \frac{1}{2}ram(t) - 2ram(t - 3) + 2sca(t - 3)$$

Disegnare il suo andamento nel tempo.

Il modo più semplice di procedere è disegnare i singoli addendi e poi sommarli.

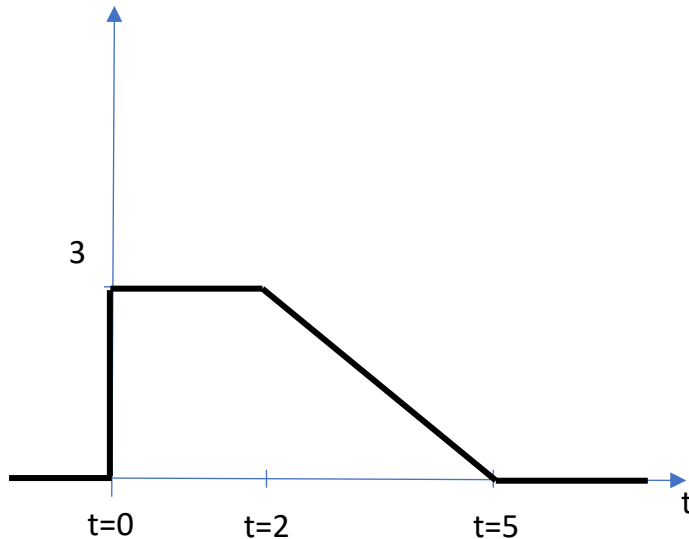






## ESERCIZIO 5

Si consideri il segnale  $f(t)$  descritto dal seguente grafico



Scrivere l'espressione analitica di  $f(t)$  e calcolare la sua trasformata di Laplace  $F(s)$ .

E' possibile procedere in diversi modi, tra i quali il seguente:

- 1) Individuare i singoli componenti elementari ed il tempo a cui occorrono
- 2) Scegliere ampiezze/pendenze corrette
- 3) Fare verifiche a tempi intermedi

Il primo segnale componente è uno scalino di ampiezza 3 al tempo  $t=0$ .

Il secondo segnale componente è una rampa con pendenza negativa (da determinare) al tempo  $t=2$

Il terzo segnale è un'altra rampa al tempo  $t=5$  con pendenza tale da annullare l'effetto della precedente, perché il segnale si annulla.

Quindi

$$f(t) = 3sca(t) - \alpha ramp(t - 2) + \beta ramp(t - 5)$$

Si intuisce facilmente che  $\alpha = 1$  poiché la rampa scende da 3 a zero nell'intervallo da 2 a 5.

E similmente deve essere  $\beta = 1$  per annullarne l'effetto.

$$f(t) = 3sca(t) - ramp(t - 2) + ramp(t - 5)$$

Per verificare la correttezza delle scelte si possono imporre le condizioni sul valore della funzione ai tempi dove avvengono i cambiamenti (di pendenza o di valore), cioè

$$f(2) = 3$$

$$f(5) = 0$$

da cui si ha

$$f(2) = 3sca(2) - ramp(2 - 2) + ramp(2 - 5) = 3 - 0 + 0 = 3$$

$$f(5) = 3sca(5) - ramp(5 - 2) + ramp(5 - 5) = 3 - 3 + 0 = 0$$

## ESERCIZIO 6

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo LTI SISO con ingresso  $u(t)$  ed uscita  $y(t)$  descritto dalla seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s + 3}{s^2 + \alpha s + \alpha + 1}$$

con  $\alpha$  reale.

Valutare tipo, zeri, poli e guadagno al variare di  $\alpha$ .

Di norma è bene partire valutando il tipo  $g$  della funzione di trasferimento. Il tipo dipende dal valore del termine noto  $\alpha + 1$  a denominatore. Se esso è nullo, c'è un polo nullo e quindi il tipo è 1, altrimenti il tipo è 0.

- **Per  $\alpha = -1$**

Il tipo è  $g = 1$  e la funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{s + 3}{s^2 - s} = \frac{s + 3}{s(s - 1)}$$

e quindi

Zeri  $z_1 = -3$

Poli  $p_1 = 0; p_2 = +1$

Con tipo  $g = 1$  il guadagno della funzione di trasferimento è:

$$\text{Guadagno (generalizzato)} \mu = \lim_{s \rightarrow 0} s^g G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s+3}{s(s-1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+3}{s-1} = -3$$

- **Per  $\alpha \neq -1$**

Il tipo è  $g = 0$  e la funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{s + 3}{s^2 + \alpha s + \alpha + 1}$$

La posizione dello zero non cambia ed i poli sono dati dalla soluzione dell'equazione caratteristica (eguagliando il denominatore a zero)

Zeri  $z_1 = -3$

Poli  $p_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4(\alpha + 1)}}{2}$

Con tipo  $g = 0$  il guadagno della funzione di trasferimento è uguale al guadagno statico, ovvero:

$$\mu = G(0) = \frac{3}{\alpha + 1}$$

## ESERCIZIO 7

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo LTI SISO con ingresso  $u(t)$  ed uscita  $y(t)$  descritto dalla seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\beta s + \alpha + 1}{s^2 + \alpha s + \beta}$$

con  $\alpha, \beta$  reall.

Calcolare i valori di  $\alpha$  e  $\beta$  tali per cui la funzione di trasferimento ha:

**1) tipo  $g = 0$  e poli in  $-2, -3$**

Per avere tipo nullo deve essere certamente  $\beta \neq 0$ . Per avere i poli nella posizione richiesta deve essere

$$s^2 + \alpha s + \beta = (s + 2)(s + 3) = s^2 + 5s + 6$$

da cui si ha

$$\alpha = 5, \beta = 6$$

La funzione di trasferimento è quindi

$$G(s) = \frac{6s + 6}{s^2 + 5s + 6} = \frac{6(s + 1)}{(s + 2)(s + 3)}$$

**2) tipo  $g = 0$ , guadagno  $\mu = 1$  e zero in  $-1$**

Per avere tipo nullo deve essere certamente  $\beta \neq 0$ . Per avere guadagno unitario deve essere

$$G(0) = \frac{\alpha + 1}{\beta} = 1$$

Per avere uno zero in  $-1$  deve essere, dal momento che lo zero è in  $-\frac{\alpha+1}{\beta}$ ,

$$\frac{\alpha + 1}{\beta} = 1$$

Che è la medesima equazione di prima

La soluzione è quindi

$$\beta \neq 0 \text{ qualsiasi}$$

$$\alpha = \beta - 1$$

La funzione di trasferimento è quindi

$$G(s) = \frac{\beta s + \beta - 1 + 1}{s^2 + (\beta - 1)s + \beta} = \frac{\beta(s + 1)}{s^2 + (\beta - 1)s + \beta}$$

**3) tipo  $g = 1$  e polo in  $-2$**

Per avere tipo  $g = 1$  deve essere  $\beta = 0$ . La funzione di trasferimento diventa quindi

$$G(s) = \frac{\alpha + 1}{s^2 + \alpha s} = \frac{\alpha + 1}{(s + \alpha)s}$$

Perché l'altro polo sia in  $-2$  deve essere  $\alpha = 2$ .

La funzione di trasferimento è quindi

$$G(s) = \frac{\beta s + \alpha + 1}{s^2 + \alpha s + \beta} = \frac{3}{(s + 2)s}$$

#### 4) tipo $g = -1$ e polo in $-2$

Per avere tipo  $g = -1$  il termine noto a numeratore deve essere nullo, cioè  $\alpha + 1 = 0$ ,

da cui si ha  $\alpha = -1$  ed inoltre  $\beta \neq 0$ .

La funzione di trasferimento è quindi

$$G(s) = \frac{\beta s}{s^2 - s + \beta}$$

Perché  $-2$  sia un polo della funzione di trasferimento, il denominatore di questa deve annullarsi in corrispondenza di  $s = -2$ , cioè

$$\begin{aligned}(-2)^2 - (-2) + \beta &= 0 \\ 4 + 2 + \beta &= 0\end{aligned}$$

da cui si ha  $\beta = -6$ .

La funzione di trasferimento complessiva è quindi

$$G(s) = \frac{-6s}{s^2 - s - 6}$$

## ESERCIZIO 8

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo LTI SISO con ingresso  $u(t)$  ed uscita  $y(t)$  descritto dalla seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 17}$$

1) Calcolare poli, zeri, tipo e guadagno della funzione di trasferimento

Tipo  $g = 0$

Zeri nessuno

Poli  $p_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 17} = -1 \pm j4$

Guadagno  $\mu = G(0) = \frac{1}{17}$

2) Calcolare analiticamente la risposta allo scalino unitario del sistema

$u(t) = sca(t)$  da cui  $U(s) = \frac{1}{s}$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 17} \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 17)}$$

$$Y(s) = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta s + \gamma}{s^2 + 2s + 17} = \frac{(\alpha + \beta)s^2 + (2\alpha + \gamma)s + 17\alpha}{s(s^2 + 2s + 17)}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + \gamma = 0 \\ 17\alpha = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{17} \\ \beta = -\frac{1}{17} \\ \gamma = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{1}{17} \frac{1}{s} - \frac{1}{17} \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 17}$$

Procedo con un'ulteriore scomposizione

$$\frac{s + 2}{s^2 + 2s + 17} = \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 1 + 16} = \frac{s + 2}{(s + 1)^2 + 4^2}$$

Quindi

$$\frac{s + 2}{(s + 1)^2 + 4^2} = k_1 \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 4^2} + k_2 \frac{4}{(s + 1)^2 + 4^2}$$

da cui ottengo

$$k_1 = 1, k_2 = \frac{1}{4}$$

e quindi

$$Y(s) = \frac{1}{17} \frac{1}{s} - \frac{1}{17} \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 4^2} - \frac{1}{17} \frac{1}{4} \frac{4}{(s + 1)^2 + 4^2}$$

la cui antitrasformata è

$$y(t) = \frac{1}{17} sca(t) - \frac{1}{17} e^{-t} \cos(4t) - \frac{1}{68} e^{-t} \sin(4t)$$

o anche

$$y(t) = \frac{1}{17} - \frac{1}{17} e^{-t} \cos(4t) - \frac{1}{68} e^{-t} \sin(4t), t \geq 0$$

Si consideri ora la funzione di trasferimento

$$G_1(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 17}$$

**3) Calcolare poli, zeri, tipo e guadagno della funzione di trasferimento  $G_1(s)$**

Tipo  $g = -1$

Zeri  $z_1 = 0$

Poli  $p_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 17} = -1 \pm j4$

Guadagno (generalizzato)  $\mu = \lim_{s \rightarrow 0} s^g G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} \frac{s}{s^2 + 2s + 17} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + 2s + 17} = \frac{1}{17}$

**4) Calcolare analiticamente la risposta allo scalino unitario del sistema con funzione di trasferimento  $G_1(s)$**

$u(t) = sca(t)$  da cui  $U(s) = \frac{1}{s}$

$$Y_1(s) = G(s)U(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 17} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2 + 2s + 17}$$

$$Y_1(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 17} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1 + 16} = \frac{1}{(s + 1)^2 + 4^2} = \frac{1}{4} \frac{4}{(s + 1)^2 + 4^2}$$

Quindi

$$y_1(t) = \frac{1}{4} e^{-t} \sin(4t)$$

**5) Dire quale relazione sussiste tra le due risposte allo scalino  $y(t)$  e  $y_1(t)$ .**

Le due funzioni di trasferimento hanno questa relazione

$$G_1(s) = sG(s)$$

Quindi, moltiplicando ambo i membri per  $U(s)$  si ha

$$G_1(s)U(s) = sG(s)U(s)$$

cioè

$$Y_1(s) = sY(s)$$

La risposta ad un qualsiasi ingresso di  $G_1(s)$  è la derivata della risposta di  $G(s)$  al medesimo ingresso.

E' possibile verificarlo calcolando la derivata di  $y(t)$

$$\begin{aligned}\frac{dy(t)}{dt} &= -\frac{1}{17}(-e^{-t}\cos(4t) - 4e^{-t}\sin(4t)) - \frac{1}{17}\frac{1}{4}(-e^{-t}\sin(4t) + 4e^{-t}\cos(4t)) = \\ &= \frac{1}{17}e^{-t}\cos(4t) + \frac{1}{17}4e^{-t}\sin(4t) + \frac{1}{17}\frac{1}{4}e^{-t}\sin(4t) - \frac{1}{17}e^{-t}\cos(4t) = \\ &= \frac{1}{17}\left(4 + \frac{1}{4}\right)e^{-t}\sin(4t) = \frac{1}{4}e^{-t}\sin(4t) = y_1(t)\end{aligned}$$