UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Dipartimento di Ingegneria Gestionale, dell'Informazione e della Produzione

Controllo Avanzato Multivariabile

L1: Introduzione

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA INFORMATICA

TEACHERS
Prof. Antonio Ferramosca
Ing. Marco Polver

PLACE
Università di Bergamo

Chi sono

Nome: Antonio Ferramosca

Studi: Ph.D. Ingegneria (Control Systems) @ *Universidad de Sevilla* (Spagna).
Laurea Magistrale in Ing. Informatica @ *Università di Pavia*

Research topics: Model Predictive Control (MPC), Economic MPC, Artificial Pancreas

Insegnamenti:

1. Dynamic system identification (EMH - 9 cfu)
2. Controllo Avanzato Multivariabile (I.I. – 6 cfu)
3. Data analysis lab (EMH - 3 cfu)

Contatti:

- antonio.ferramosca@unibg.it
- http://www.antonioferramosca.com/
- http://cal.unibg.it/ **CAL research laboratory**
- @ControlAutomationLabUnibg

Contenuti del corso

1. **Sistemi non lineari a tempo discreto**
   - 1.1 Equilibrio
   - 1.2 Stabilità
   - 1.3 Teorema di Lyapunov
2. **Proprietà strutturali dei sistemi lineari multivariabili**
   - 2.1 Controllabilità
   - 2.2 Osservabilità
   - 2.3 Poli e zeri invarianti
3. **Analisi dei sistemi multivariabili**
   - 3.1 Anello aperto
   - 3.2 Anello chiuso
4. **Controllo ottimo**
   - 4.1 Controllo Lineare Quadratico LQR
   - 4.2 Proprietà
   - 4.3 Esempi
5. **Controllo predittivo MPC**
   - 5.1 Formulazione
   - 5.2 Proprietà
   - 5.3 Stabilità
   - 5.4 Implementazioni
6. **Esempi di applicazioni**
   - 6.1 Pancreas Artificiale
   - 6.2 Forno SMI

Struttura del corso

- Controllo Avanzato Multivariabile è un insegnamento da 6 cfu

  60 ore di lezione

- 48 ore di lezioni frontali

  Preparazione necessaria per sostenere l'esame scritto.

- 12 ore di esercitazioni in Matlab

  Preparazione necessaria per sviluppare il progetto.

Trovate il link al Team del Corso su: http://cal.unibg.it/cam/

Pre-requisiti (suggeriti)

- Analisi 1
- Fondamenti di algebra lineare

Pre-requisiti (opzionali)

- Fondamenti di automatica
- Analisi 2

Esame

- Esame scritto – 1 ora: solo quesiti teorici
- Progetto: implementazione di controlli avanzati (gruppi da 2/3 studenti)
- Materials: https://cal.unibg.it/courses/cam/

Opportunità di tesi

- Artificial Pancreas: controllo predittivo e fault diagnosis
- Controllo predittivo di applicazioni industriali
- Altre applicazioni di controllo e data science, https://cal.unibg.it/theses/

Outline

1. Preliminari
2. Ripasso sistemi dinamici a tempo continuo
3. Stabilità: teorema di Lyapunov
4. Sistemi a tempo discreto

Outline

1. **Preliminari**
2. Ripasso sistemi dinamici a tempo continuo
3. Stabilità: teorema di Lyapunov
4. Sistemi a tempo discreto

Cosa hanno in comune questi due sistemi?

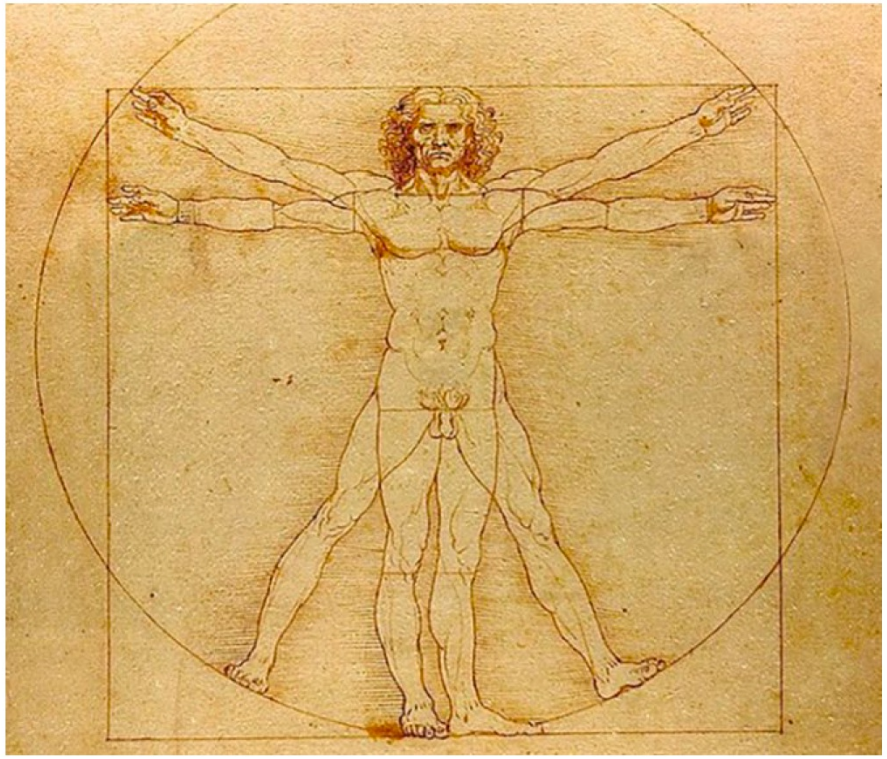
- Sono due *sistemi dinamici.*
- Possono essere descritti da equazioni differenziali non lineari molto complesse.
- Entrambi possono trasportare cose e persone a grandi distanze.

Cosa hanno in comune questi due sistemi?

La piccola differenza è che solo su uno di essi si appliccano le leggi della teoria del controllo automatico.

Ma cos'è l'automatica? → **Vediamo...**

Il controllo è una tecnologia occulta



- Ce la ritroviamo di fronte tutti i giorni.
- Manuale o perfettamente automatico.

Che cosa è un controllore?

CONTROLLO: **azione** che si esegue su un **sistema** per modificarne il **comportamento**

Azione: detta anche azione di controllo
Sistema: I componenti su cui andiamo ad agire
Comportamento: andamento desiderato della variabile sotto controllo

CONTROLLORE: colui che definisce l'azione da eseguire

Manuale: Se eseguito da un umano
Automatico: Se eseguito da un dispositivo opportunamente progettato e costruito

AUTOMATICA: Insieme di discipline che forniscono strumenti (matematici e tecnologici) per la specifica, l'analisi, il progetto e la gestione di sistemi automatici di controllo.
L'**Automatica** si occupa di (definire e) risolvere i problemi di controllo

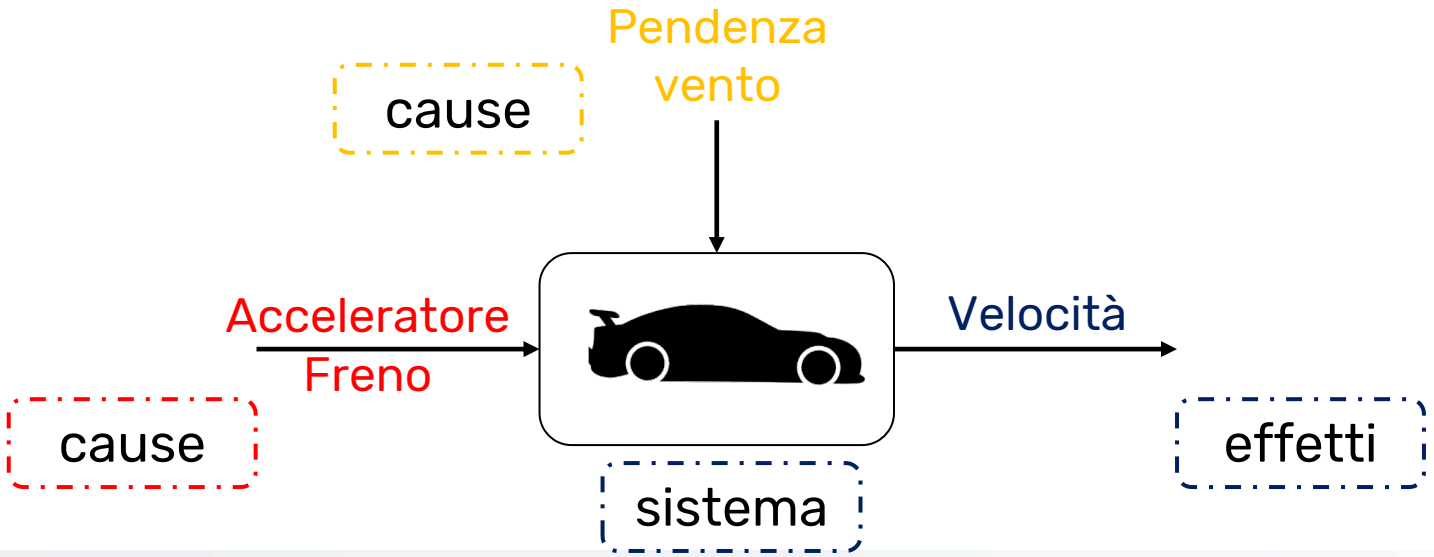
Che cosa è un controllore? Esempio

- Sistema → automobile
- Comportamento desiderato → mantenimento velocità impostata
- Azione di controllo → accelerare/frenare

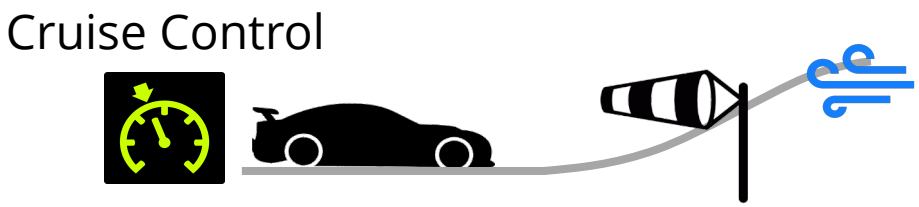
Il Cruise Control è uno dei più classici esempi di sistemi di controllo

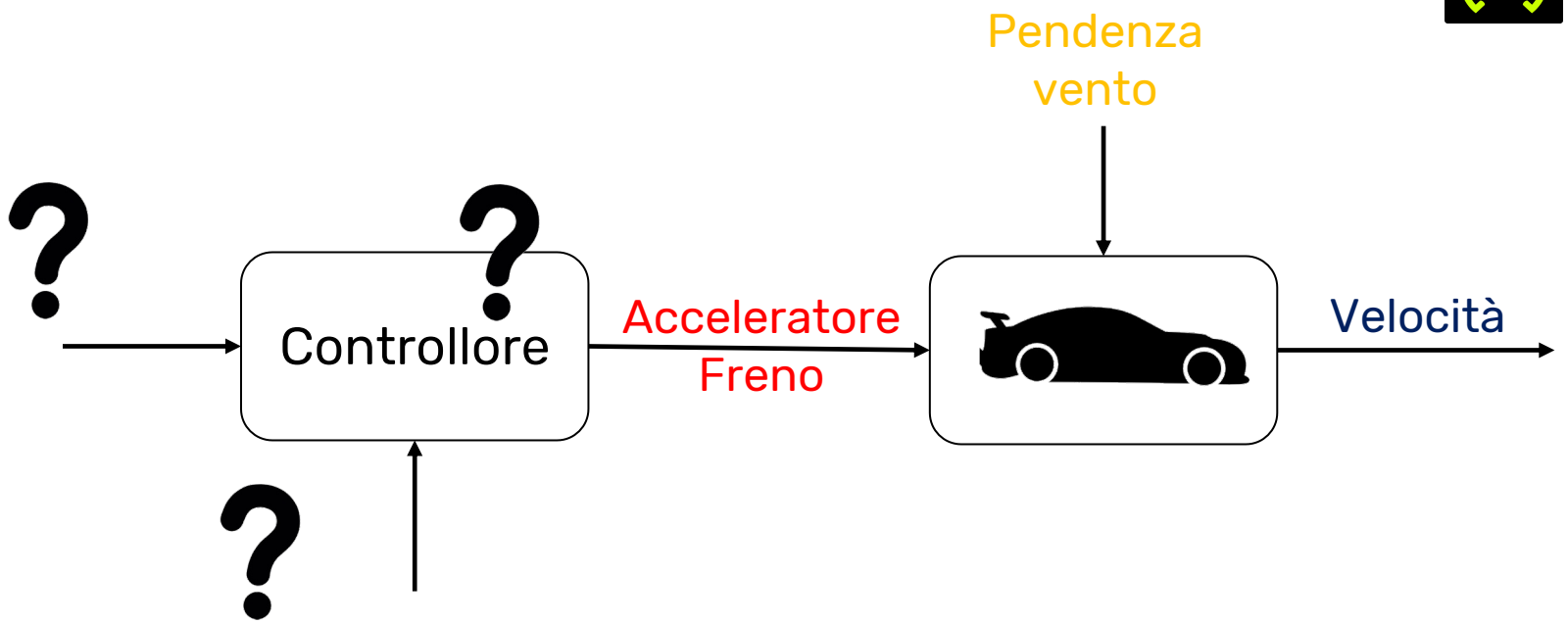
Che cosa è un controllore? Esempio

Il Cruise Control è uno dei più classici esempi di sistemi di controllo

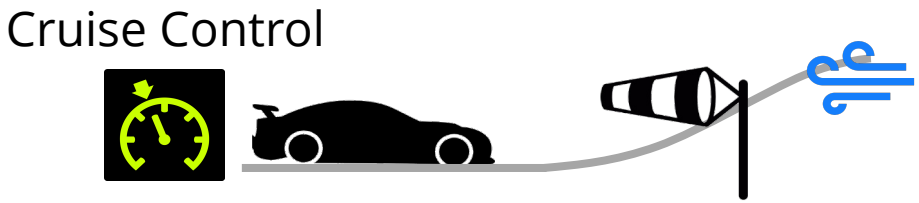


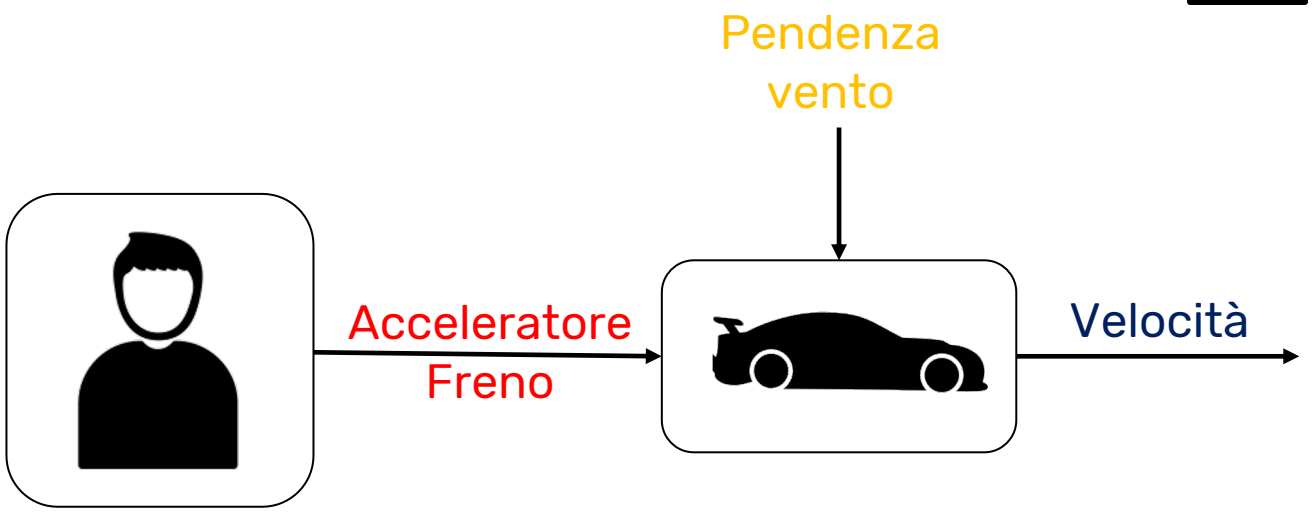
Che cosa è un controllore? Esempio





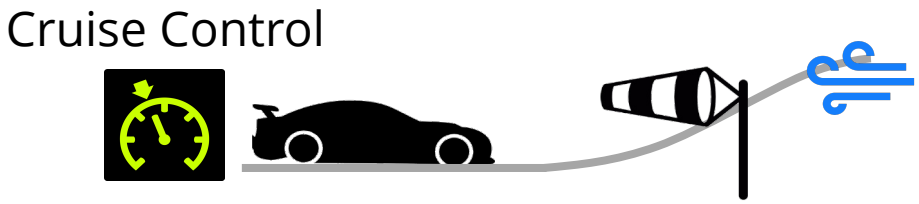
Che cosa è un controllore? Esempio

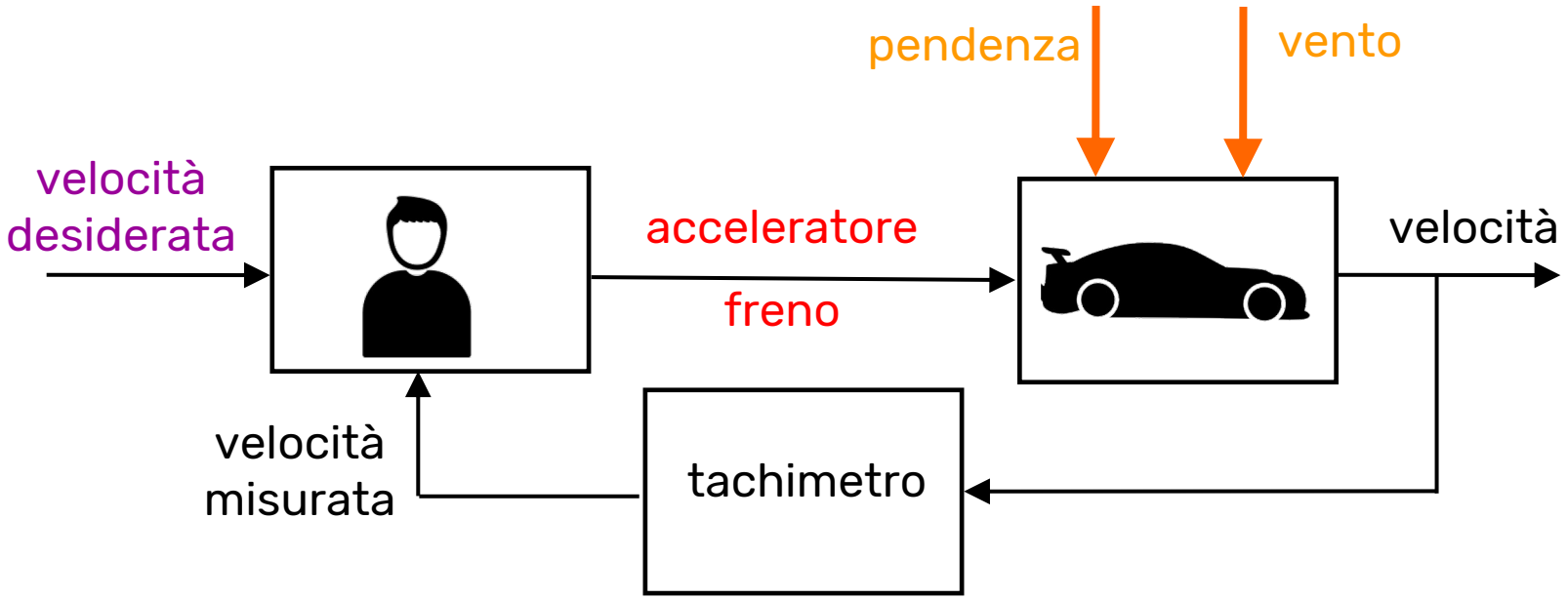




Che cosa è un controllore? Esempio

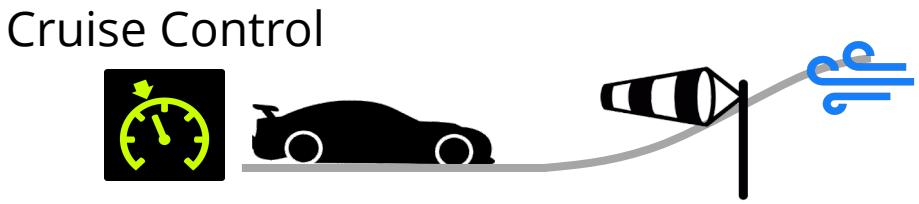
Ipotesi 1

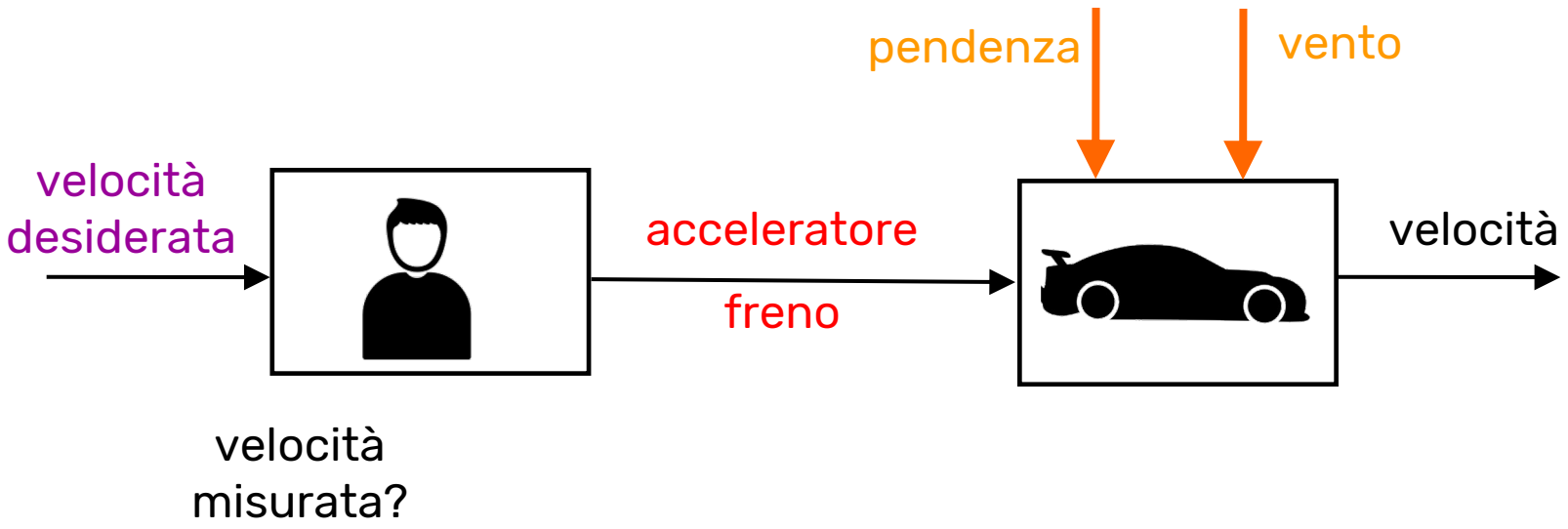




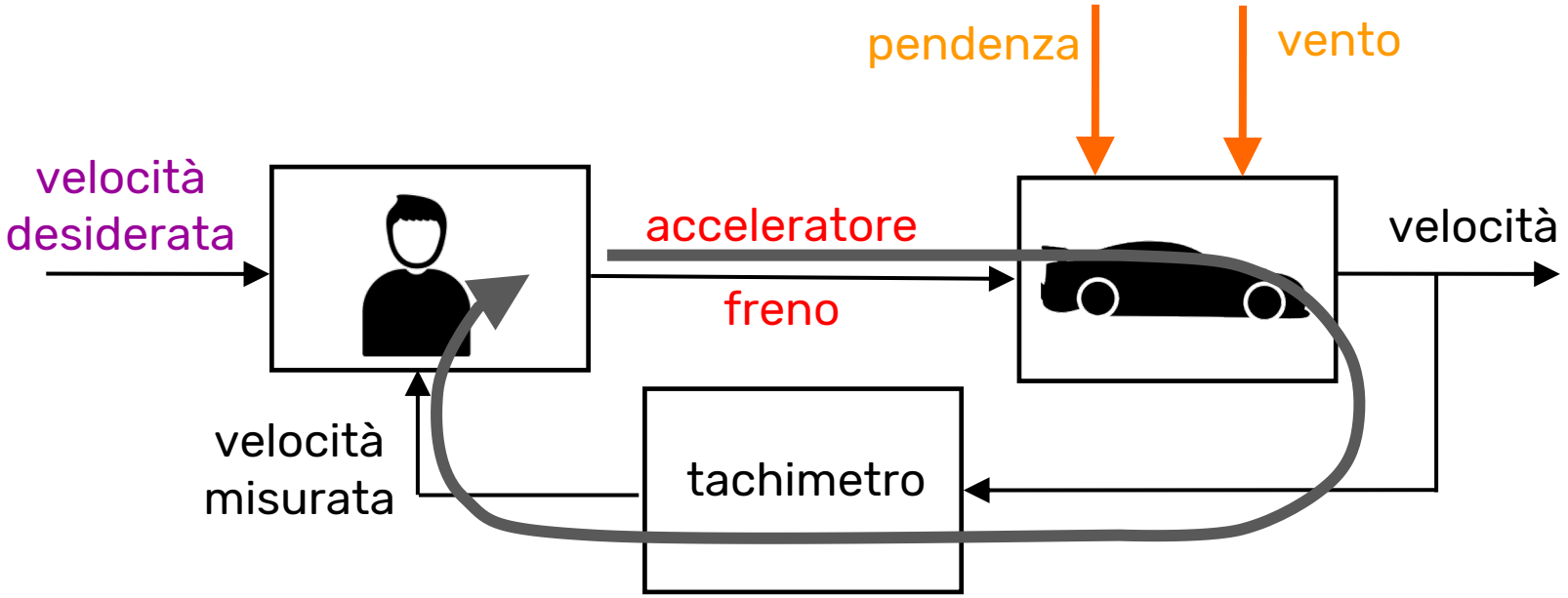
Che cosa è un controllore? Esempio

Ipotesi 2

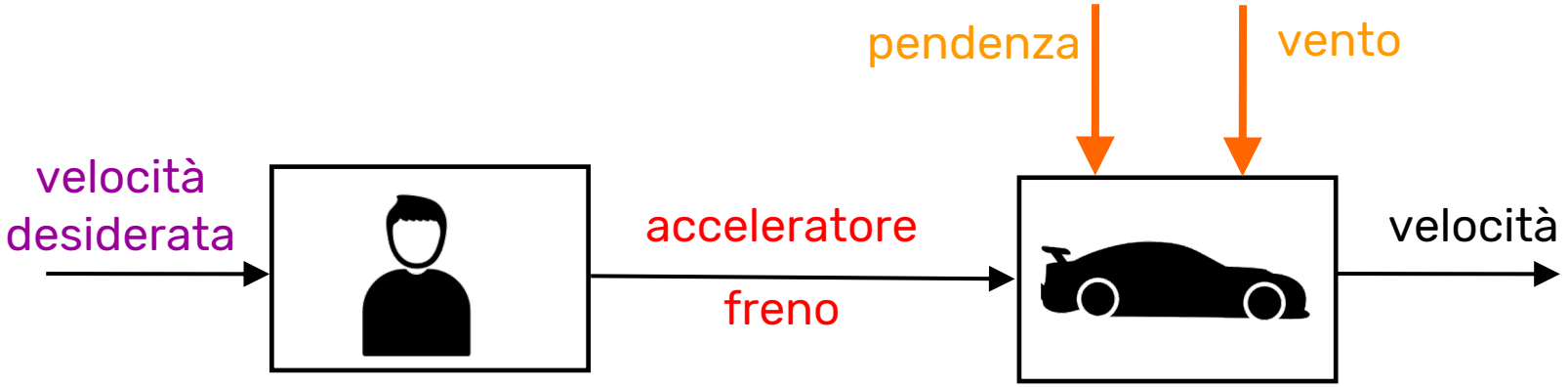




Controllo Anello Aperto Vs Anello Chiuso



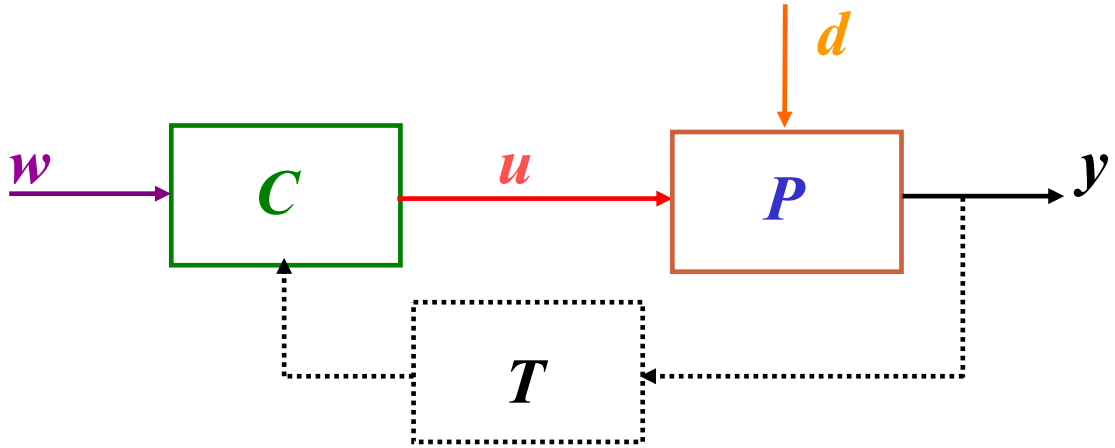
Strategia di controllo in **anello chiuso**



Strategia di controllo in **anello aperto**

Definizione sistema di controllo

Sistema di controllo



P	sistema sotto controllo (processo, impianto)	**SISTEMI**
C	controllore (regolatore)	
T	trasduttore (misuratore, sensore)	
y	variabile controllata (uscita)	**SEGNALI**
u	azione di controllo (ingresso manipolabile)	
d	disturbo (ingresso non manipolabile)	
w	variabile di riferimento (andamento desiderato)	

Dove troviamo i controlli automatici?

L'automatica è stata definita la "**hidden technology**". Difficile da vedere, ma (veramente) onnipresente.

Si trovano soluzioni "automatiche" a problemi nei settori scientifici ed industriali più vari (oltre che nella vita quotidiana):

- Automotive (sospensioni elettroniche, trasmissioni)
- Biomedicale (riabilitazione, pancreas artificiale)
- Fisica Nucleare
- Industria di processo (lavorazione della plastica)
- Industria alimentare (lavorazione dello zucchero)
- Logistica industriale (AGV)
- Finanza (mercato del credito)
- Agricoltura
- ...

Cosa vedremo

Sistemi lineari e non lineari multivariabili a tempo discreto

- Stabilità
- Teoria di Lyapunov

Proprietà strutturali dei sistemi

Schemi di controllo multivariabile classico

Tecniche di controllo avanzato

- Assegnamento degli autovalori
- Controllo ottimo
- Controllo predittivo

Outline

1. Preliminari
2. **Ripasso sistemi dinamici a tempo continuo**
3. Stabilità: teorema di Lyapunov
4. Sistemi a tempo discreto

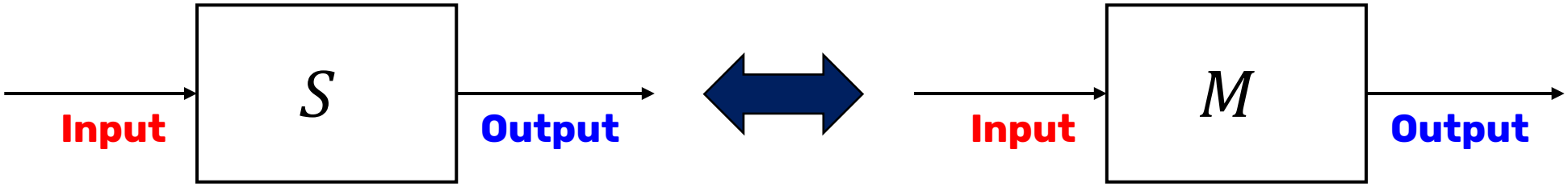
Sistema VS Modello

In questo corso tratteremo dei **sistemi dinamici** e della loro rappresentazione attraverso **modelli matematici**.

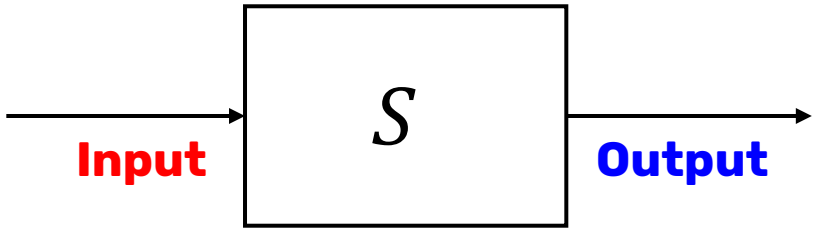
Sistema: meccanismo astratto che trasforma **inputs** (ingressi, cause) in **outputs** (uscite, effetti)

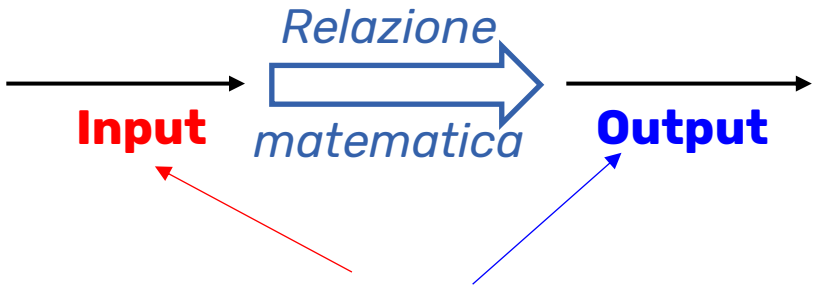
Modello: descrizione matematica di un sistema

- Relazione tra input ed output espressa attraverso una formula matematica, es. $V = R \cdot I$ (legge di Ohm) o $F = m \cdot a$ (2° legge di Newton).



Sistema VS Modello

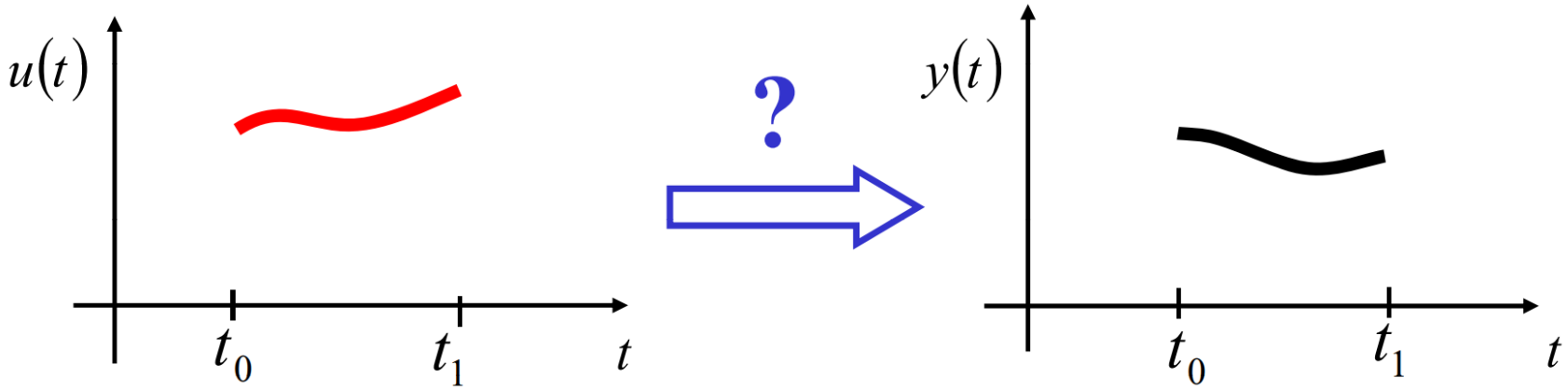




Funzioni reali del tempo continuo

Che tipo di relazioni matematiche servono?

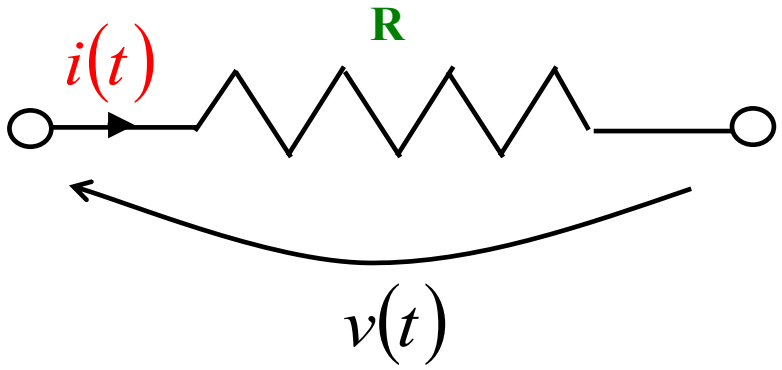
Sistema dinamico

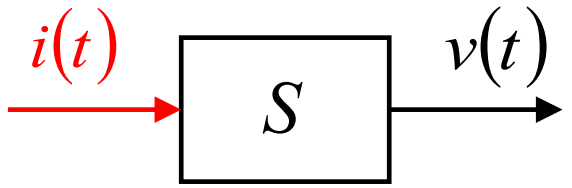


Cosa vuol dire
dinamico?

La conoscenza del valore delle variabili di ingresso al tempo *t* **non è sufficiente** a determinare univocamente il valore delle variabili di uscita al medesimo tempo *t*

Esempio - Resistenza





$i(t)$ corrente nella resistenza
$v(t)$ tensione ai capi della resistenza

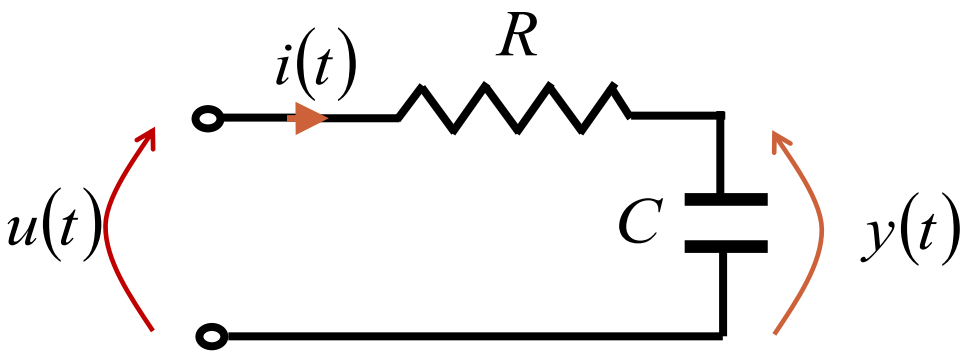
Legge di Ohm: $v(t) = Ri(t)$

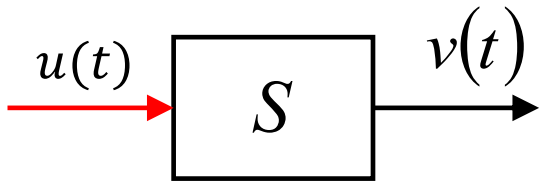
Equazione puramente algebrica (senza "memoria")

Basta conoscere ***i* al tempo *t*** per determinare univocamente ***v* al tempo *t***

E' un sistema NON dinamico

Esempio – Circuito RC





Bilancio di tensione (nella maglia)

$$u(t) = Ri(t) + y(t)$$
$$i(t) = C\dot{y}(t)$$

$$u(t) = RC\dot{y}(t) + y(t)$$

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}u(t)$$

Equazione differenziale del 1° ordine, lineare, non omogenea, a coefficienti costanti

Equazione differenziale (con "memoria")

NON basta conoscere ***u* al tempo *t*** per determinare univocamente ***y al tempo t***

E' un sistema dinamico

Dinamico Vs Non Dinamico

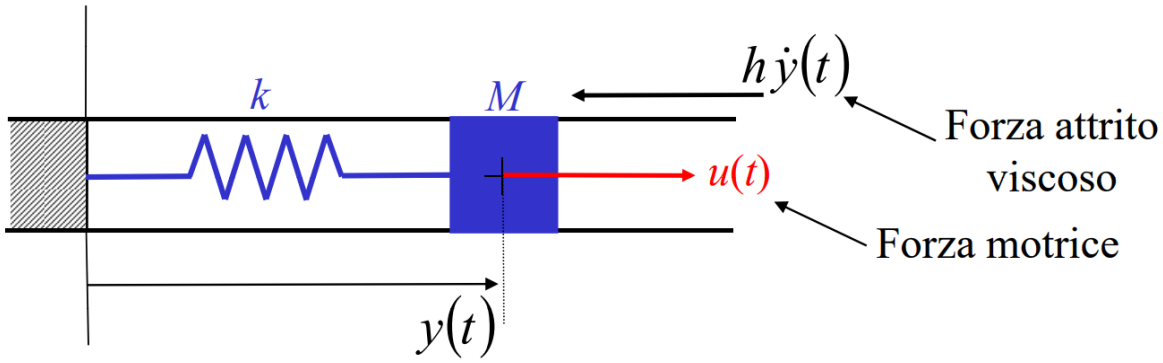
- In un sistema dinamico, è necessario conoscere qualcosa di più oltre al semplice andamento delle variabili di ingresso

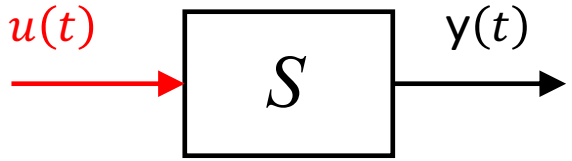
- Si presenta la necessità di inserire della «***memoria***»:
  - Si deve sapere in che stato il sistema si trovava agli istanti precedenti
  - Si deve sapere quanto vale lo stato iniziale del sistema

- I sistemi dinamici sono caratterizzati dalla presenza di **equazioni differenziali**

- Le ragioni che richiedono la conoscenza dello stato in un sistema dinamico sono sia *logiche* che *matematiche (*per risolvere eq. differenziali è necessaria la conoscenza dello stato iniziale)

Esempio: Molla-smorzatore





Bilancio di forze

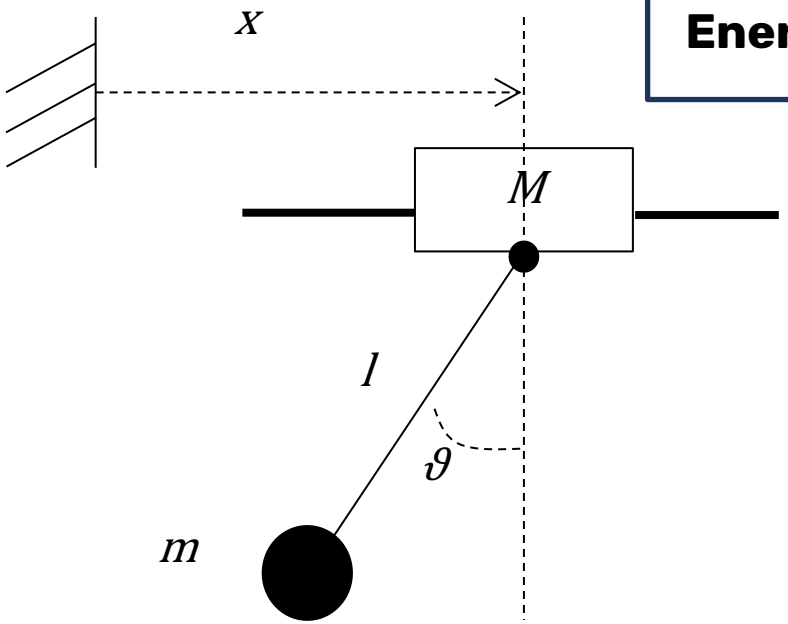
$$M\ddot{y}(t) = u(t) - ky(t) - h\dot{y}(t)$$

$$\ddot{y}(t) + \frac{h}{M}\dot{y}(t) + \frac{k}{M}y(t) = \frac{1}{M}u(t)$$

Equazione differenziale del 2° ordine, lineare, non omogenea, a coefficienti costanti

E' un sistema dinamico lineare

Esempio: Carroponte



Energia cinetica **Energia potenziale**

$$L = T - U$$

Equazioni di Eulero-Lagrange

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}^2 + ml\dot{\vartheta}\dot{x}\cos\vartheta + mgl\cos\vartheta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = -b\dot{\vartheta}$$

$$ml^2\ddot{\vartheta} + ml\ddot{x}\cos\vartheta + mgl\sin\vartheta = -b\dot{\vartheta}$$

Equazione differenziale del 2° ordine, **NON LINEARE**, non omogenea, a coefficienti costanti

E' un sistema dinamico non lineare

Rappresentazione nello spazio degli stati

La generica rappresentazione nello spazio degli stati di un sistema dinamico non lineare tempo invariante

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), u(t))) \\ y(t) = g\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), u(t)\big) \end{cases}$$

Equazione di stato

Equazione di uscita

$\boldsymbol{x}(t) \in \Re^{\boldsymbol{n}}$ vettore

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x_0}$$

Stato iniziale

Le variabili di stato sono **variabili interne** $(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}))$ del sistema la cui conoscenza al tempo t_0 costituisce la minima informazione necessaria per determinare **l'uscita** $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$ a seguito di un **ingresso** $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$, per tutti i $t > t_0$

SISO → Single Input Single Output	$u(t) \in \Re$ scalare	$y(t) \in \Re$ scalare
MIMO → Multi Input Multi Output	$u(t) \in \Re^{\boldsymbol{m}}$ vettore	$y(t) \in \Re^{\boldsymbol{p}}$ vettore

Rappresentazione nello spazio degli stati

Quando non ci sono variabili d'ingresso, il sistema

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = f\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\big)$$

si definisce **autonomo**.

Quando la funzione $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ è lineare in $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ e $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$, il sistema è **lineare tempo invariante (LTI)**:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Con $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{R}^{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{B} \in \mathfrak{R}^{\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}}$, $\boldsymbol{C} \in \mathfrak{R}^{\boldsymbol{p},\boldsymbol{n}}$ e $\boldsymbol{D} \in \mathfrak{R}^{\boldsymbol{p},\boldsymbol{m}}$.

Equilibrio

Se immettiamo ingressi costanti $u(t) = \bar{u}$ otteniamo movimenti dello stato e dell'uscita che risultano anch'essi costanti nel tempo.

Questi movimenti sono detti ***stati e uscite di equilibrio***.

Gli stati di equilibrio devono soddisfare l'equazione $\dot{x}(t) = 0$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \\ y(t) = g(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \end{cases}$$

$$u(t) = \bar{u}\,, t \geq t_0$$

$$\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{u}}) = \boldsymbol{0}$$

Stato di equilibrio

Movimento dello stato $x(t) = \bar{x}$ costante nel tempo con

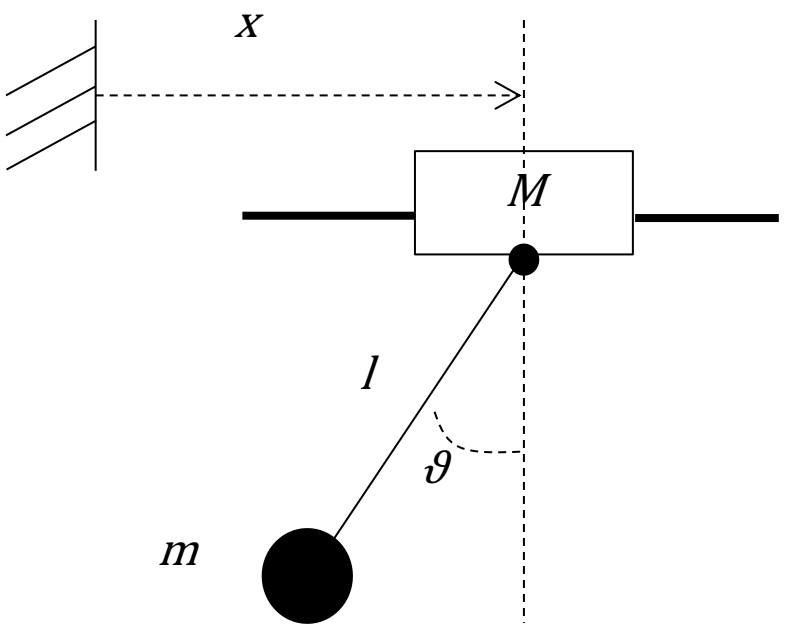
$u(t) = \bar{u}$

Uscita di equilibrio

Movimento dell'uscita $y(t) = \bar{y}$ costante nel tempo con

$u(t) = \bar{u}$

Esempio: carroponte



$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\left(\dfrac{u(t)}{l}\cos x_1(t) + \dfrac{g}{l}\sin x_1(t) + \dfrac{b}{ml^2}x_2(t)\right) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x(t)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{f(\bar{x}, \bar{u}) = 0} \qquad \boldsymbol{\bar{u} = 0}$$

$$\begin{cases} 0 = \bar{x}_2 \\ 0 = -\left(\dfrac{\bar{u}}{l}\cos \bar{x}_1 + \dfrac{g}{l}\sin \bar{x}_1 + \dfrac{b}{ml^2}\bar{x}_2\right) \\ \bar{y} = \bar{x}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ 0 = -\left(\dfrac{g}{l}\sin \bar{x}_1\right) \\ \bar{y} = \bar{x}_1 \end{cases}$$

Equilibri:

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Equilibrio dei sistemi LTI

Valutiamo la presenza di equilibri nei sistemi LTI

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Poniamo $\dot{x}(t) = 0$ in corrispondenza di $u(t) = \bar{u}$

$$0 = A\bar{x} + B\bar{u} \quad \Rightarrow \quad A\bar{x} = -B\bar{u} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$$

$\det(A) \neq 0$

Gli equilibri sono: $A\bar{x} = -B\bar{u}$

$\det(A) = 0$

Il sistema $A\bar{x} = -B\bar{u}$ può avere

- infinite soluzioni
- nessuna soluzione

Outline

1. Preliminari
2. Ripasso sistemi dinamici a tempo continuo
3. **Stabilità: teorema di Lyapunov**
4. Sistemi a tempo discreto

Stabilità

Nozione introdotta alla fine del XIX secolo dal matematico russo **Aleksandr M. Lyapunov**: si considerano le conseguenze sul movimento di un sistema di un'incertezza sul valore iniziale del suo stato, nell'ipotesi che gli ingressi siano fissi e noti.

- **La stabilità è la proprietà tale per cui un sistema, dopo una perturbazione, torna nella situazione preesistente la perturbazione**

- **La stabilità è una proprietà locale, si riferisce a perturbazioni piccole**

La proprietà di stabilità può essere valutata:

- per punti di equilibrio
- come proprietà del sistema (solo per sistemi LTI)

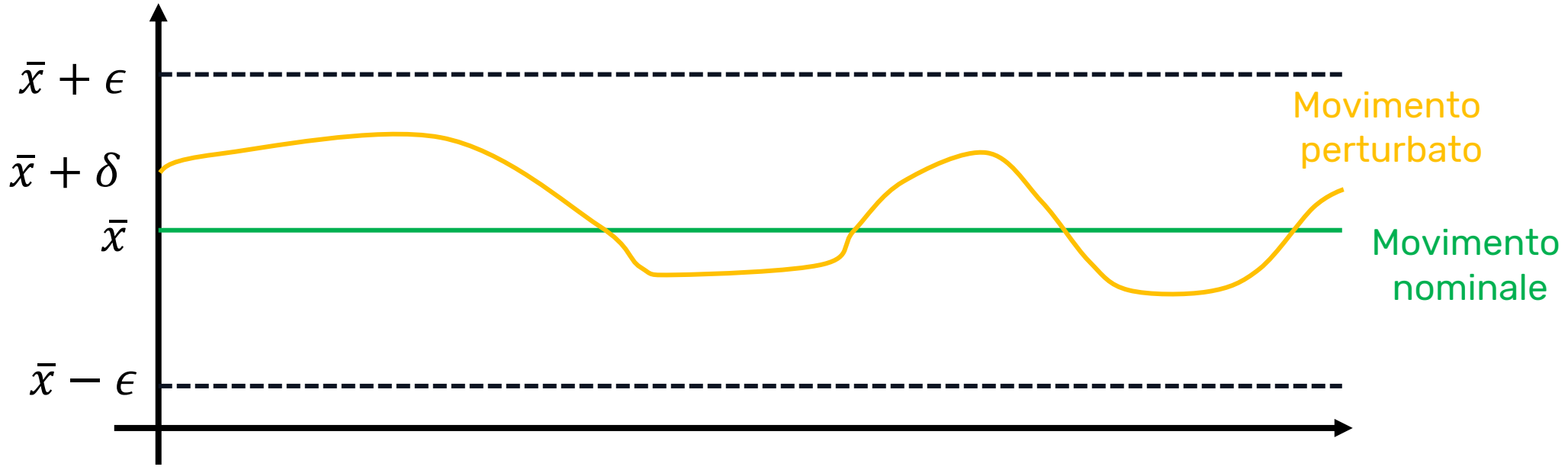
Stabilità dell'equilibrio

Uno stato di equilibrio $\bar{x}$ si dice ***stabile*** se, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale per cui per ogni stato iniziale x_0 che soddisfi:

$$\|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta$$

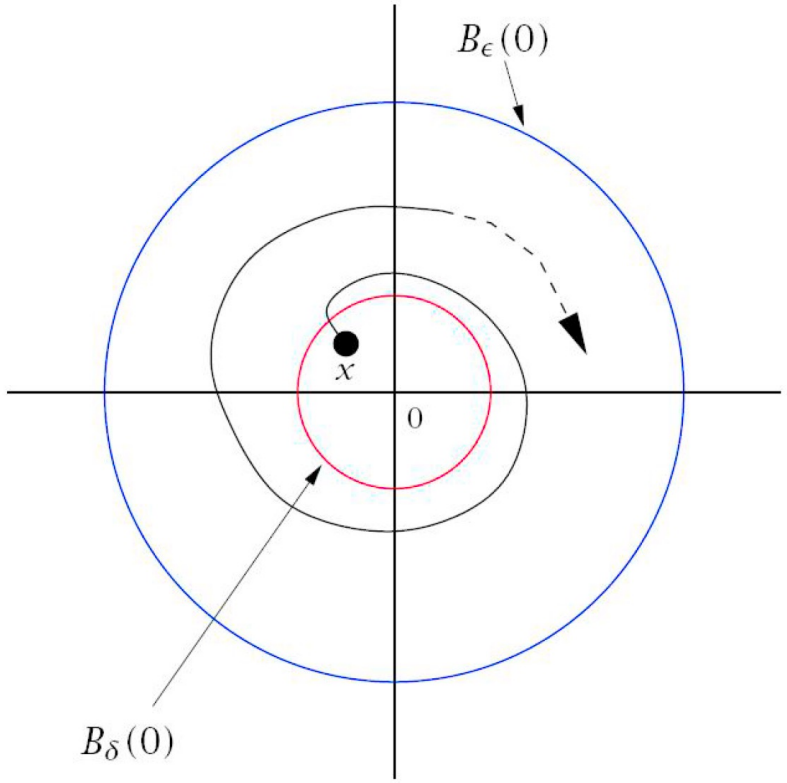
risulti

$$\|x(t) - \bar{x}\| \leq \epsilon \quad t \geq 0$$



Stabilità dell'equilibrio

Uno stato di equilibrio $\bar{x}$ *si dice* ***stabile*** *se, per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale per cui per ogni stato iniziale* x_0 *che soddisfi* $\|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta$ *risulti* $\|x(t) - \bar{x}\| \leq \epsilon \quad t \geq 0$



Stabilità dell'equilibrio

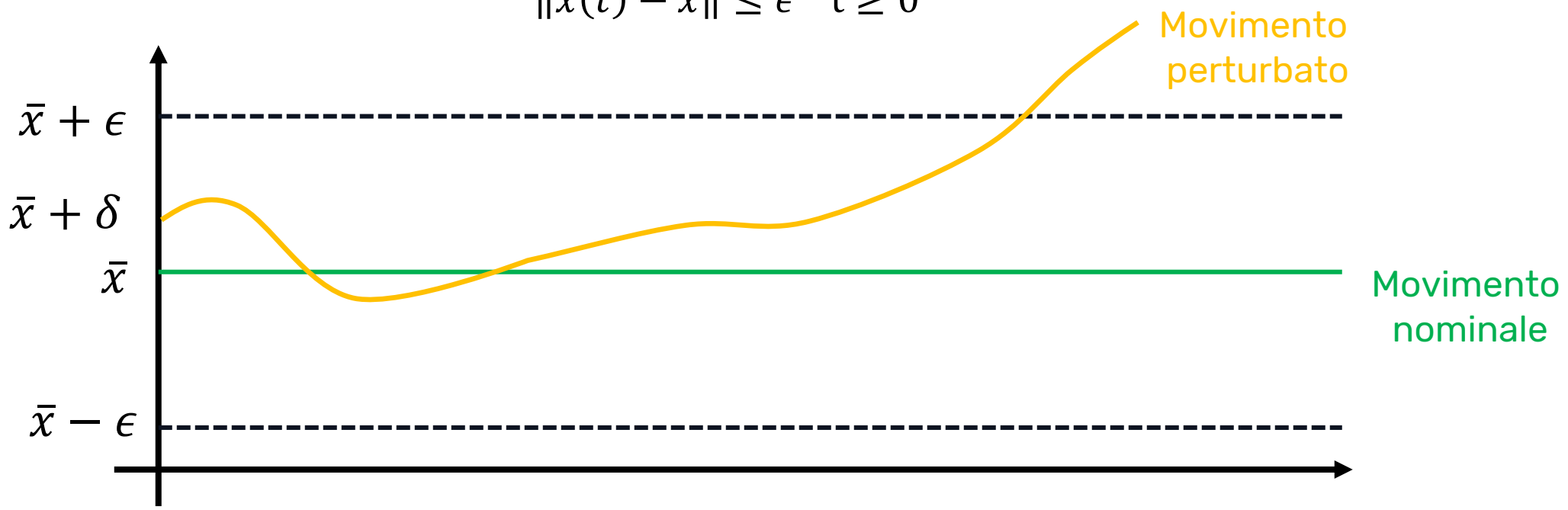
Uno stato di equilibrio $\bar{\mathbf{x}}$ si dice ***instabile*** se non è stabile.

Per ogni $\epsilon > 0$ **non** esiste $\delta > 0$ tale per cui per ogni stato iniziale x_0 che soddisfi:

$$\|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta$$

risulti

$$\|x(t) - \bar{x}\| \leq \epsilon \quad t \geq 0$$



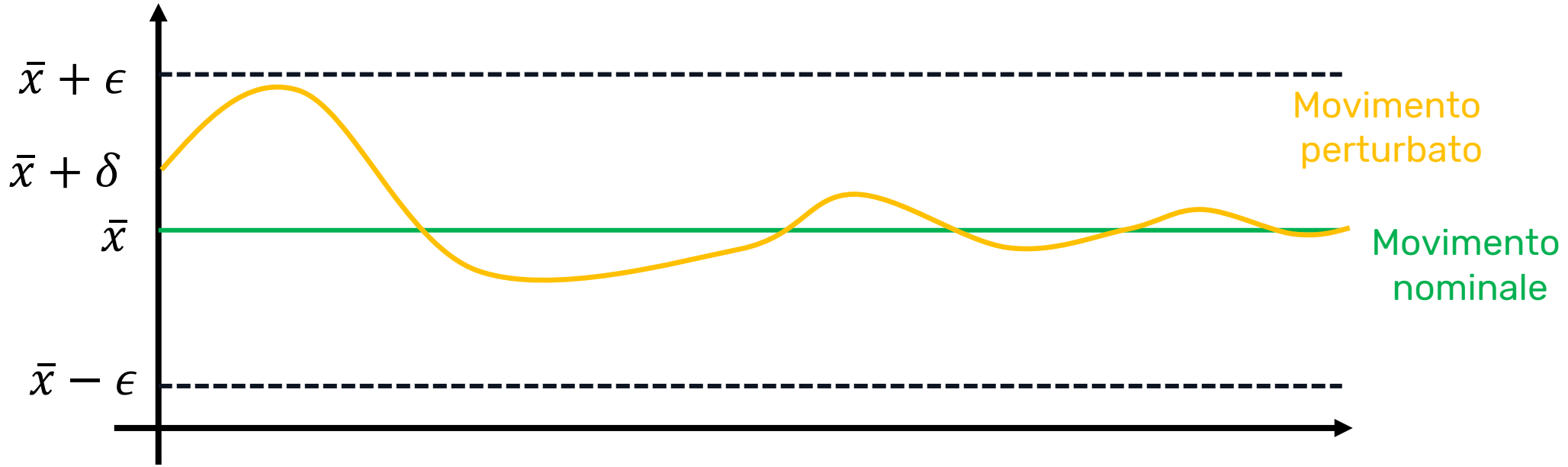
Stabilità dell'equilibrio

Uno stato di equilibrio $\bar{x}$ si dice ***asintoticamente stabile*** se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale per cui per tutti gli stati iniziali x_0 che soddisfano:

$$\|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta$$

risulti

$$\|x(t) - \bar{x}\| \leq \epsilon \quad t \geq 0 \quad e \quad \lim_{t\to\infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0$$



Stabilità dei sistemi LTI

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Il movimento nominale di un sistema LTI è dato dalla formula di Lagrange:

$$x(t) = e^{At}x_{t0} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

Ipotizzando una perturbazione della condizione iniziale $x_{t0} = \bar{x} + \delta_{\bar{x}}$ otteniamo il movimento perturbato:

$$\tilde{x}(t) = e^{At}\bar{x} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau + e^{At}\delta_{\bar{x}}$$

Stabilità dei sistemi LTI

$$\tilde{x}(t) = e^{At}\bar{x} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau + e^{At}\delta_{\bar{x}}$$

Il movimento perturbato si differenzia dal movimento nominale solamente per $\delta x(t) = e^{At}\delta_{\bar{x}}$. Possiamo quindi dedurre che, per un sistema LTI:

- Il movimento perturbato non dipende dal particolare stato di equilibrio; possiamo quindi parlare di stabilità del sistema (→**proprietà globale**)
- La differenza tra il movimento nominale e quello perturbato dipende dai valori assunti dalla matrice A

Stabilità dei sistemi LTI

$$e^{At}\delta_{\overline{x}}$$

Possiamo dedurre che:

- Sistema asintoticamente stabile $\lim_{t\to\infty} e^{At} = 0$
- Sistema Instabile e^{At} diverge con $t \to \infty$
- Sistema Stabile e^{At} limitata $\forall t$

Teorema stabilità dei sistemi LTI

1. Un sistema LTI è **asintoticamente stabile** **se e solo se** tutti gli autovalori della matrice A hanno **parte reale negativa**

$$Re(s_i) < 0, \qquad \forall i$$

2. Un sistema LTI è **instabile** **se** la matrice A ha almeno un autovalore con **parte reale positiva**

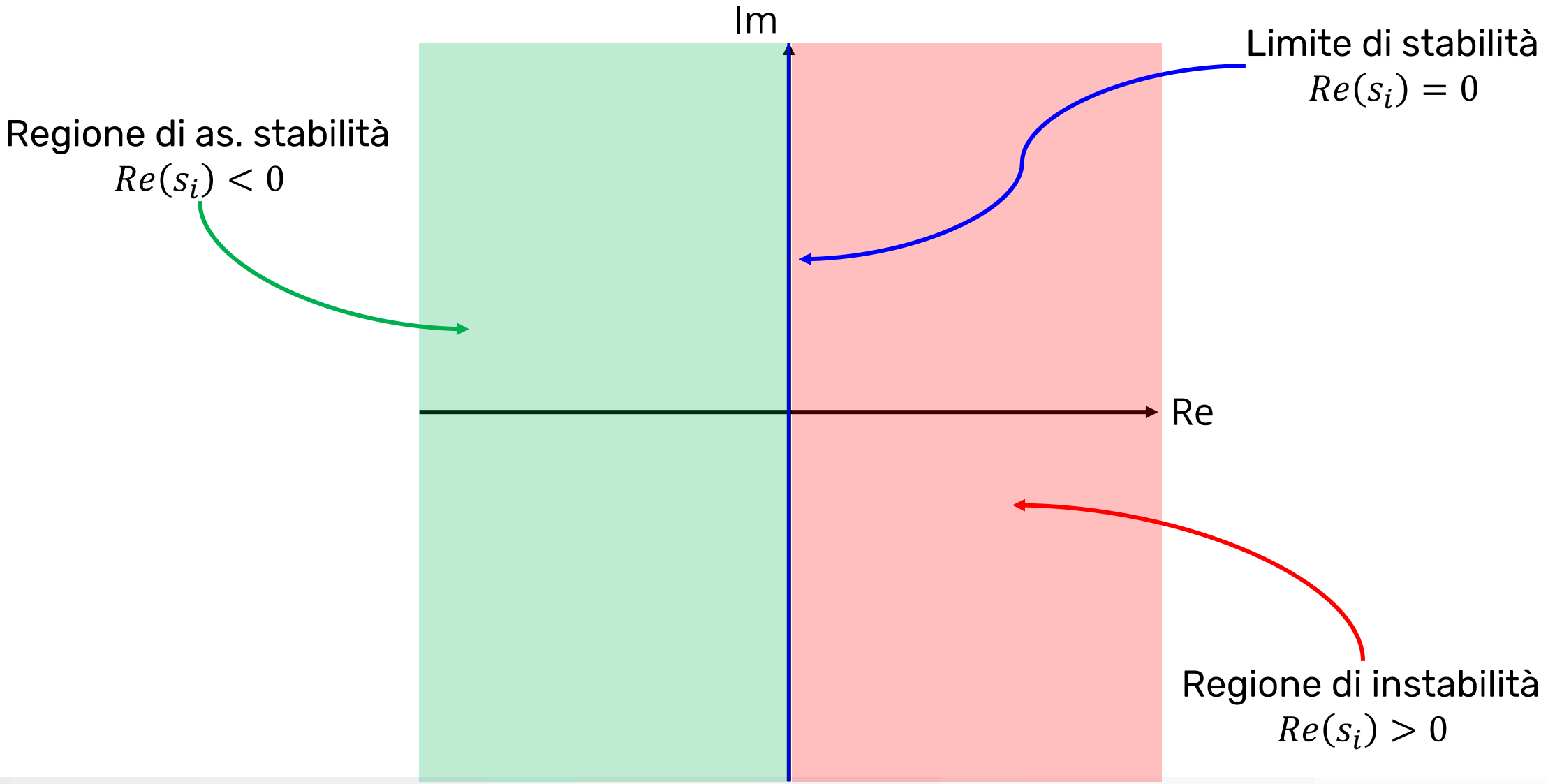
$$\exists i^* : Re(s_{i^*}) > 0$$

3. Un sistema LTI è **stabile** **se** la matrice A ha tutti gli autovalori con parte reale negativa ed **uno*** nullo

$$Re(s_i) < 0, \qquad \forall i$$

$$\exists!\, i^* : Re(s_{i^*}) = 0$$

Area di asintotica stabilità



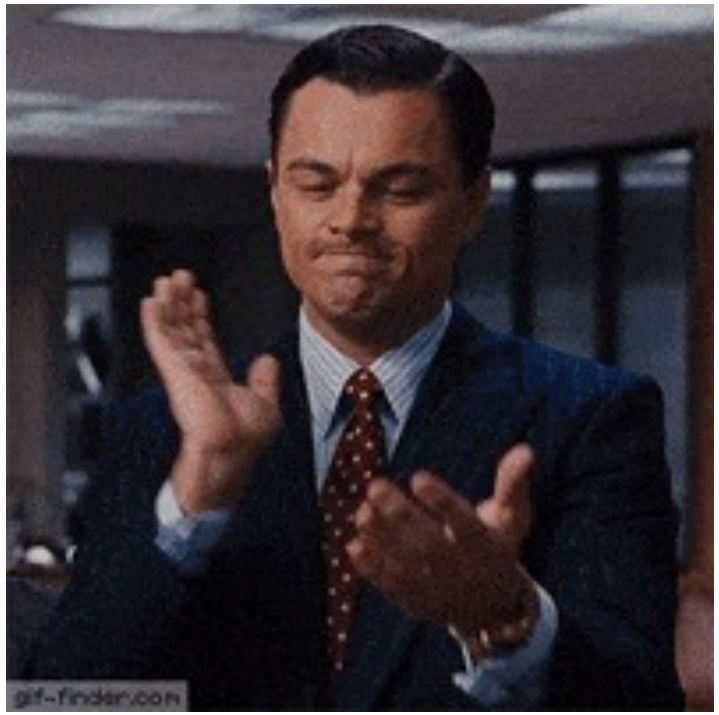
Proprietà dei sistemi LTI

1. Un sistema LTI as. stabile se perturbato, tende a tornare all'equilibrio prima della perturbazione
2. Ad un ingresso costante $\bar{u}$ è associato uno ed un solo stato di equilibrio $\bar{x}$
3. **Un sistema as. stabile non risente delle condzioni iniziali** (il movimento dello stato dipende solamente da $u(t)$)
4. Con ingresso nullo, il movimento dello stato tende asintoticamente a zero
5. Con $u(t) = \bar{u}$ l'uscita di regime di un sistema as. stabile tende al valore di regime $\bar{y}$
6. **A fronte di un ingresso limitato, l'uscita di un sistema LTI as. stabile sarà anch'essa limitata**

Stabilità nei sistemi non lineari

Cos’è un sistema non lineare?

Un sistema non lineare è un sistema che… **non è lineare!**



Cos’è un sistema non lineare?

Un sistema non lineare è un sistema che… **non è lineare!**

Ovvero è un sistema che **non verifica il principio di sovrapposizione**: l’effetto di una somma di ingressi è uguale alla somma degli effetti prodotti dal singolo ingresso.

Un sistema lineare è una combinazione lineare di variabili e gode di due proprietà fondamentali:

1. **Additività:** $f(x+y) = f(x) + f(y)$
2. **Proporzionalità:** $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

Un sistema non lineare **non soddisfa** tali proprietà.

Esempio

Sia $f(x) = x$ **(lineare)**

1. **Additività:** $f(x+y) = f(3+7) = f(10) = 10$

   $f(x) + f(y) = f(3) + f(7) = 3 + 7 = 10$ ✓

2. **Proporzionalità:** $f(\alpha x) = f(2\times 3) = f(6) = 6$

   $\alpha f(x) = 2\times f(3) = 2\times 3 = 6$ ✓

Sia $f(x) = x^2$ **(non lineare)**

1. **Additività:** $f(x+y) = f(3+7) = f(10) = 100$

   $f(x) + f(y) = f(3) + f(7) = 9 + 49 = 58$ ✗

2. **Proporzionalità:** $f(\alpha x) = f(2\times 3) = f(6) = 36$

   $\alpha f(x) = 2\times f(3) = 2\times 9 = 18$ ✗

Sistemi non lineari

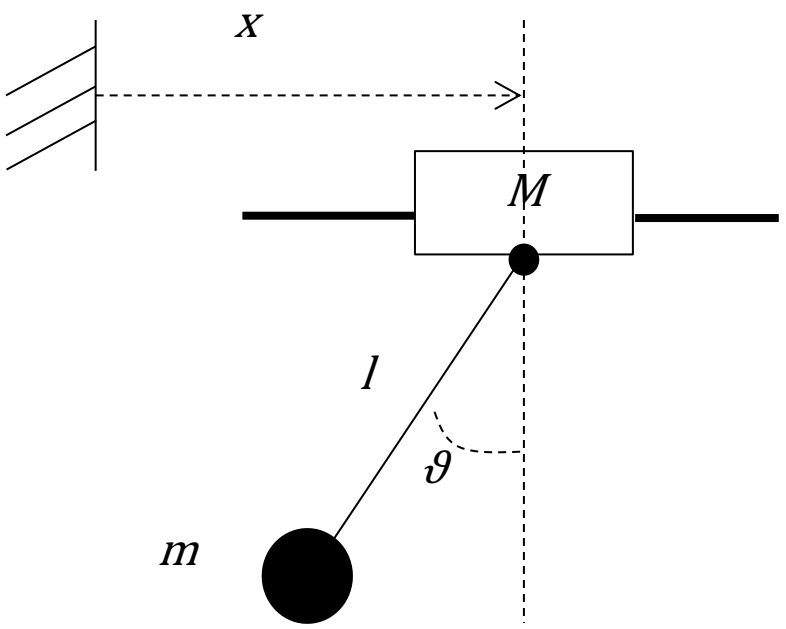
I sistemi non lineari sono quindi sistemi le cui equazioni che descrivono il loro comportamento sono non lineari.

Lo studio e analisi dei sistemi non lineari sono importanti per diverse ragioni.

Dal punto di vista del controllo automatico il fondamento del loro studio risiede nel fatto che **la natura è non lineare**.

È possibile a volte descrivere un sistema attraverso relazioni lineari, ma nella maggior parte dei casi la descrizione matematica migliore di un sistema è attraverso relazioni non lineari.

Esempio: carroponte



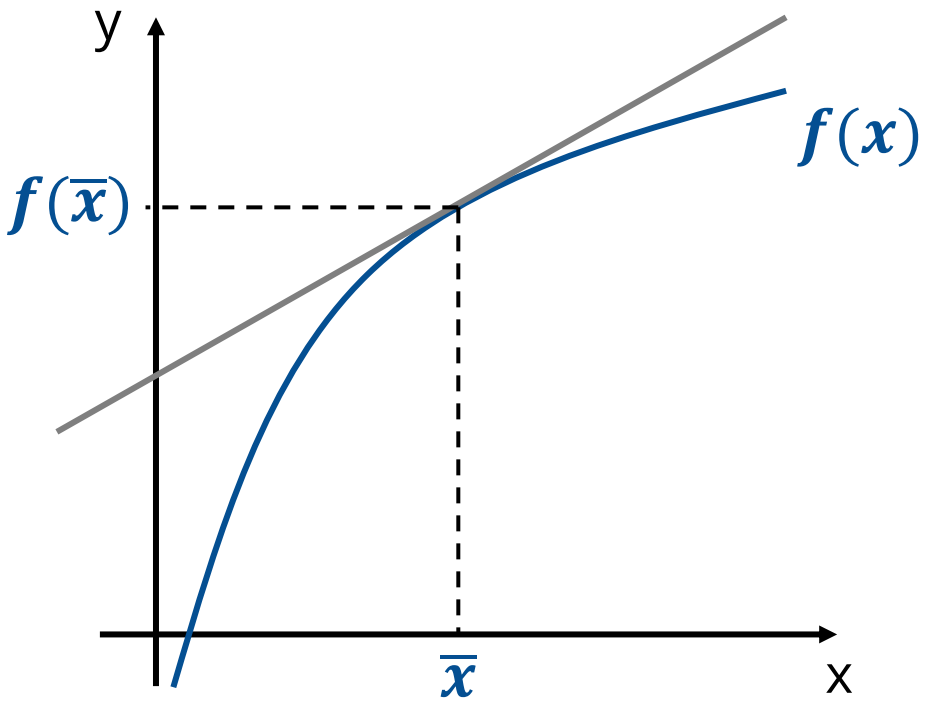
$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = x_2(t) \\ \dot{x_2}(t) = -\left(\frac{u(t)}{l} cos\, x_1\,(t) + \frac{g}{l} sin\, x_1(t) + \frac{b}{ml^2} x_2(t)\right) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ ? & \frac{b}{ml^2} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ ? \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0] \qquad D = 0$$

Come possiamo valutare le proprietà di stabilità di un sistema **non lineare**?

Sistema Tangente: linearizzazione



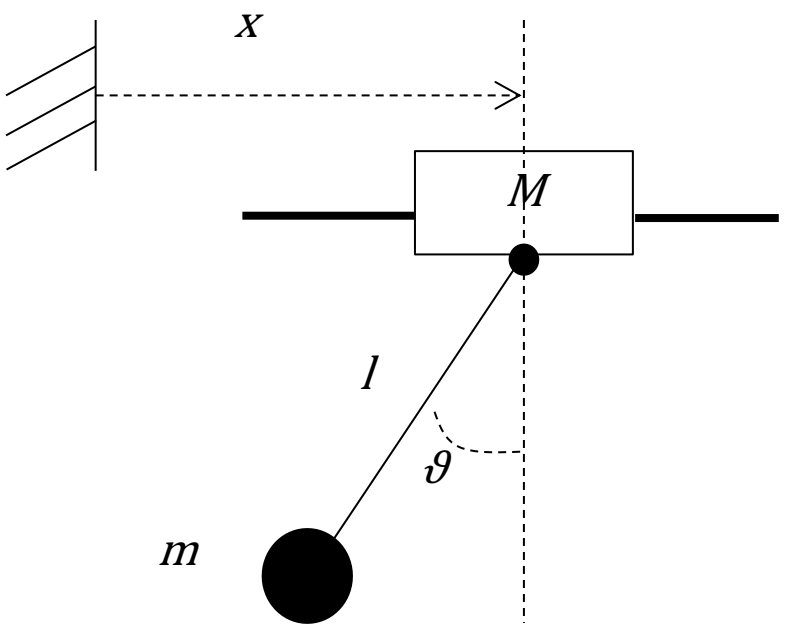
$f(x)$ è la funzione non lineare del sistema.

Vicino a $\bar{x}$ il sistema può essere approssimato dal suo modello tangente (lineare).

$$y \cong f(\bar{x}) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x})$$

Per vicino ad $\bar{x}$ si intende che $(x - \bar{x})$ è piccolo

Esempio: carroponte



$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\left(\dfrac{u(t)}{l}\cos x_1(t) + \dfrac{g}{l}\sin x_1(t) + \dfrac{b}{ml^2}x_2(t)\right) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \bar{x}_2 \\ 0 = -\left(\dfrac{\bar{u}}{l}\cos \bar{x}_1 + \dfrac{g}{l}\sin \bar{x}_1 + \dfrac{b}{ml^2}\bar{x}_2\right) \\ \bar{y} = \bar{x}_1 \end{cases}$$

Equilibri:

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

PASSO 1: scelta dell'equilibrio attorno cui linearizzare il sistema

⇨

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esempio: carroponte

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = x_2(t) \\ \dot{x_2}(t) = -\left(\frac{u(t)}{l} cos\, x_1\,(t) + \frac{g}{l} sin\, x_1(t) + \frac{b}{ml^2} x_2(t)\right) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

PASSO 2: si calcola il sistema tangente

$$\begin{cases} \delta\dot{x}(t) \cong f_x(\bar{x}, \bar{u})\delta x(t) + f_u(\bar{x}, \bar{u})\delta u(t) \\ \delta y(t) \cong g_x(\bar{x}, \bar{u})\delta x(t) + g_u(\bar{x}, \bar{u})\delta u(t) \end{cases}$$

A
$$f_x(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$$

B
$$f_u(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$$

C
$$g_x(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$$

D
$$g_u(\bar{x}, \bar{u}) = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$$

Esempio: carroponte

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = x_2(t) \\ \dot{x_2}(t) = -\left(\frac{u(t)}{l} cos\, x_1\,(t) + \frac{g}{l} sin\, x_1(t) + \frac{b}{ml^2} x_2(t)\right) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

PASSO 2: si calcola il sistema tangente

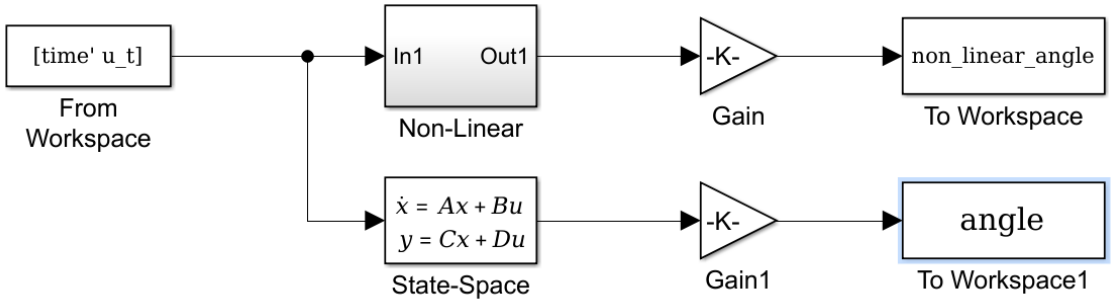
$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\bar{u}}{l} \sin \overline{x_1} - \frac{g}{l} \cos \overline{x_1} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = [1 \quad 0]_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\cos \overline{x_1}}{l} \end{bmatrix}_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{l} \end{bmatrix}$$

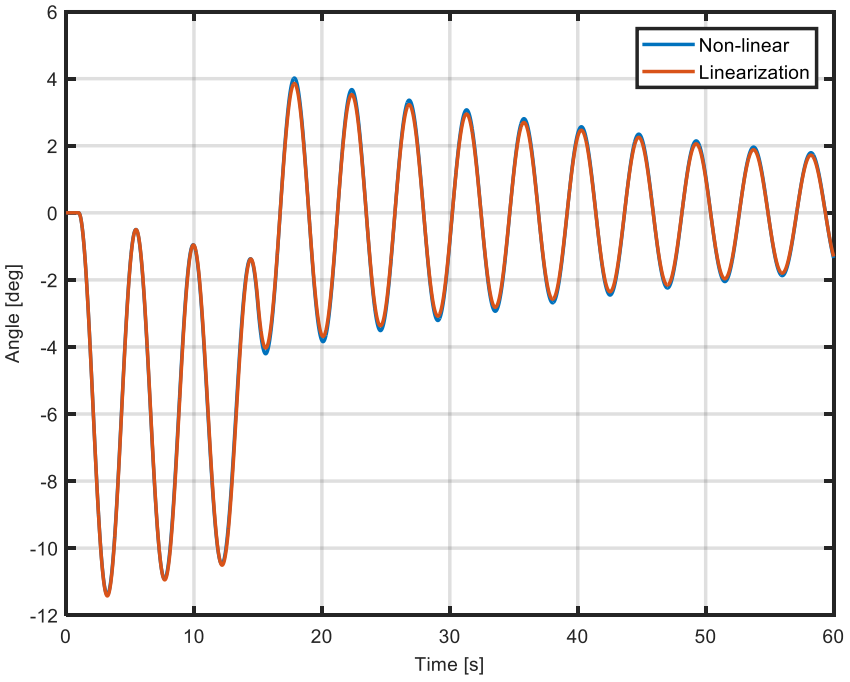
$$\tilde{D} = [0]_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$$

Esempio: carroponte

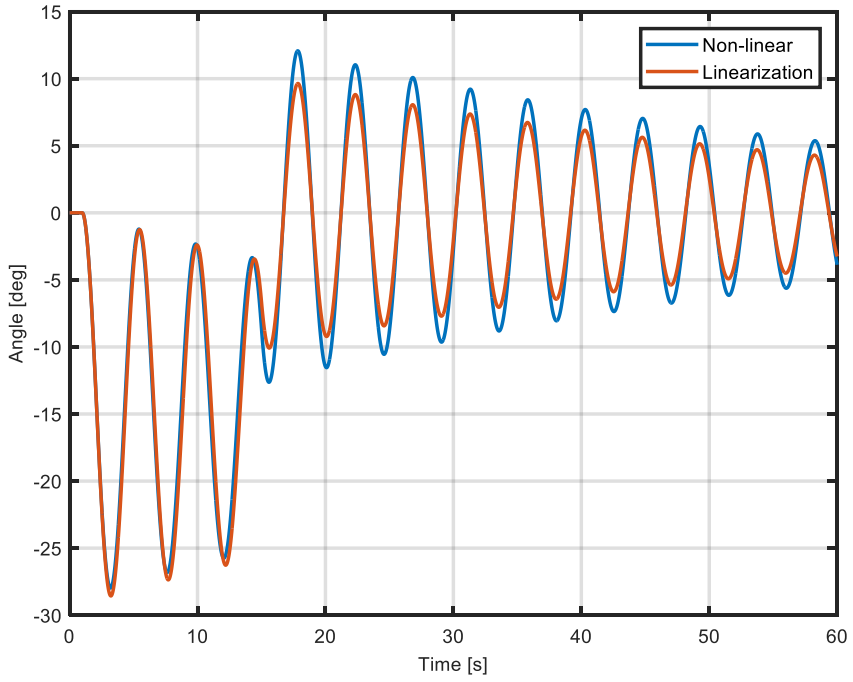


Input:

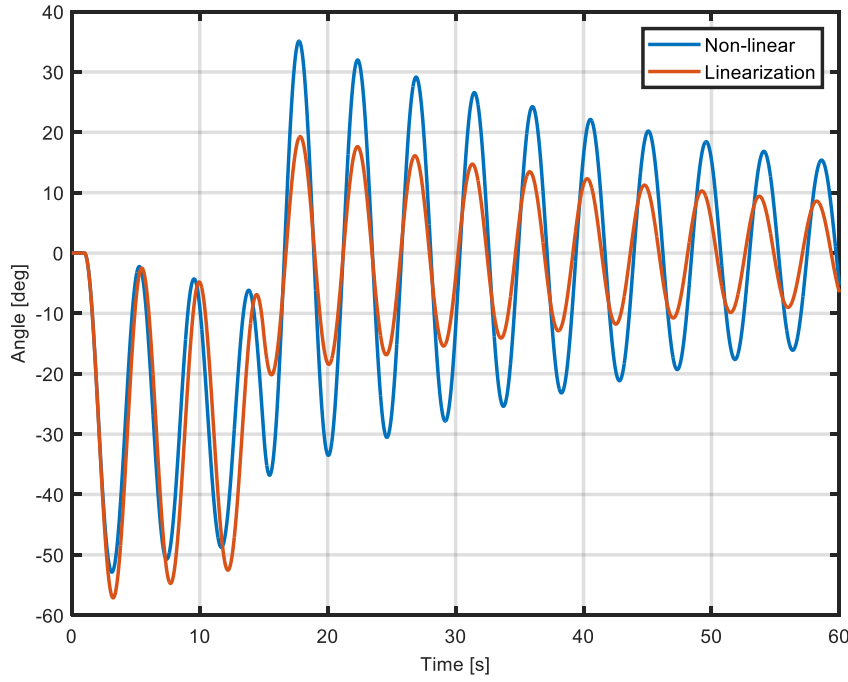
- small: step A = $1\ m/s^2$
- medium: step A = $2.5\ m/s^2$
- large: step A = $5\ m/s^2$



Errore medio: 0.07°



Errore medio: 1.05°



Errore medio: 7.5°

Stabilità di equilibri di sistemi non-lineari

La stabilità, nei sistemi non lineari, è una proprietà relativa al sistema tangente linearizzato nel punto di equilibrio.

Per valutare la stabilità del sistema in quel punto di lavoro si valuta la matrice linearizzata A:

1. Un equilibrio di un sistema non lineare è asintoticamente stabile se tutti gli autovalori della matrice dinamica del sistema lineare tangente hanno parte reale negativa

$$Re(s_i) < 0, \qquad \forall i$$

2. Un equilibrio di un sistema non lineare è instabile se almeno un autovalore della matrice dinamica del sistema lineare tangente ha parte reale positiva.

$$\exists i^*: Re\left(s_{i^*}\right) > 0$$

3. Se un autovalore ha parte reale nulla, non si può dir nulla sulla stabilità dell'equilibrio

Esempio: carroponte

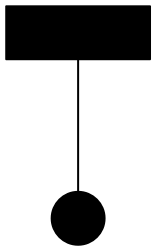
$$\tilde{A} = \left[\begin{matrix} 0 & 1 \\ \frac{\bar{u}}{l}\sin\overline{x_1} - \frac{g}{l}\cos\overline{x_1} & -\frac{b}{ml^2} \end{matrix}\right]_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \qquad \tilde{B} = \left[\begin{matrix} 0 \\ -\frac{\cos\overline{x_1}}{l} \end{matrix}\right]_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$$

$$\tilde{C} = [1 \quad 0]_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} \qquad \tilde{D} = [0]_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$$

Equilibrio 1:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{u} = 0$$

As. stabile



$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}$$

$$g = 9.81\,\frac{m}{s^2} \qquad l = 5\,m \qquad b = 1000 \qquad m = 100\,Kg$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.9 & -0.4 \end{bmatrix}$$

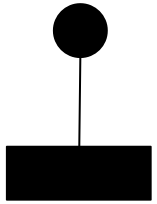
$$\lambda_1 = -0.2 + 1.36i \qquad \lambda_2 = -0.2 - 1.36i$$

Equilibrio 2:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{u} = 0$$

Instabile

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}$$



$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1.9 & -0.4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.19 \qquad \lambda_2 = -1.59$$

Contenuti del corso

1. **Sistemi non lineari a tempo discreto**
   - 1.1 Equilibrio
   - 1.2 Stabilità
   - 1.3 Teorema di Lyapunov
2. **Proprietà strutturali dei sistemi lineari multivariabili**
   - 2.1 Controllabilità
   - 2.2 Osservabilità
   - 2.3 Poli e zeri invarianti
3. **Analisi dei sistemi multivariabili**
   - 3.1 Anello aperto
   - 3.2 Anello chiuso
4. **Controllo ottimo**
   - 4.1 Controllo Lineare Quadratico LQR
   - 4.2 Proprietà
   - 4.3 Esempi
5. **Controllo predittivo MPC**
   - 5.1 Formulazione
   - 5.2 Proprietà
   - 5.3 Stabilità
   - 5.4 Implementazioni
6. **Esempi di applicazioni**
   - 6.1 Pancreas Artificiale
   - 6.2 Forno SMI