UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Dipartimento di Ingegneria Gestionale, dell'Informazione e della Produzione

Controllo Avanzato Multivariabile

L13: Economic Model Predictive Control

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA INFORMATICA

TEACHERS
Prof. Antonio Ferramosca

PLACE
Università di Bergamo

Contenuti del corso

1. **Sistemi non lineari a tempo discreto**
   - 1.1 Equilibrio
   - 1.2 Stabilità
   - 1.3 Teorema di Lyapunov
2. **Proprietà strutturali dei sistemi lineari multivariabili**
   - 2.1 Controllabilità
   - 2.2 Osservabilità
   - 2.3 Poli e zeri invarianti
3. **Analisi dei sistemi multivariabili**
   - 3.1 Anello aperto
   - 3.2 Anello chiuso
4. **Controllo ottimo**
   - 4.1 Proprietà
   - 4.2 Esempi
   - 4.3 Controllo Lineare Quadratico LQR
   - 4.4 Progetto con osservatore
5. **Controllo predittivo MPC**
   - 5.1 Formulazione
   - 5.2 Proprietà
   - 5.3 Stabilità
   - 5.4 Implementazioni
6. **Esempi di applicazioni**
   - 6.1 Pancreas Artificiale
   - 6.2 Forno SMI

Outline

1. Introduzione
2. Formulazione
3. Dimostrazione di stabilità

Outline

1. **Introduzione**
2. Formulazione
3. Dimostrazione di stabilità

Motivazione

Production specifications

Operational Constraints

Environmental Regulations

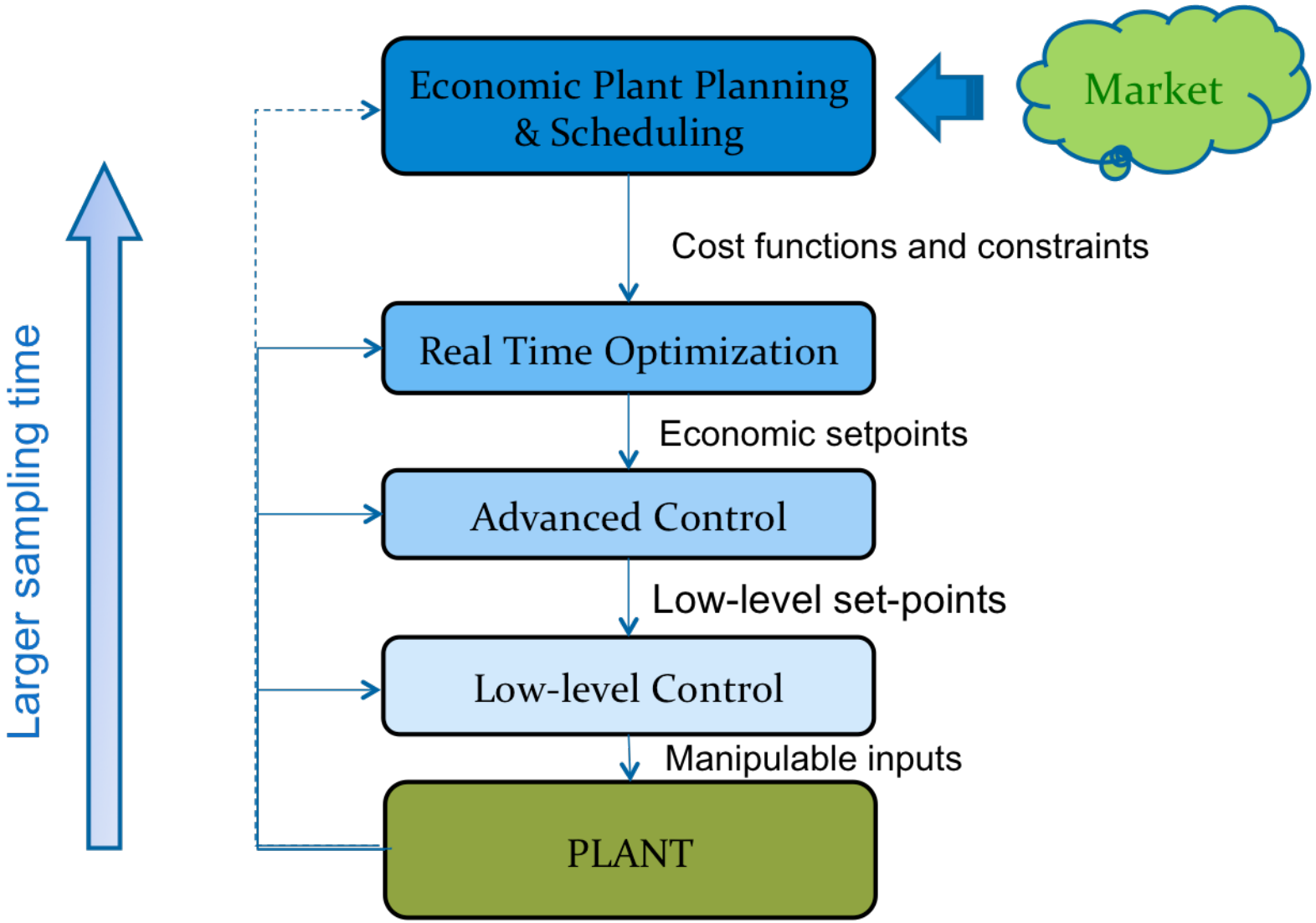
Safety

Process Optimization

Economics

Massimizzare i guadagni

Motivazione



Introduzione

Il **Model Predictive Control (MPC)** nasce proprio allo scopo di risolvere questa esigenza.

L'obiettivo è sempre quello di massimizzare il profitto, minimizzando la spesa.

Questa informazione, puramente economica, nel caso del setpoint tracking è rappresentata solo dal punto di equilibrio verso il quale vuole essere fatto convergere il sistema.

Tale formulazione ha però come unico scopo quello di garantire la convergenza asitotica al setpoint.

Vincolo terminale di uguglianza

x_s contiene l'unica informazione economica che viene comunicata a MPC.

$$\min_{\boldsymbol{u}} \sum_{j=0}^{N-1} ||x(j) - x_s||_Q^2 + ||u(j) - u_s||_R^2$$

$$s.t.\ x(0) = x(k)$$

Condizione iniziale = Feedback di stato

$$x(j+1) = Ax(j) + Bu(j)$$

$$x(j) \in \mathcal{X} \quad u(j) \in \mathcal{U}$$

$$x(N) = x_s$$

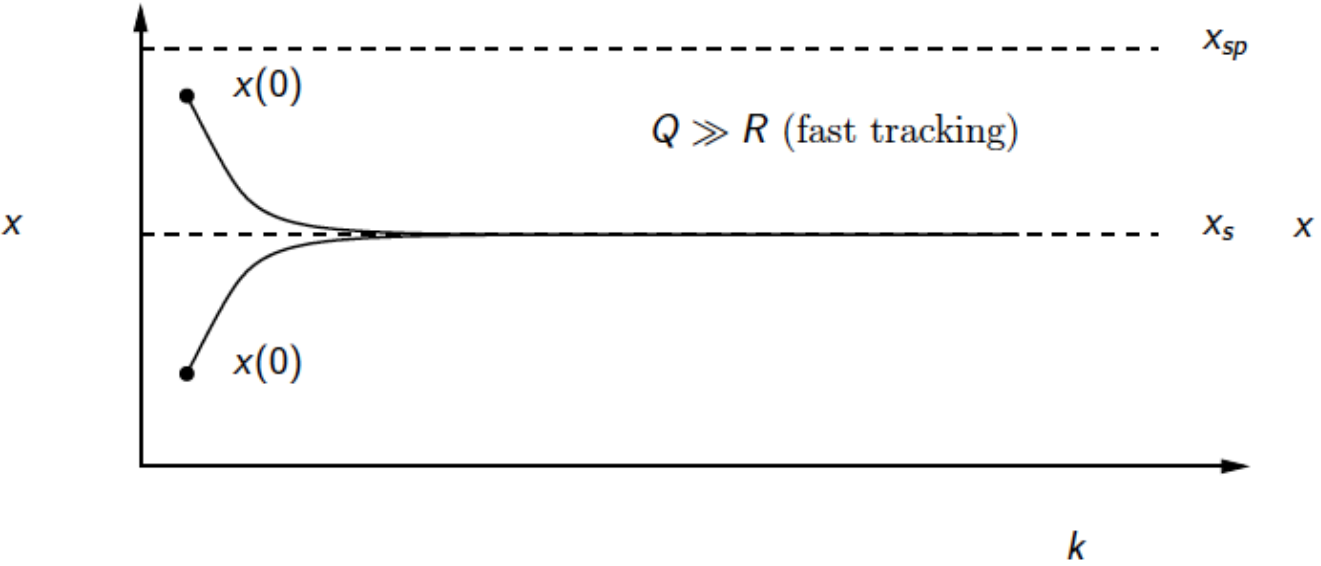
Obiettivo: massimizzare il profitto, minimizzando la spesa.

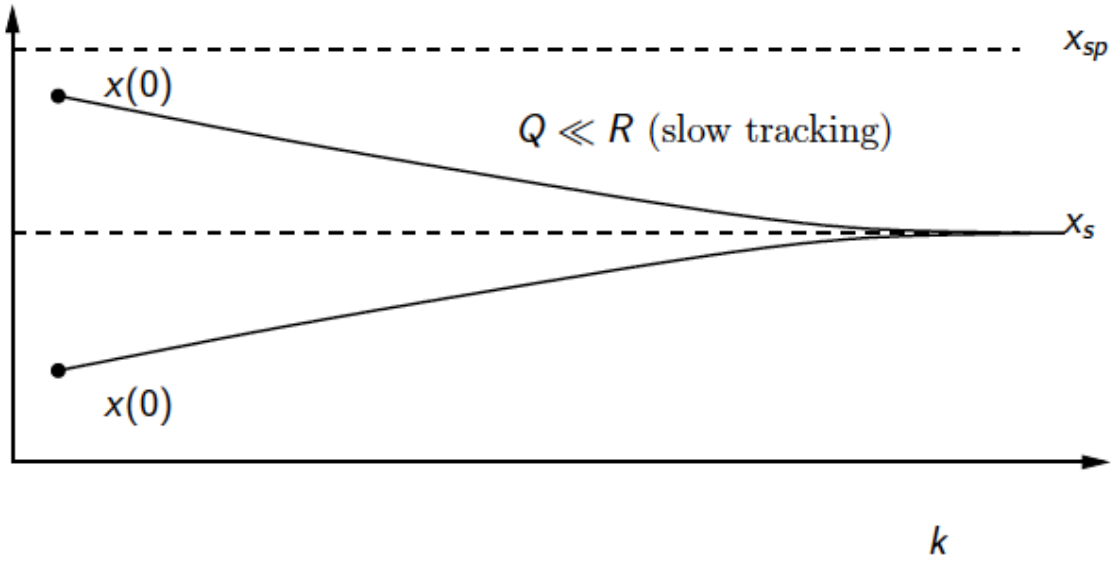
Come lo ottengo?: dipende dalla scelta di Q ed R

Introduzione

Questa strategia è praticamente ottima quando il setpoint non cambia mai.

L'obiettivo economico si raggiunge allo steady state. **Il costo del transitorio non è preso in considerazione.** Il comportamento del closed-loop dipende solo dalla scelta di Q ed R.





Esempio

Vediamo un esempio. Prendiamo il modello di un reattore isotermico (CSTR)

$$P_0 + B \longrightarrow P_1$$
$$P_1 + B \longrightarrow P_2$$

Con equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= u_1 - x_1 - \sigma x_1 x_2 \\ \dot{x_2} &= u_2 - x_2 - \sigma x_1 x_2 - \gamma x_2 x_3 \\ \dot{x_3} &= -x_3 + \sigma x_1 x_2 - \gamma x_2 x_3 \\ \dot{x_4} &= -x_4 + \gamma x_2 x_3 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma &= 1 \\ \gamma &= 0.4 \\ T_s &= 0.1s \end{aligned}}$$

x_1, x_2, x_3, x_4: concentrazione di P_0, B, P_1, P_2. $\quad 0 \leq x_i \leq 10$

u_1, u_2 : portata di P_0, B. $\quad 0 \leq u_i \leq 10$

Esempio

Prendiamo come setpoint, quello che soddisfa

$$(x_s, u_s) = arg \min_{(x,u)} \ell_{eco}(x, u)$$

$$s.t. \quad x = f(x, u)$$

$$x \in \mathcal{X} \quad u \in \mathcal{U}$$

Con

$$\ell_{eco}(x, u) = -\rho_1 x_3 + \rho_2(u_1 + u_2)$$

$$\boxed{\rho = (7,1)}$$

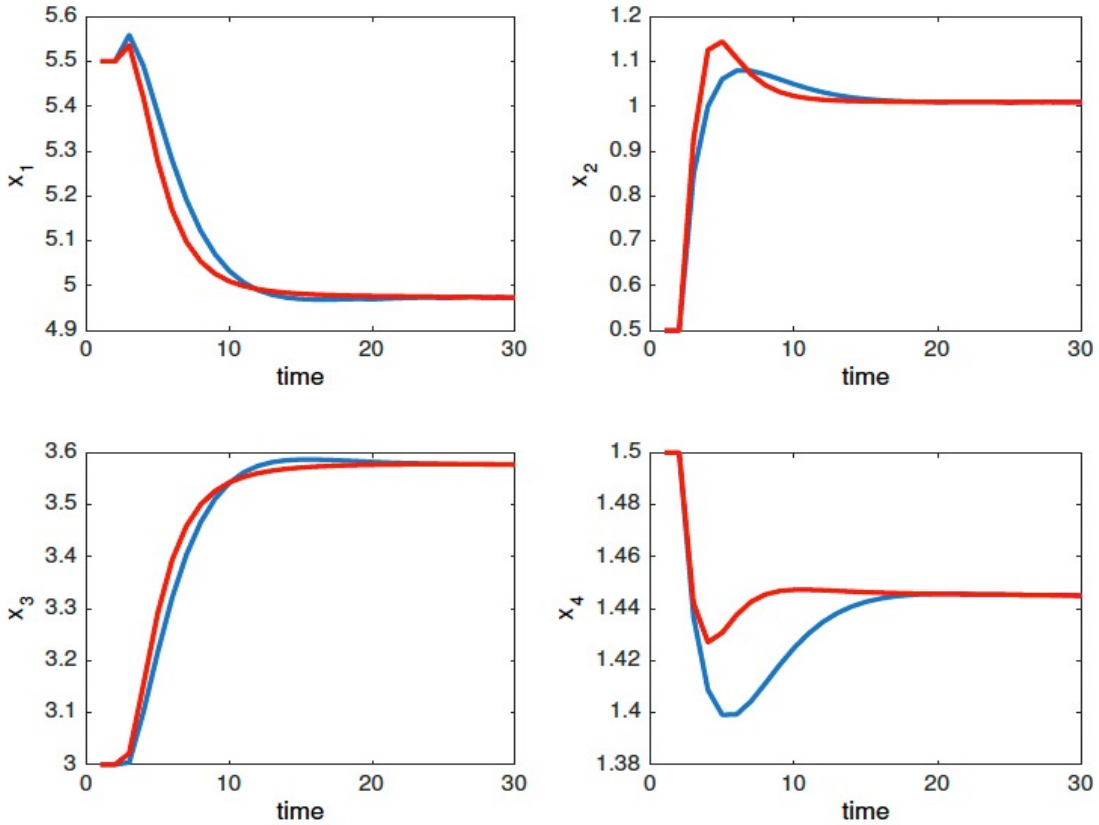
Il setpoint economicamente ottimo è dato da:

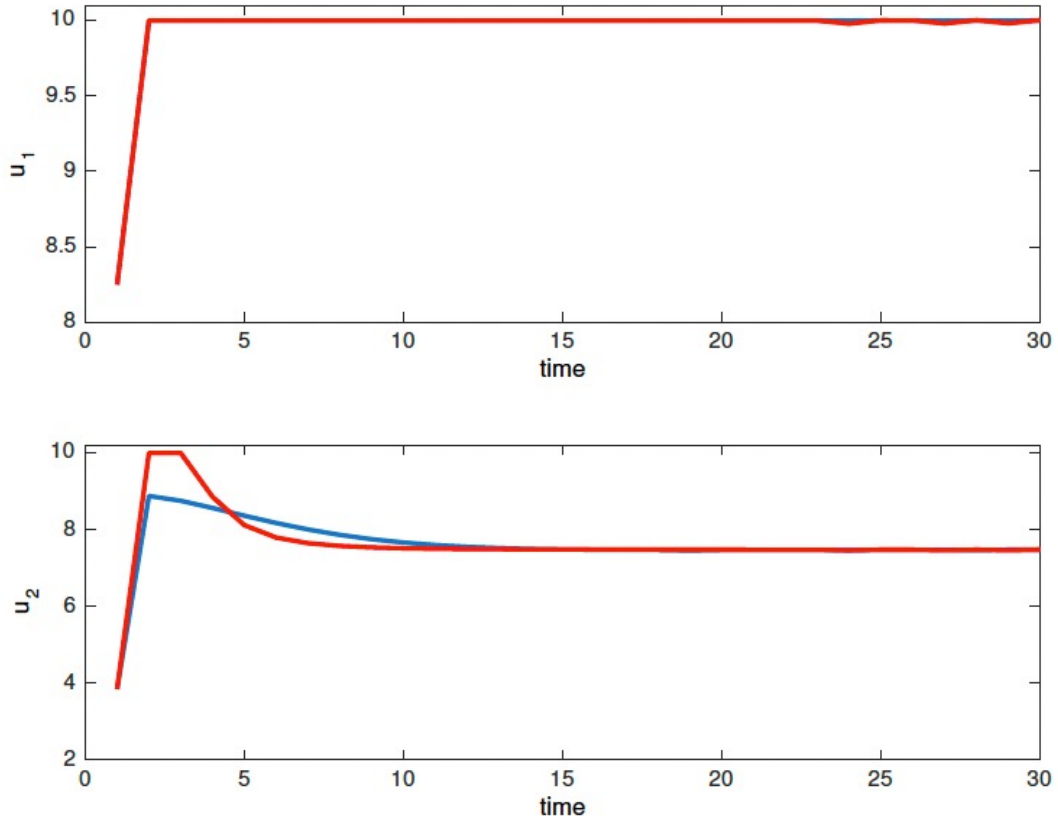
$$x_s = (4.97, 1.01, 3.58, 1.44) \qquad u_s = (10, 7.48)$$

Esempio

Confrontiamo due MPC con le seguenti configurazioni:

$Q = 0.1I, \quad R = 0.1I, \quad N = 10$ $\quad vs \quad$ $Q = 10I, \quad R = 0.1I, \quad N = 10$





Esempio

Quale dei due è migliore?

Dobbiamo prima definire cosa intendiamo per migliore.

Visto che il setpoint è il risultato di minimizzare $\ell_{eco}(x, u)$, allora potremmo dire che la configurazione migliore è quella che minimizza la seguente cifra di merito:

$$\Phi = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T} \ell_{eco}(x, u)$$

Perchè allora non usare $\ell_{eco}(x, u)$ direttamente all'interno del MPC?

Altre motivazioni

Dire che l'ottimalità economica si raggiunge **solo dopo** la convergenza al setpoint è proprio vero?

Non dovrebbe essere anche importante ottimizzare il **come** ci si arriva al setpoint (fermo restando che ci vogliamo arrivare)? Ovvero: il **costo del transitorio** non dovrebbe essere ugualmente importante?

Ci sono diversi sistemi per cui l'operazione ottima è caratterizzata da **comportamenti periodici**: in questo caso non si ha mai convergenza ad un setpoint. Che succede allora con l'ottimo economico?

Outline

1. Introduzione
2. **Formulazione**
3. Dimostrazione di stabilità

Enunciato del problema

Caso generale: si consideri il sistema (lineare o non lineare) a tempo discreto

$$x(k+1) = f(x(k), u(k))$$
$$y(k) = g(x(k), u(k))$$

In cui $k_0 = 0$ e $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$. Lo stato si suppone accessibile. $f(x(k), u(k))$ è continua, derivabile e tale che $f(0,0) = 0$. Si assuma inoltre l'esistenza di vincoli su stato e controllo $x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U}$, con $\mathcal{X}$ e $\mathcal{U}$ chiusi e limitati, contenenti l'origine nel loro interiore.

Si consideri il setpoint:

$$(x_s, u_s) = arg \min_{(x,u)} \ell_{eco}(x, u)$$

Con vincoli: $x = f(x, u)$, $x \in \mathcal{X}$, $u \in \mathcal{U}$

Enunciato del problema

Per farlo, si assuma una cifra di merito del tipo

$$J(x(k), u(.)) = \sum_{j=0}^{N-1} \ell_{eco}(x(j), u(j))$$

Dove $\ell_{eco}(x, u)$ che usiamo come stage cost per il problema di controllo ottimo del MPC è il criterio di ottimalità economica e può essere una funzione di diverso tipo:

- Lineare o non lineare
- Convessa o non convessa
- Definita positiva o definita negativa

Enunciato del problema

Il problema di ottimizzazione sarà quindi dato da

$$\min_{\boldsymbol{u}} J(x(k), u(.))$$

$$s.t.\ \ x(0) = x(k)$$

Condizione iniziale = Feedback di stato

$$x(j+1) = f(x(j), u(j))$$

$$x(j) \in \mathcal{X} \quad u(j) \in \mathcal{U}$$

$$x(N) = x_s$$

Nota 1: usiamo ora il vincolo terminale di uguaglianza per semplicità. Ma il concetto è facilmente generalizzabile al caso con invariante terminale.

Nota 2: usando $\ell_{eco}(x, u)$ come stage cost del MPC, stiamo usando dinamicamente le informazioni economiche (ottimizzazione del transitorio).

Receding Horizon

Il problema di ottimizzazione sarà quindi dato da

$$\min_{\boldsymbol{u}} J(x(k), u(.))$$

$$s.t.\ \ x(0) = x(k)$$

Condizione iniziale = Feedback di stato

$$x(j+1) = f(x(j), u(j))$$

$$x(j) \in \mathcal{X} \quad u(j) \in \mathcal{U}$$

$$x(N) = x_s$$

Ad ogni istante di tempo k:

1. Ottieni la nuova misura dello stato $x(k)$
2. Risolvi il proble di ottimizzazione e trova $\boldsymbol{u} = \{\mathrm{u}(0), \dots, \mathrm{u}(\mathrm{N}-1)\}$
3. Applica solo il primo elemeno della sequeza, $u(k) = u_0^*$

Esempio

Riprendiamo l'esempio del reattore isotermico (CSTR)

$$P_0 + B \longrightarrow P_1$$
$$P_1 + B \longrightarrow P_2$$

Con equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= u_1 - x_1 - \sigma x_1 x_2 \\ \dot{x_2} &= u_2 - x_2 - \sigma x_1 x_2 - \gamma x_2 x_3 \\ \dot{x_3} &= -x_3 + \sigma x_1 x_2 - \gamma x_2 x_3 \\ \dot{x_4} &= -x_4 + \gamma x_2 x_3 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma &= 1 \\ \gamma &= 0.4 \\ T_s &= 0.1s \end{aligned}}$$

x_1, x_2, x_3, x_4: concentrazione di P_0, B, P_1, P_2. $\quad 0 \leq x_i \leq 10$

u_1, u_2 : portata di P_0, B. $\quad 0 \leq u_i \leq 10$

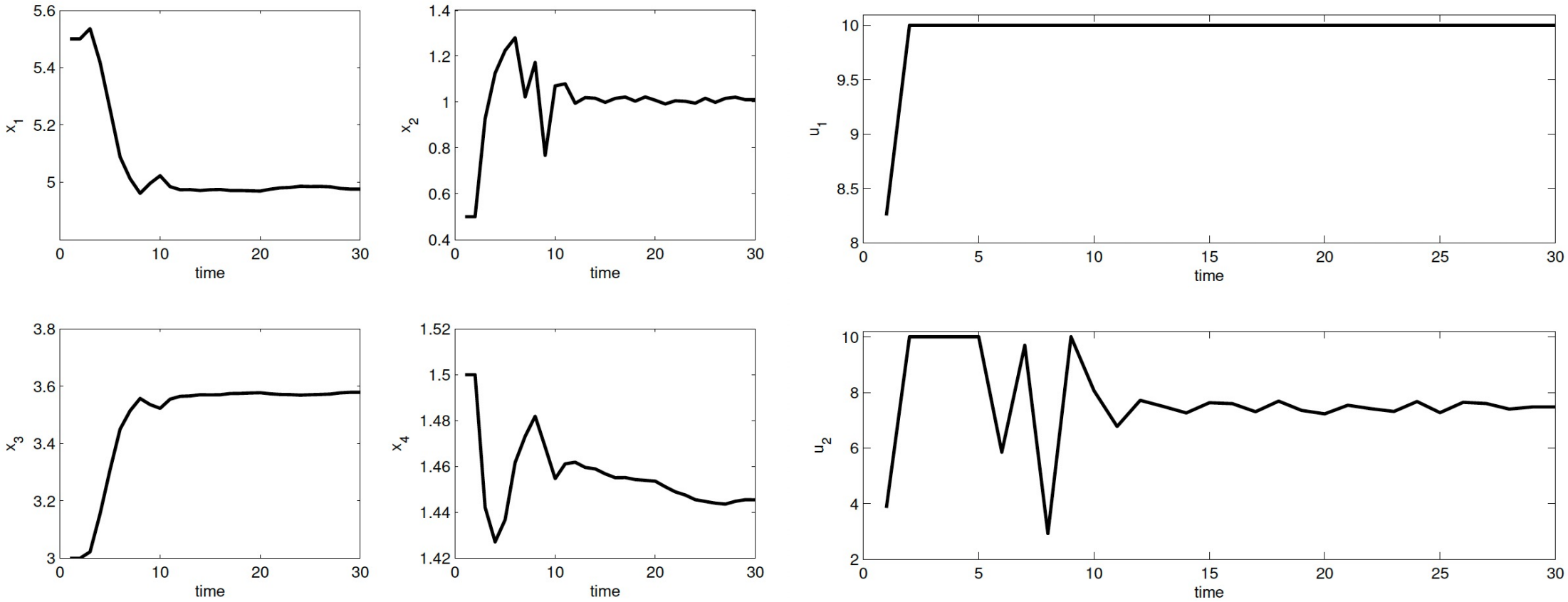
Esempio

Analizziamo il nostro MPC economico:

$$x_s = (4.97, 1.01, 3.58, 1.44)$$

$$\boxed{\ell_{eco}(x,u) = -\rho_1 x_3 + \rho_2(u_1 + u_2), \qquad \rho = (7,1), \qquad N = 10}$$

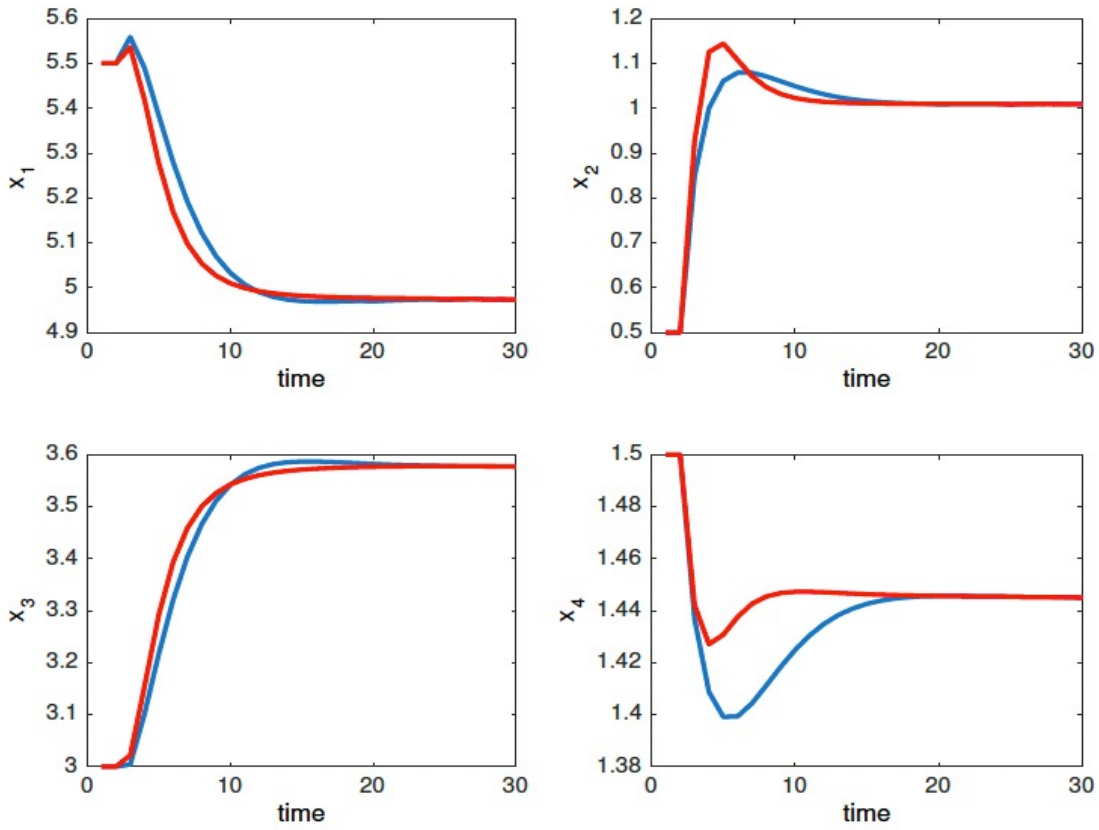
$$u_s = (10, 7.48)$$

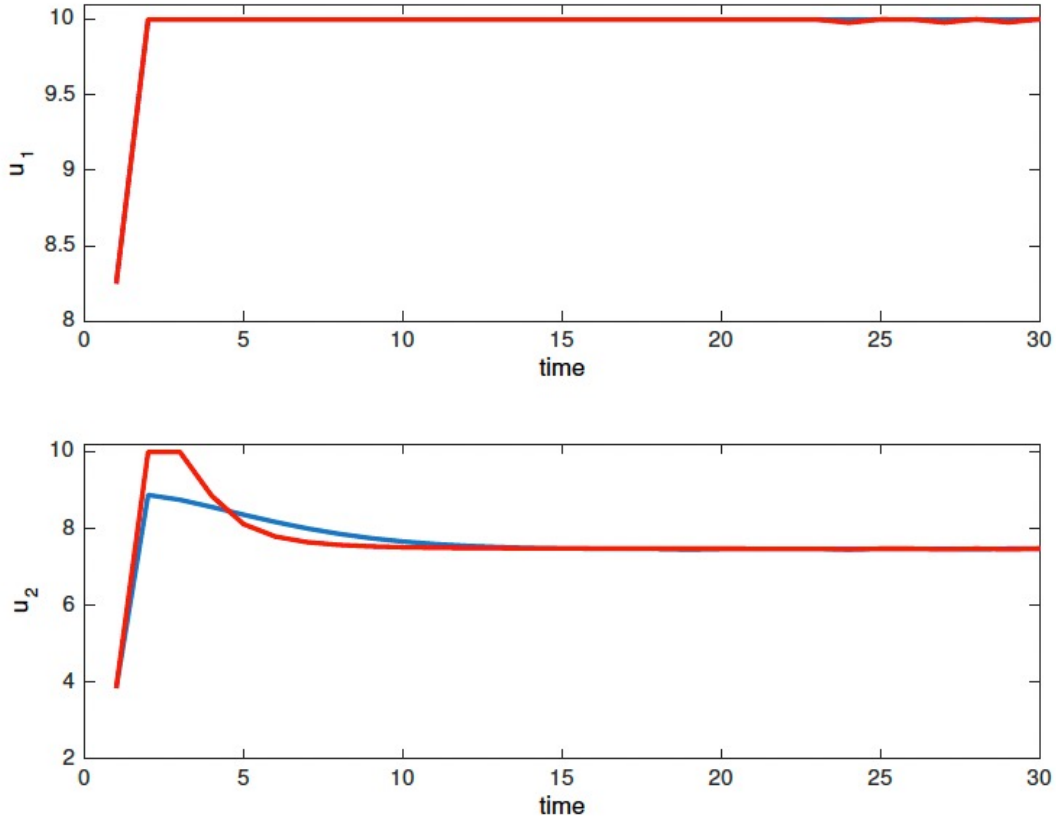


Esempio

Completamente diverso dai due MPC precedenti:

$Q = 0.1I, \quad R = 0.1I, \quad N = 10$ *vs* $Q = 10I, \quad R = 0.1I, \quad N = 10$

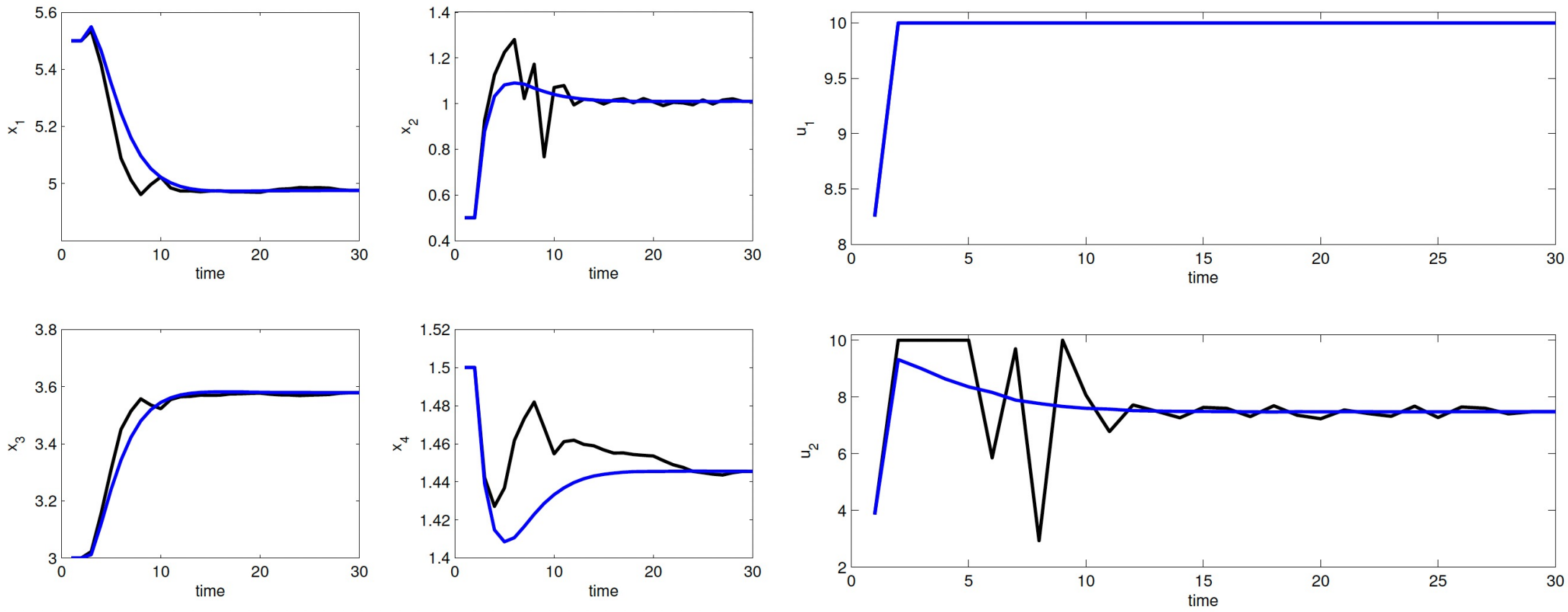




Esempio

Confronto EMPC vs Tracking:

$\ell_{eco}(x,u) = -\rho_1 x_3 + \rho_2(u_1 + u_2), \rho = (7,1), \mathrm{N} = 10$ $\quad vs \quad$ $Q = 0.1I, R = 0.1I, N = 10$



Performance ottima

Ma quale dei due è migliore? Facciamo un confronto

Misura del profitto medio (lo vogliamo massimizzare):

$$\Phi = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{T} \rho_1 x_3 - \rho_2(u_1 + u_2)$$

Misura del costo transitorio medio (lo vogliamo minimizzare):

$$\Psi = \sum_{k=0}^{T} \ell_{eco}(x(k), u(k)) - \ell_{eco}(x_s, u_s)$$

Performance ottima

Misura del profitto medio (lo vogliamo massimizzare):

$$\Phi = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{T} \rho_1 x_3 - \rho_2(u_1 + u_2)$$

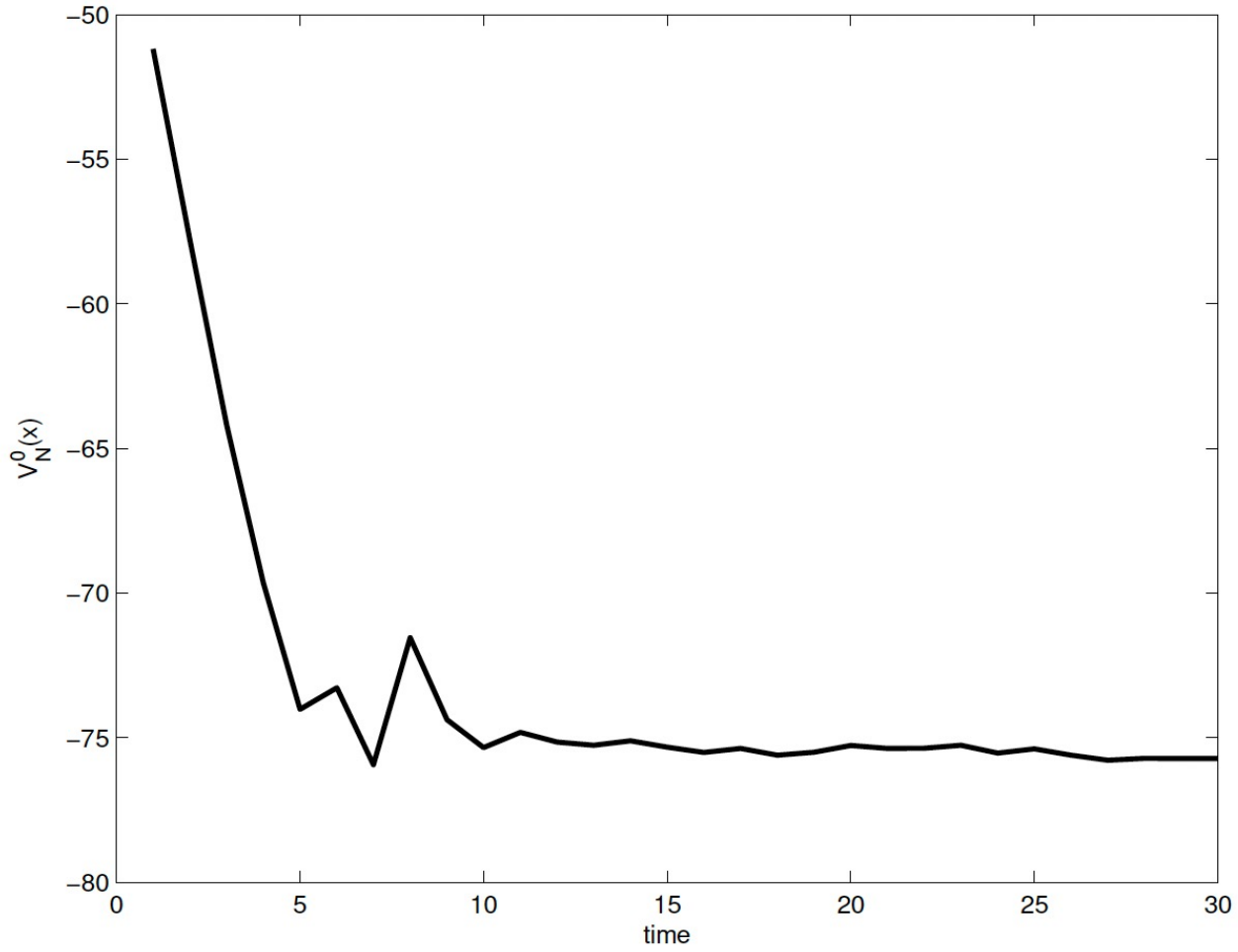
Misura del costo transitorio (lo vogliamo minimizzare):

$$\Psi = \sum_{k=0}^{T} \ell_{eco}(x(k), u(k)) - \ell_{eco}(x_s, u_s)$$

	Economic MPC	Tracking MPC
Φ	6.83	6.80
Ψ	23.29	23.90

Esempio

Guardiamo il costo ottimo del problema EMPC:



Il costo dell'economic MPC non è monotono.

C'è anche un punto in cui è più basso rispetto al valore asintotico (che dovrebbe essere il minimo).

Come mai?

Outline

1. Introduzione
2. Formulazione
3. **Dimostrazione di stabilità**

Ingredienti

Nelle scorse lezioni abbiamo visto che nella progettazione di un MPC che garantisca che il sistema in anello chiuso sia **asintoticamente stabile dobbiamo soddisfare le seguenti condizioni**

Ingrediente	Descrizione
1	$f(x,u)$ e $\ell(x,u)$ continue
2	Set dei vincoli compatti
3	$\boldsymbol{\ell(x,u)}$ **e** $\boldsymbol{V_f(x)}$ **definiti positivi**
4	Ipotesi base di stabilità: esistenza della CLF
5	Ipotesi di invarianza: esistenza di un control invariant set

Cosa succede con l'EMPC?

L'esempio precedente mostra come il costo dell'economic MPC non è monotono.

C'è anche un punto in cui è più basso rispetto al valore asintotico (che dovrebbe essere il minimo).

Questo perchè la funzione $\ell_{eco}(x, u)$ che usiamo come stage cost nella formulazione economica dell'MPC non è necessariamente definita positiva.

Può anche verificarsi che $\ell_{eco}(x_s, u_s) > \ell_{eco}(x, u)$.

Cosa succede con l'EMPC?

La conseguenza di questa situazione è che, nel dimostrare la stabilità dell'EMPC usando il teorema di Lyapunov, non è possibile dimostrare la decrescita monotona del costo.

Non è infatti vero che

$$\Delta J(x) = J^0(x^+) - J^0\left(x(k)\right) \leq -\ell_{eco}\left(x^0(0;x), u^0(0;x)\right)$$

sia definito negativo (in quanto $\ell_{eco}(x,u)$ non è necessariamente definita positiva).

Ma le simulazioni mostrano che il sistema in closed-loop è asintoticamente stabile….

Come dimostrare la stabilità?

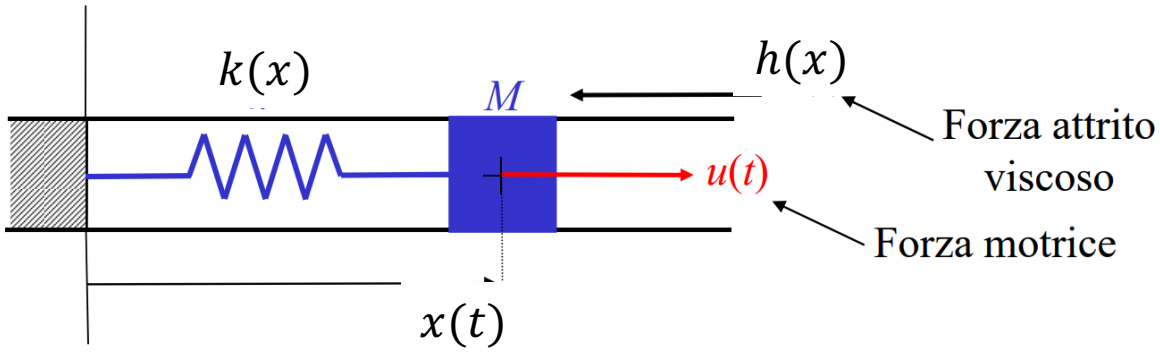
Ma le simulazioni mostrano che il sistema in closed-loop è asintoticamente stabile….

Le ipotesi fatte fin'ora non ci permettono di dimostrare la stabilità secondo il teorema di Lyapunov.

Abbiamo bisogno di qualcos'altro…

In realtà sappiamo già di cosa abbiamo bisogno…

Esempio: Molla-smorzatore non lineare



Forza elastica

$$k(x) = k_0 x(t) + k_1 x^3(t)$$

Forza attrito viscoso

$$h(x) = b\dot{x}(t)|\dot{x}(t)|$$

Bilancio di forze (considerando un sistema autonomo)

$$M\ddot{x}(t) = -k(x) - h(x) \quad \Longrightarrow \quad M\ddot{x}(t) + k_0\, x(t) + k_1 x^3(t) + b\dot{x}(t)|\dot{x}(t)| = 0$$

Valutiamo l'energia totale del sistema come somma di energia cinetica ed energia potenziale.

Esempio: Molla-smorzatore non lineare

Valutiamo l'energia totale del sistema come somma di energia cinetica ed energia potenziale.

$$\mathrm{V}(x,\dot{x}) = T(x,\dot{x}) + \mathrm{U}(x,\dot{x})$$

Con:

$$T(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

Energia cinetica

$$U(x,\dot{x}) = \int_0^x k_0 x + k_1 x^3 dx = k_0\frac{x^2}{2} + k_1\frac{x^4}{4}$$

Energia potenziale

Quindi:

$$\mathrm{V}(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + k_0\frac{x^2}{2} + k_1\frac{x^4}{4}$$

Esempio: Molla-smorzatore non lineare

Come varia l'energia del sistema:

$$\frac{d\mathrm{V}(x,\dot{x})}{dt} = M\dot{x}\ddot{x} + k_0 x\dot{x} + k_1 x^3\dot{x} = -b\dot{x}^2|\dot{x}| = -b|\dot{x}^3|$$

Da questo deduciamo che $\dot{V} < 0$ per ogni $\dot{x} \neq 0$. Quindi l'energia del sistema è continuamente **dissipata** finché $\dot{V} = 0$, quando $\dot{x} = 0$.

Se il CSTR si stabilizza, vuol dire che **dissipa** energia in qualche modo.

Proviamo a formalizzarlo.

Dissipatività

Definizione: un sistema $f(x,u)$ si dice **dissipativo** rispetto ad un supply rate $s(x,u): \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ se esiste una funzione $\lambda(x): \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\lambda(f(x,u)) - \lambda(x) \leq s(x,u) \qquad \forall (x,u) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}$$

Inoltre, se esiste una funzione definita positiva $\rho(x): \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ e tale che

$$\lambda(f(x,u)) - \lambda(x) \leq -\rho(x) + s(x,u) \qquad \forall (x,u) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}$$

allora il sistema si dice **strettamente dissipativo**.

Dissipatività

Interpretazione fisica: *l'energia accumulata al tempo* $k+1$*, ovvero* $\lambda(f(x,u))$*, è al più uguale alla somma dell'energia accumulata al tempo* k*, ovvero* $\lambda(x)$*, più l'energia fornita dall'esterno, ovvero* $s(x,u)$.

Il sistema internamente può solo disperdere energia, creazione interna di energia non è possibile.

Solo un sistema in grado di dissipare energia può convergere a un punto di equilibrio asintoticamente stabile

Dissipatività

Sia $s(x,u) = \ell_{eco}(x,u) - \ell_{eco}(x_s,u_s)$

Ipotesi: esiste una funzione $\lambda(x): \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ tale che $\forall (x,u) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}$

$$\min_{(x,u)} \ell_{eco}(x,u) + \lambda(x) - \lambda(f(x,u)) \geq \ell_{eco}(x_s,u_s)$$

Si definisca ora il costo rotato

$$L(x,u) = \ell_{eco}(x,u) + \lambda(x) - \lambda(f(x,u))$$

Da questa definizione notiamo che

$$\min_{(x,u)} L(x,u) \geq \ell_{eco}(x_s,u_s) = L(x_s,u_s)$$

Dimostrazione di stabilità

Era proprio quello che cercavamo!

Definiamo il **costo ausiliare dell'EMPC** come $V(x(k), u(.)) = \sum_{j=0}^{N-1} L(x, u)$

Definiamo il **problema di ottimizzazione ausiliare**

$$\min_{\boldsymbol{u}} V(x(k), u(.))$$

$$\begin{aligned} s.t.\ \ & x(0) = x(k) \\ & x(j+1) = f(x(j), u(j)) \\ & x(j) \in \mathcal{X} \quad u(j) \in \mathcal{U} \\ & x(N) = x_s \end{aligned}$$

Esattamenti gli stessi vincoli.

Funzionale di costo diverso.

Si può dimostrare que questo problema e l'originale danno la stessa soluzione.

Dimostrazione di stabilità

Lemma: il problema di ottimizzazione originale e quello ausiliare restituiscono la stessa soluzione.

Prova: analizziamo il funzionale di costo del problema ausiliare

$$V(x(k), u(.)) = \sum_{j=0}^{N-1} L(x(j), u(j))$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \ell_{eco}(x(j), u(j)) + \lambda(x(j)) - \lambda(f(x(j), u(j)))$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \ell_{eco}(x(j), u(j)) + \lambda(x(j)) - \lambda(x(j+1))$$

Dimostrazione di stabilità

$$V(x(k),u(.)) = \sum_{j=0}^{N-1} L(x(j),u(j)) = \sum_{j=0}^{N-1} \ell_{eco}(x(j),u(j)) + \lambda(x(j)) - \lambda(x(j+1))$$

$$= \lambda(x(0)) - \lambda\big(x(1)\big) + \lambda\big(x(1)\big) - \lambda\big(x(2)\big) + \cdots + \lambda\big(x(N-1)\big) - \lambda\big(x(N)\big)$$

$$+ \sum_{j=0}^{N-1} \ell_{eco}(x(j),u(j))$$

$$= \lambda(x(0)) - \lambda\big(x(N)\big) + \sum_{j=0}^{N-1} \ell_{eco}(x(j),u(j))$$

$$= \lambda(x(0)) - \lambda(x_s) + \sum_{j=0}^{N-1} \ell_{eco}(x(j),u(j))$$

Dimostrazione di stabilità

$$V(x(k),u(.)) = \sum_{j=0}^{N-1} L(x(j),u(j)) = \lambda(x(0)) - \lambda(x_s) + \sum_{j=0}^{N-1} \ell_{eco}(x(j),u(j))$$

$$= \lambda(x(0)) - \lambda(x_s) - J(x(k),u(.))$$

Questo vuol dire che la differenza tra il costo originale e quello ausiliare è data da una **costante**

$$V(x(k),u(.)) - J(x(k),u(.)) = \lambda(x(0)) - \lambda(x_s)$$

Dato che i vincoli dei due problemi di ottimizzazione sono esattamente gli stessi, allora **le soluzioni ottime saranno le stesse.**

QED

Dimostrazione di stabilità

Possiamo quindi usare il valore ottimo della funzione $V(x(k), u(.))$ come funzione di Lyapunov candidata e dimostrare la stabilità del sistema in closed-loop con EMPC secondo il teorema di Lyapunov.

Teorema: se il sistema $f(x,u)$ è **strettamente dissipativo** rispetto ad un supply rate $s(x,u) = \ell_{eco}(x,u) - \ell_{eco}(x_s, u_s)$, allora $V^0\big(x(k)\big)$ serve da funzione di Lyapunov per il sistema in closed-loop con l'EMPC e il punto di equilibrio economicamente ottimo x_s è un p.e. asintoticamente stabile.

Prova: i) si assuma senza perdita di generalità che $\ell_{eco}(x_s, u_s) = 0$. Allora:

$$L(x,u) \geq 0 \Rightarrow V^0\big(x(k)\big) \geq 0$$

Dimostrazione di stabilità

Inoltre $\ell_{eco}(x_s, u_s) = 0$ implica $L(x_s, u_s) = 0$. Da cui

$$V^0(x_s) = 0$$

Ciò dimostra che $V^0\big(x(k)\big)$ è una funzione definita positiva.

ii) Inoltre, usando gli stessi argomenti della dimostrazione di stabilità del MPC

$$\Delta V(x) = V^0(x^+) - V^0\left(x(k)\right) \leq -L\big(x^0(0;x), u^0(0;x)\big) + L(x_s, u_s)$$

$$\leq -\ell_{eco}\big(x^0(0;x), u^0(0;x)\big) - \lambda\big(x^0(0;x)\big) + \lambda(f(x^0(0;x), u^0(0;x))) + L(x_s, u_s)$$

$$\leq -\rho(x^0(0;x)) \leq 0$$

QED

Conclusioni

- Il controllo predittivo economico è una strategia efficiente di controllo che punta ad **ottimizzare la performance economica** del sistema che si vuole controllare. Questo grazie all'ottimizzazione della traiettoria transitora con cui si arriva al setpoint economico.

- La stabilità asintotica è assicurata dalla **dissipatività del sistema**, ma va dimostrata usando il valore ottimo del costo ausiliare $V(x(k), u(.))$ come funzione candidata di Lyapunov.

- Non è necessario trovare la funzione $\lambda(x)$: **l'equivalenza delle soluzioni** ci permette di usare il funzionale di costo $J(x(k), u(.))$ nell'implementazione e il funzionale di costo $V(x(k), u(.))$ nella dimostrazione.