UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Dipartimento di Ingegneria Gestionale, dell'Informazione e della Produzione

Controllo Avanzato Multivariabile

L12: Implementazione MPC

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA INFORMATICA

TEACHERS
Prof. Antonio Ferramosca

PLACE
Università di Bergamo

Contenuti del corso

1. **Sistemi non lineari a tempo discreto**
   - 1.1 Equilibrio
   - 1.2 Stabilità
   - 1.3 Teorema di Lyapunov
2. **Proprietà strutturali dei sistemi lineari multivariabili**
   - 2.1 Controllabilità
   - 2.2 Osservabilità
   - 2.3 Poli e zeri invarianti
3. **Analisi dei sistemi multivariabili**
   - 3.1 Anello aperto
   - 3.2 Anello chiuso
4. **Controllo ottimo**
   - 4.1 Controllo Lineare Quadratico LQR
   - 4.2 Proprietà
   - 4.3 Esempi
5. **Controllo predittivo MPC**
   - 5.1 Formulazione
   - 5.2 Proprietà
   - 5.3 Stabilità
   - 5.4 Implementazioni
6. **Esempi di applicazioni**
   - 6.1 Pancreas Artificiale
   - 6.2 Forno SMI

Outline

1. Introduzione
2. Linear MPC
3. Setpoint Tracking MPC

Outline

1. **Introduzione**
2. Linear MPC
3. Setpoint Tracking MPC

Introduzione

L’obiettivo di questa lezione è vedere alcune formulazioni specifiche di MPC.

In particolare, vedremo come si possono calcolare nella maggior parte dei casi gli ingredienti necessari per poter garantire la stabilità asintotica del sistema in anello chiuso.

Vedremo come formulare il regolatore nel caso di non poter misurare lo stato del sistema.

Vedremo inoltre come formulare il regolatore MPC nel caso di voler fare un setpoint tracking in un punto diverso dall’origine.

Outline

1. Introduzione
2. **Linear MPC**
3. Setpoint Tracking MPC

Enunciato del problema

1. Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

In cui $k_0 = 0$ e $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$. Lo stato si suppone accessibile. Sia (A, B) ***raggiungibile***.

2. Si assuma inoltre l'esistenza di vincoli su stato e controllo $x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U}$

$$x \in \mathcal{X} \Longrightarrow x_{min} \leq x \leq x_{max},$$
$$u \in \mathcal{U} \Longrightarrow u_{min} \leq u \leq u_{max}$$

Enunciato del problema

4. Si voglia risolvere il problema di regolazione dello stato del sistema all'origine, progettando un regolatore MPC con garanzia di asintotica stabilità.

Per farlo, si assuma una cifra di merito quadratica, ovvero

$$J(x(k), u(.)) = \sum_{j=0}^{N-1} ||x(j)||_Q^2 + ||u(j)||_R^2 + ||x(N)||_S^2$$
$$= \sum_{j=0}^{N-1} x(j)'Qx(j) + u(j)'Ru(j) + x(N)'Sx(N)$$

Con $Q = Q' \geq 0, S = S' \geq 0, R = R' > 0.$

Enunciato del problema

Il problema di ottimizzazione sarà quindi dato da

$$\min_{\boldsymbol{u}} J(x(k), u(.))$$

$$s.t.\ \ x(0) = x(k)$$

Condizione iniziale = Feedback di stato

$$x(j+1) = Ax(j) + Bu(j)$$

$$x(j) \in \mathcal{X} \quad u(j) \in \mathcal{U}$$

$$x(N) \in \mathbb{X}_f$$

Il problema di ottimizzazione cosí formulato è un problema di **programmazione quadratica (QP)**.

Come scegliere gli ingredienti del regolatore?

Ingredienti

Nella scorsa lezione abbiamo visto che nella progettazione di un MPC che garantisca che il sistema in anello chiuso **asintoticamente stabile dobbiamo soddisfare le seguenti condizioni**

Ingrediente	Descrizione
1	$f(x,u)$ e $\ell(x,u)$ continue
2	Set dei vincoli compatti
3	$\ell(x,u)$ e $V_f(x)$ definiti positivi
4	Ipotesi base di stabilità: esistenza della CLF
5	Ipotesi di invarianza: esistenza di un control invariant set

Osservazioni

1. La prima condizione è garantita dalla scelta del modello lineare e del costo.

2. La scelta di vincoli di massimo/minimo come intervalli chiusi e limitati garantisce la seconda condizione.

3. $Q = Q' \geq 0$, $S = S' \geq 0$, $R = R' > 0$ garantiscono che sia soddisfatta anche la terza condizione.

Dobbiamo quindi capire come soddisfare la condizione 4 e la condizione 5.

Condizione 4: CLF

Il costo terminale di un MPC lineare è

$$V_f(x) = ||x||_S^2, \qquad S = S' \geq 0$$

Tale costo è senza dubbio definito positivo e $V_f(0) = 0$. Dobbiamo quindi trovare un valore adeguato di S ed una **legge di controllo locale** $\kappa_f(x)$ **stabilizzante** tali per cui

$$V_f(f(x, \kappa_f(x))) - V_f(x) \leq -\ell\left(x, \kappa_f(x)\right)$$

ovvero

$$V_f(Ax + B\kappa_f(x)) - V_f(x) \leq -\left(||x||_Q^2 + ||\kappa_f(x)||_R^2\right)$$

Condizione 5: Invariant set

La legge di controllo locale deve essere inoltre tale da determinare l'esistenza di un control invariant set

$$\mathbb{X}_f = \left\{x \in \mathcal{X} : if\ x \in \mathbb{X}_f\ then \left(Ax + B\kappa_f(x)\right) \in \mathbb{X}_f, \kappa_f(x) \in \mathcal{U}\right\}$$

Nel caso dei sistemi lineari, è molto semplice trovare $\kappa_f(x)$: basta prendere la legge di controllo del LQR a orizzonte infinito

$$\kappa_f(x) = -Kx$$

Con $K = (R + B'PB)^{-1}B'PA$. Questa legge è ottima per definizione e inoltre garantisce che il sistema in anello chiuso $x(k+1) = (A - BK)x(k)$ sia asintoticamente stabile.

Condizione 4: CLF

Inoltre, come costo terminale possiamo proprio prendere

$$V_f(x) = ||x||_P^2$$

Con P all'**unica** soluzione costante **dell'equazione stazionaria di Riccati**

$$P = A'PA + Q - A'PB(R + B'PB)^{-1}B'PA$$

Questa scelta di costo terminale

- rappresenta esattamente il costo oltre l'orizzonte N e fino all'infinito
- è una CLF: l'ipotesi base di stabilità si verifica con uguaglianza

Analisi

Il costo terminale misura quanto si spende per andare da N a infinito

$$V_f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x(j)'Qx(j) + u(j)'Ru(j)$$

Ma le predizioni oltre l'orizzonte N sono governate dalla legge di controllo locale $\kappa_f(x) = -Kx$, per cui

$$x(j+1) = (A - BK)x(j) \Longrightarrow x(j) = (A - BK)^j x$$

$$u(j) = -Kx(j) = -K(A - BK)^j x$$

Sostituiamo queste definizioni nel costo precedente

Analisi

Sostituiamo queste definizioni nel costo

$$V_f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x(j)'Qx(j) + u(j)'Ru(j)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} x'(A-BK)^{j\prime}Q(A-BK)^{j}x + x'(A-BK)^{j'}K'RK(A-BK)^{j}x$$

$$= x'\left[\sum_{j=0}^{\infty}(A-BK)^{j\prime}(Q+K'RK)(A-BK)^{j}\right]x$$

$$= x'Px$$

Analisi

Con questa scelta di costo terminale, l'ipotesi base di stabilità si verifica con uguaglianza

$$V_f((A-BK)x) \; - V_f(x) = -\left(||x||_Q^2 + ||-Kx||_R^2\right)$$

Infatti, sostituendo il costo scelto:

$$x'(A-BK)'P(A-BK)x - x'Px = -x'(Q + K'RK)x$$

Ignorando la variabile x' e x, comune a tutti i termini:

$$(A-BK)'P(A-BK) - P = -(Q + K'RK)$$

Analisi

Con questa scelta di costo terminale, l'ipotesi base di stabilità si verifica con uguaglianza

$$V_f((A-BK)x) \; - V_f(x) = -\left(||x||_Q^2 + ||-Kx||_R^2\right)$$

Infatti, sostituendo il costo scelto:

$$x'(A-BK)'P(A-BK)x - x'Px = -x'(Q+K'RK)x$$

Ignorando la variabile x' e x, comune a tutti i termini:

$$(A-BK)'P(A-BK) - P = -(Q+K'RK)$$

Da cui: $$A'PA - A'PBK - K'B'PA + K'B'PBK - P = -(Q+K'RK)$$

Analisi

Riordiniamo l'equazione:

$$P = A'PA - A'PBK - K'B'PA + K'B'PBK + (Q + K'RK)$$

Da cui:

$$P = A'PA + Q - A'PBK - K'B'PA + K'(R + B'PB)K$$

Sostuiamo l'espressione $K = (R + B'PB)^{-1}B'PA$:

$$P = A'PA + Q - A'PB(R + B'PB)^{-1}B'PA - A'PB(R + B'PB)^{-1}B'PA$$
$$+A'PB\underbrace{(R + B'PB)^{-1}(R + B'PB)}_{= I}(R + B'PB)^{-1}B'PA$$

Analisi

Quindi otteniamo:

$$P = A'PA + Q - A'PB(R + B'PB)^{-1}B'PA$$

$$-A'PB(R + B'PB)^{-1}B'PA + A'PB(R + B'PB)^{-1}B'PA$$

Da cui:

$$P = A'PA + Q - A'PB(R + B'PB)^{-1}B'PA$$

Che è esattamente l'equazione di Riccati stazionaria.

Abbiamo così dimostrato che nel caso lineare, con questa scelta di costo terminale, l'ipotesi base di stabilità si verifica con uguaglianza.

QED

Esempio

Si consideri il sistema dato da: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Supponiamo ore di avere dei vincoli sullo stato e sugli ingressi.

Sia ad esempio $x \in \mathcal{X}$ dato da $\begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix} \leq x \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}, -0.5 \leq u \leq 0.5$

Costruiamo un MPC con $\mathrm{Q} = I,\ R = 1, N = 5$. Con questa scelta di matrici otteniamo

$$K = \begin{bmatrix} 0.4345 & 1.0285 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 2.3671 & 1.1180 \\ 1.1180 & 2.5875 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[K, P] = dlqr(A, B, Q, R)}$$

Esempio

Come calcoliamo l'invariant set per il vincolo terminale?

$$\mathbb{X}_f = \{x \in \mathcal{X}: if\ x \in \mathbb{X}_f\ then (A - BK)x \in \mathbb{X}_f, -Kx \in \mathcal{U}\}$$

Innanzitutto calcolo la matrice del sistema in anello chiuso

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0.7828 & 0.4858 \\ -0.4345 & -0.0285 \end{bmatrix}$$

Dopo di che, per tutti gli $x \in \mathcal{X}$ e $-Kx \in \mathcal{U}$, cerco il set tale che $(A - BK)x \in \mathcal{X}$.

$$\boldsymbol{X}_{min} \leq x \leq \boldsymbol{X}_{max}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_{max} \\ -\boldsymbol{X}_{min} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{U}_{min} \leq -Kx \leq \boldsymbol{U}_{max}$$

$$\begin{bmatrix} -K \\ K \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_{max} \\ -\boldsymbol{U}_{min} \end{bmatrix}$$

Esempio

Raggruppiamo i vincoli in modo da esprimerli nella forma $\mathcal{G}x \leq g$ dove

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{K} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad g = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_{max} \\ -\boldsymbol{X}_{min} \\ \boldsymbol{U}_{max} \\ -\boldsymbol{U}_{min} \end{bmatrix}$$

L'algoritmo è iterativo. Queste prime disuguaglizane definiscono il set

$$\mathcal{O}(0) = \{x : \mathcal{G}x \leq g\}$$

Lo step successivo è dato da:

$$\mathcal{O}(1) = \{x \in \mathcal{O}(0) : \mathcal{G}(A - BK)x \leq g\}$$

Esempio

Continuando a iterare:

$$\mathcal{O}(2) = \{x \in \mathcal{O}(1)\colon \mathcal{G}(A - BK)^2 x \leq g\}$$

La generica j –esima iterazione sarà:

$$\mathcal{O}(j) = \left\{x \in \mathcal{O}(j-1)\colon \mathcal{G}(A - BK)^j x \leq g\right\}$$

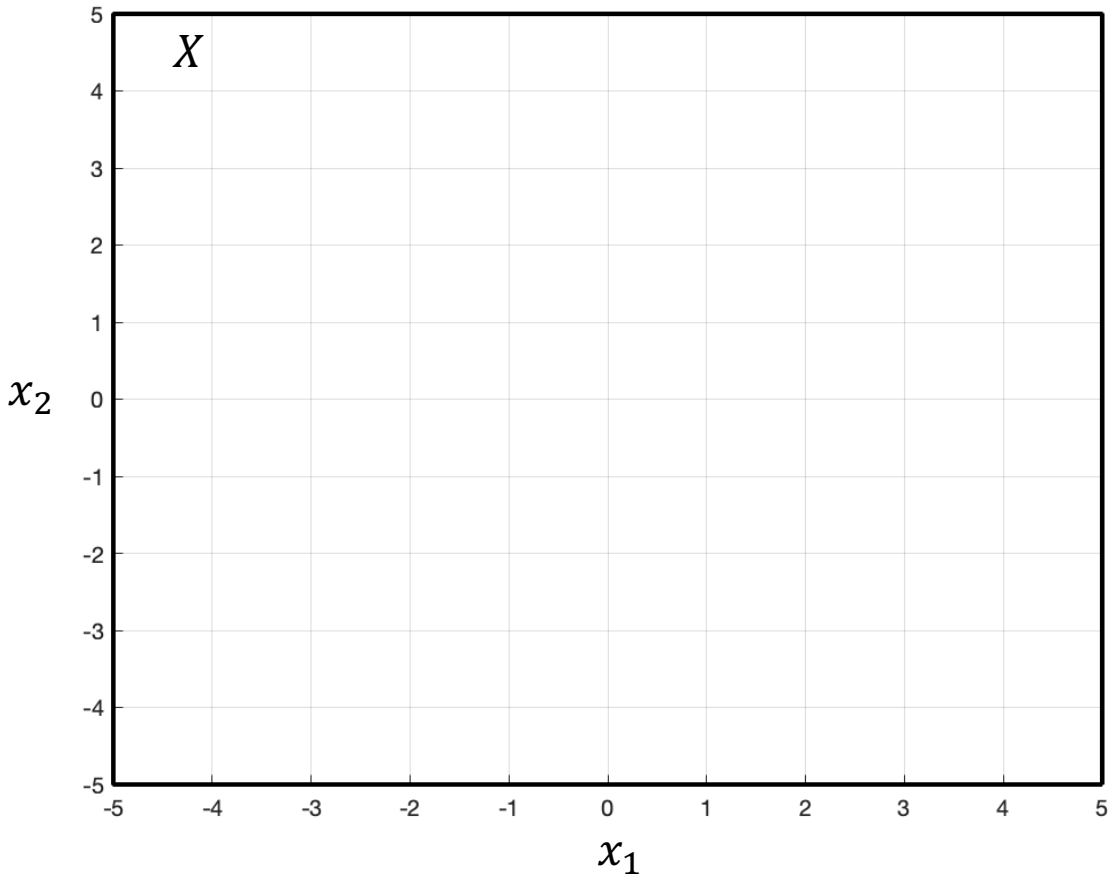
L'algoritmo si conclude quando si verifica che:

$$\mathcal{O}(j+1) = \mathcal{O}(j) = \mathcal{O}(\infty)$$

Il set $\mathcal{O}(\infty)$ si definisce **maximal invariant set**

Esempio

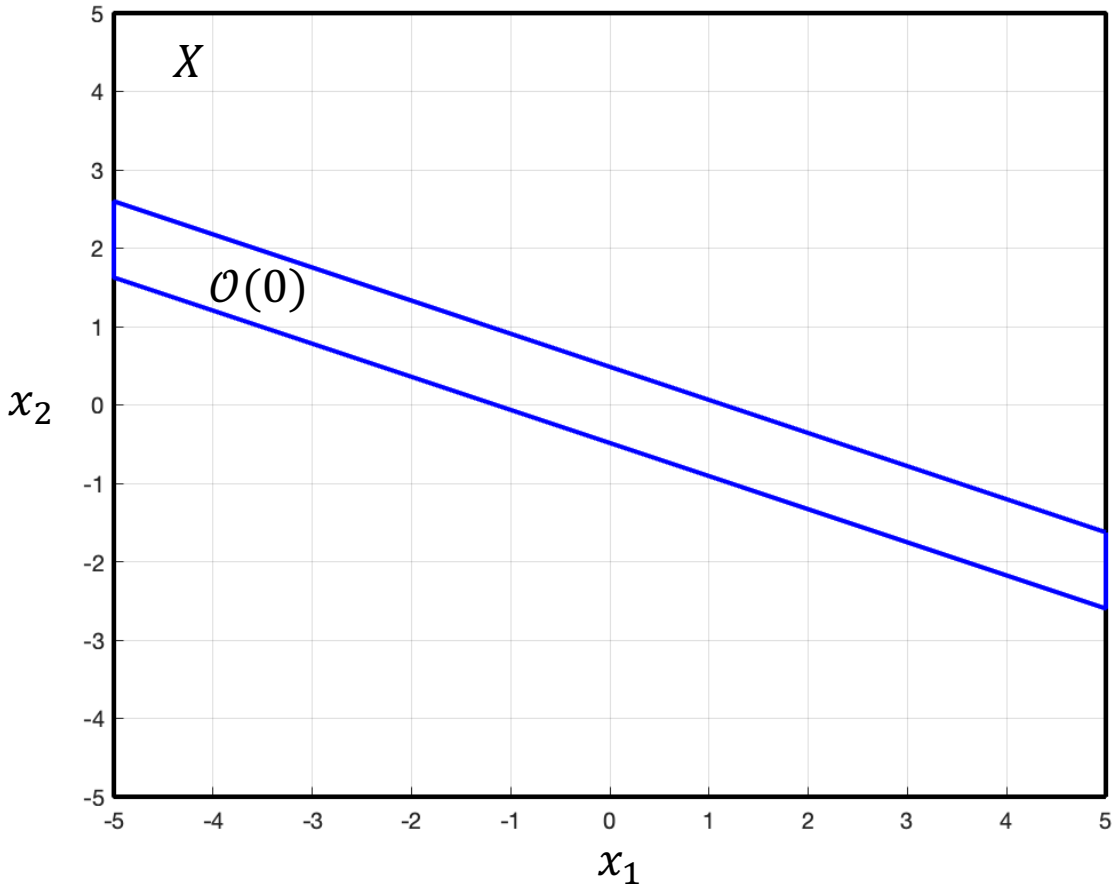
Mettiamo un po' di numeri. Nel nostro caso, il set dei vincoli sullo stato X è:



$$\mathcal{G}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad g_x = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Esempio

Aggiungiamo i vincoli sugli ingressi convertiti in vincoli sullo stato



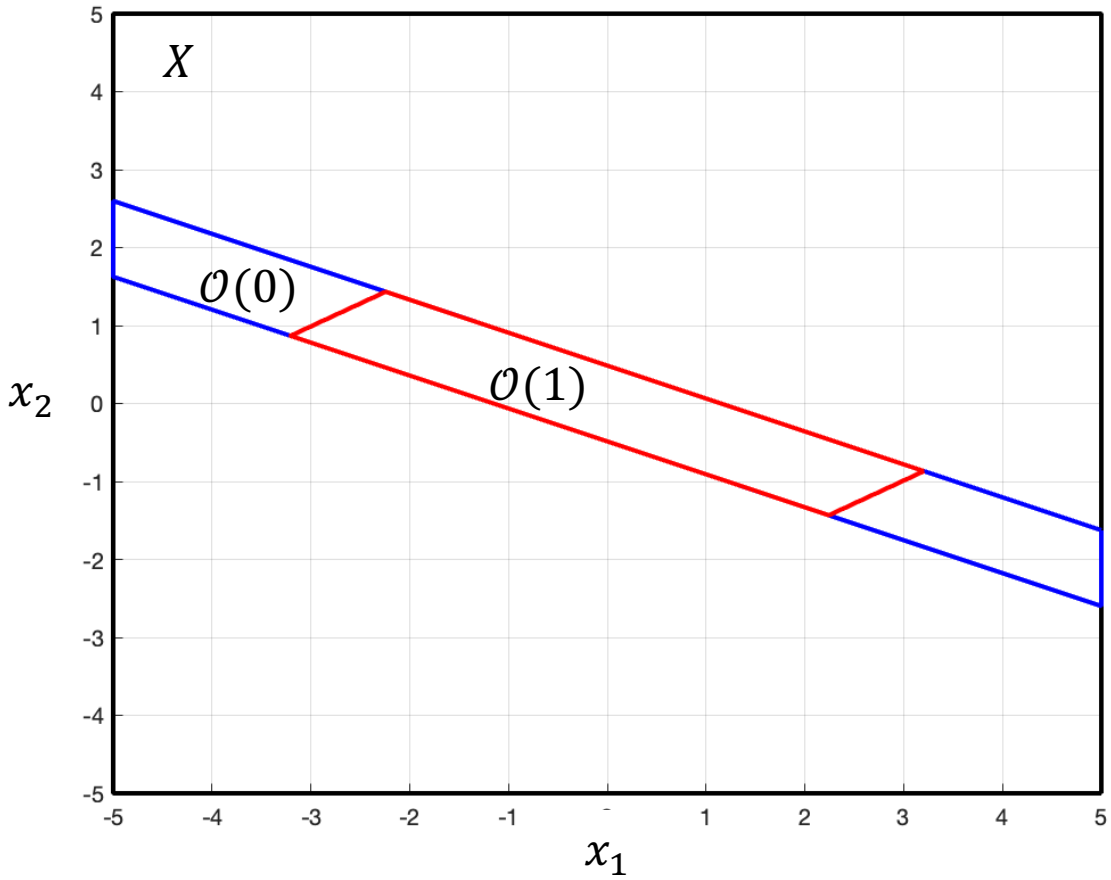
$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -0.4345 & -1.0285 \\ 0.4345 & 1.0285 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad g = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Questo è il set:

$$\mathcal{O}(0) = \{x : \mathcal{G}x \leq g\}$$

Esempio

Facciamo una prima iterazione. Otteniamo il set



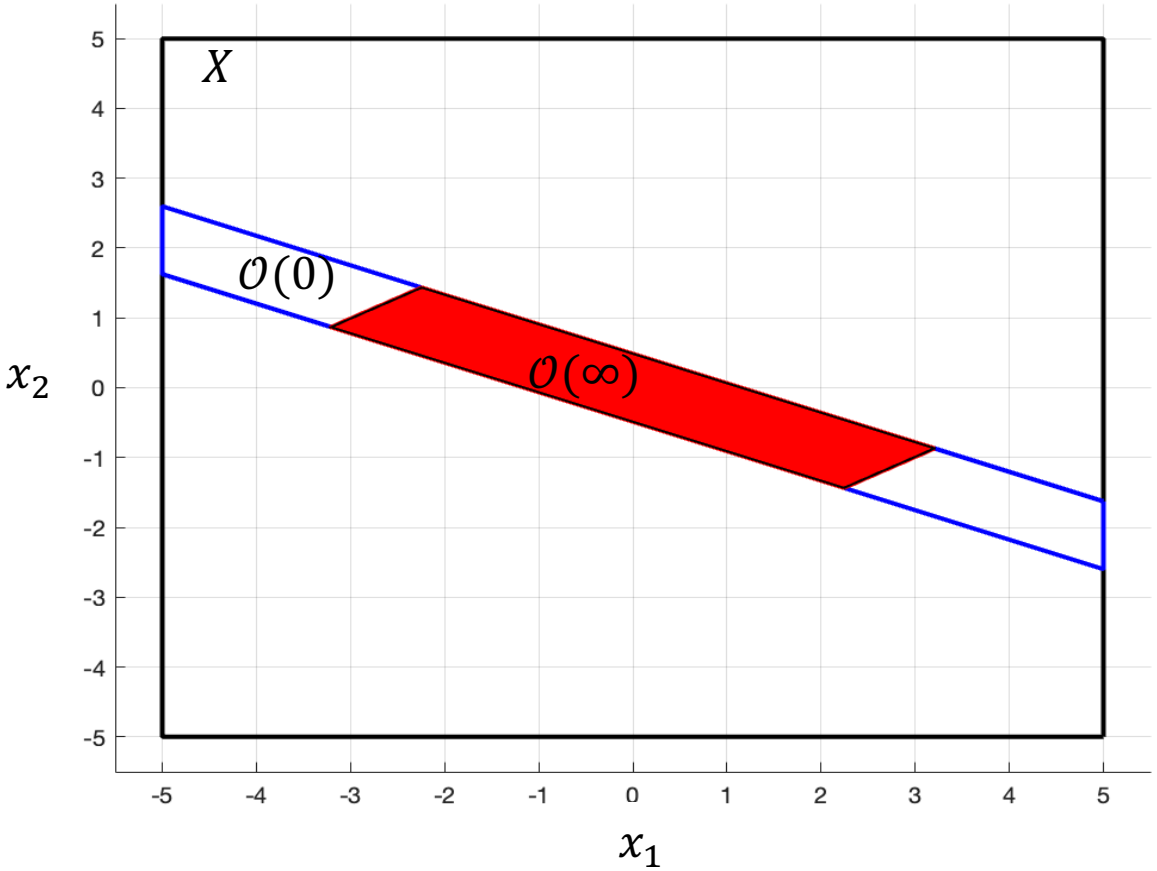
$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} -0.3892 & -0.9212 \\ 0.3892 & 0.9212 \\ 0.5064 & -0.8623 \\ -0.5064 & 0.8623 \end{bmatrix} \text{ e } g = \begin{bmatrix} 0.4478 \\ 0.4478 \\ 2.3718 \\ 2.3718 \end{bmatrix}$$

Questo è il set:

$$\mathcal{O}(1) = \{x \in \mathcal{O}(0) \colon \mathcal{G}(A - BK)x \leq g\}$$

Esempio

Dopo un'altra iterazione, convergiamo



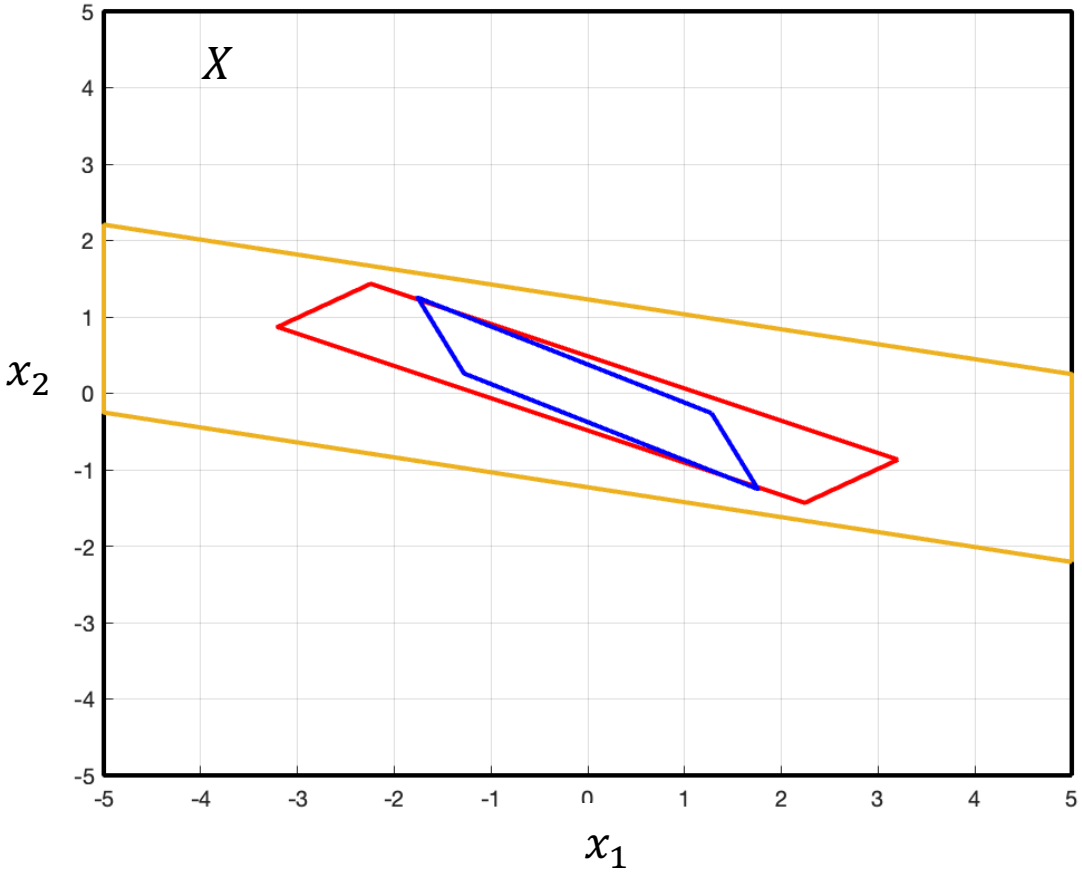
$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} -0.3892 & -0.9212 \\ 0.3892 & 0.9212 \\ 0.5064 & -0.8623 \\ -0.5064 & 0.8623 \end{bmatrix} \text{ e } g = \begin{bmatrix} 0.4478 \\ 0.4478 \\ 2.3718 \\ 2.3718 \end{bmatrix}$$

Questo è il maximal invariant set:

$\mathcal{O}(\infty)$

Esempio

Notate che la forma e la dimensione del set dipende da K



$$\mathcal{O}(\infty): [K, P] = dlqr(A, B, I, 1)$$

$$K = [0.4345 \quad 1.0285]$$

$$\mathcal{O}(\infty): [K, P] = dlqr(A, B, 100I, 1)$$

$$K = [0.6609 \quad 1.3261]$$

$$\mathcal{O}(\infty): [K, P] = dlqr(A, B, I, 100)$$

$$K = [0.0796 \quad 0.4068]$$

Esempio

Il problema di controllo MPC da risolvere diventa quindi, con N=5:

$$\min_{\boldsymbol{u}} \sum_{j=0}^{5-1} ||x(j)||_Q^2 + ||u(j)||_R^2 + ||x(5)||_P^2$$

$$s.t. \qquad x(0) = x(k), \quad x(j+1) = Ax(j) + Bu(j)$$

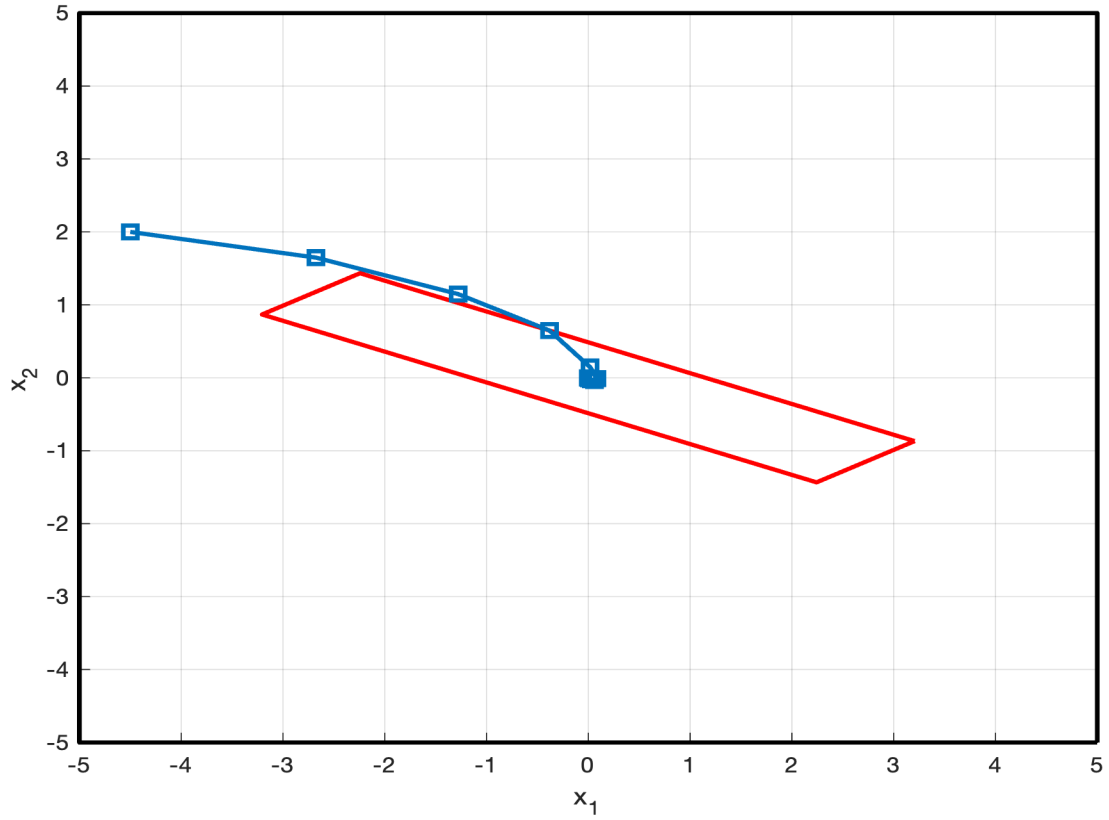
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(j) \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix},$$

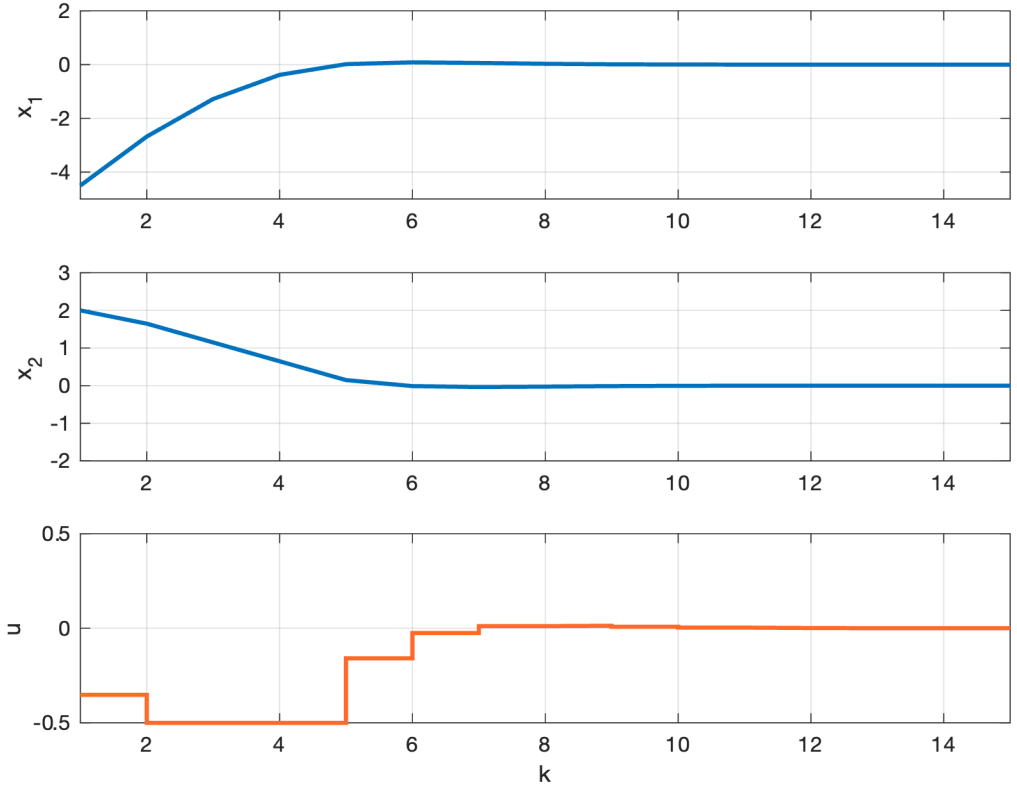
$$\begin{bmatrix} -0.3892 & -0.9212 \\ 0.3892 & 0.9212 \\ 0.5064 & -0.8623 \\ -0.5064 & 0.8623 \end{bmatrix} x(5) \leq \begin{bmatrix} 0.4478 \\ 0.4478 \\ 2.3718 \\ 2.3718 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(j) \leq \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

Esempio

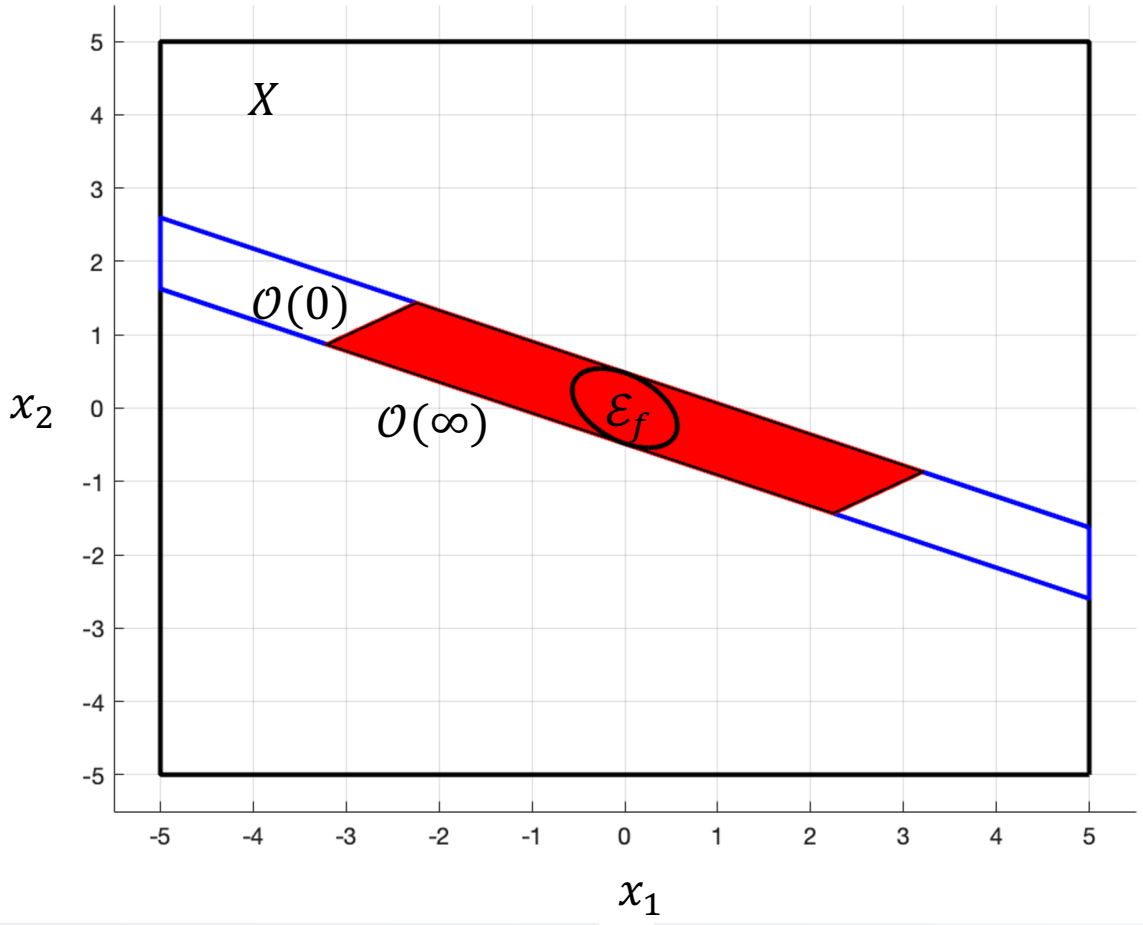
Vediamo il risultato di una simulazione di 15 steps con stato iniziale $x = (-4.5; 2)$





Esempio

Un'alternativa è calcolare l'invariante come curva di livello di $V_f(x)$



$$\mathcal{E}_f = \{x \in \mathcal{X} : V_f(x) \leq 0.89\}$$

In generale questo tipo di invariante risulta essere piccolo.

Può essere visto come il massimo ellissoide inscritto in $\mathcal{O}(\infty)$

Dominio di attrazione

Una delle proprietà fondamentali del regolatore MPC è che se la condizione iniziale da cui viene fatto partire il sistema è fattibile (i.e. il problema di ottimizzazione è risolvibile partendo da lì), allora esisterà sempre una soluzione del problema MPC.

- Questa proprietà è detta **recursive feasibility.**

Ma come sapere da dove partire? Dobbiamo calcolare quello che si definisce il **dominio di attrazione** del regolatore MPC.

$$\mathbb{X}_N = \left\{x \in \mathcal{X}\colon\ x(j) \in \mathcal{X}, u(j) \in \mathcal{U}, j \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, x(N) \in \mathbb{X}_f\right\}$$

Dominio di attrazione

Dobbiamo calcolare quello che si definisce il **dominio di attrazione** del regolatore MPC.

$$\mathbb{X}_N = \{x \in \mathcal{X}\colon\ x(j) \in \mathcal{X}, u(j) \in \mathcal{U}, j \in \mathbb{Z}_{0:N-1}, x(N) \in \mathbb{X}_f\}$$

ovvero l'insieme degli stati del sistema per cui esiste una sequenza fattibile di azioni di controllo tale per cui l'evoluzione del sistema rispetta i vincoli e lo stato N-esimo appartiene al terminal invariant set.

Questo set, nel linguaggio della teoria del controllo, viene definito **come N-steps controllable set to $\mathbb{X}_f$.**

Dominio di attrazione

In generale, non è semplicissimo calcolare il set $\mathbb{X}_N$.

Nel caso di sistemi lineari esistono comunque algoritmi che sfruttando la definizione di **one-step set to** $\mathbb{X}_f$ o $\mathcal{Q}(\mathbb{X}_f)$, riescono a calcolare $\mathbb{X}_N$.

Definizione: il set ad un passo o **one-step set to** $\mathbb{X}_f$ o $\mathcal{Q}(\mathbb{X}_f)$ è il set degli stati $x \in \mathcal{X}$ tali per cui esiste **un'azione di controllo fattibile** $u \in \mathcal{U}$ tale per cui il sistema raggiunge il set $\mathbb{X}_f$ in un solo passo: $(Ax + Bu) \in \mathbb{X}_f$. Ovvero:

$$\mathcal{Q}(\mathbb{X}_f) = \{x \in \mathcal{X}: \exists u \in \mathcal{U}, s.t. (Ax + Bu) \in \mathbb{X}_f\}$$

Iterando questa definizione N volte, otteniamo il set $\mathbb{X}_N$.

Approfondimento: controllable set

Definiamo adesso cos'è un *i*-steps controllable set. Sia un **generico** set Ω.

Definizione: il set ad un passo o **one-step set to** Ω o $\mathcal{Q}(\Omega)$ è il set degli stati $x \in \mathcal{X}$ tali per cui esiste un'azione di controllo fattibile $u \in \mathcal{U}$ tale per cui il sistema raggiunge il set Ω in **un solo passo**: $(Ax + Bu) \in \mathbb{X}_f$. Ovvero:

$$\mathcal{Q}(\Omega) = \{x \in \mathcal{X}: \exists u \in \mathcal{U}, s.t. (Ax + Bu) \in \Omega\}$$

Definizione: il set controllabile a Ω in i passi o i**-steps controllable set to** Ω o $\mathcal{C}_i(\mathcal{X}, \Omega)$ è il set degli stati $x \in \mathcal{X}$ tali per cui esiste una sequenza di azioni di controllo fattibile tale per cui il sistema raggiunge il set Ω in ***i* passi**, con una traiettoria fattibile. Ovvero:

$$\mathcal{C}_i(\mathcal{X}, \Omega) = \{x(0) \in \mathcal{X}: \forall k = 0, \dots, i-1 \; \exists u(k) \in \mathcal{U}, s.t. \; x(k) \in \mathcal{X}, x(i) \in \Omega\}$$

Approfondimento: controllable set

Proprietà.

1. $\mathcal{C}_{i+1}(\mathcal{X},\Omega) = \mathcal{Q}(\mathcal{C}_i(\mathcal{X},\Omega)) \cap \mathcal{X}$, con $\mathcal{C}_0(\mathcal{X},\Omega) = \Omega$.
2. Il set $\mathcal{C}_i(\mathcal{X},\Omega)$ non è necessariamente contenuto in $\mathcal{C}_{i+1}(\mathcal{X},\Omega)$, tranne nel caso in cui Ω sia un invariant set. Questo vuol dire che se $x(0) \in \mathcal{C}_i(\mathcal{X},\Omega)/\mathcal{C}_{i+1}(\mathcal{X},\Omega)$, allora il sistema può essere portato in Ω in i passi ma non in $i+1$ passi.
3. Se esiste un indice j tale per cui $\mathcal{C}_{i+1}(\mathcal{X},\Omega) = \mathcal{C}_i(\mathcal{X},\Omega)$ per ogni $i \geq j$, allora

$$\mathcal{C}_i(\mathcal{X},\Omega) = \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X},\Omega) = \mathcal{O}_\infty(\mathcal{X})$$

La sequenza $\mathcal{C}_i(\mathcal{X},\Omega)$ converge al massimo invariant set di controllo (tutti gli altri invarianti di controllo sono in esso contenuti).

Approfondimento: stabilizable set

Definiamo adesso cos'è un *i*-steps stabilizable set. Sia Ω un **invariant set**.

Definizione: il set stabilizzabile a Ω in i passi o **i-steps stabilizable set to Ω** o $\mathcal{S}_i(\mathcal{X}, \Omega)$ è il set degli stati $x \in \mathcal{X}$ tali per cui esiste una sequenza di azioni di controllo fattibile tale per cui il sistema raggiunge l'invariant set Ω in i passi, con una traiettoria fattibile. Ovvero:

$$\mathcal{S}_i(\mathcal{X}, \Omega) = \{x(0) \in \mathcal{X} : \forall k = 0, \dots, i-1 \; \exists u(k) \in \mathcal{U}, s.t. \; x(k) \in \mathcal{X}, x(i) \in \Omega\}$$

In pratica è il controllable set in i passi a Ω.

La differenza tra un controllable set e uno stabilizable set è tutta nella natura del target set. Nel secondo caso Ω è un **invariant set**.

Approfondimento: stabilizable set

Proprietà.

1. $\mathcal{S}_{i+1}(\mathcal{X},\Omega) = \mathcal{Q}(\mathcal{S}_i(\mathcal{X},\Omega)) \cap \mathcal{X}$, con $\mathcal{S}_0(\mathcal{X},\Omega) = \Omega$.
2. $\mathcal{S}_i(\mathcal{X},\Omega) \subseteq \mathcal{S}_{i+1}(\mathcal{X},\Omega)$
3. $\mathcal{S}_i(\mathcal{X},\Omega)$ è un control invariant set per ogni $i \geq 0$.
4. Se $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$, allora $\mathcal{S}_i(\mathcal{X},\Omega_1) \subseteq \mathcal{S}_i(\mathcal{X},\Omega_2)$.
5. $\mathcal{S}_i\left(\mathcal{X},\mathcal{S}_j(\mathcal{X},\Omega)\right) = \mathcal{S}_{i+j}(\mathcal{X},\Omega)$.
6. $\mathcal{S}_\infty(\mathcal{X},\Omega) = \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X},\Omega) = \mathcal{O}_\infty(\mathcal{X})$

In pratica $\mathcal{S}_i(\mathcal{X},\Omega)$ e $\mathcal{C}_i(\mathcal{X},\Omega)$ convergono allo stesso invariant set di controllo massimo.

Come calcolarli?

Ricordiamo la definizione di 1-step set

$$\mathcal{Q}(\Omega) = \{x \in \mathcal{X}\colon \exists u \in \mathcal{U}, s.t. (Ax + Bu) \in \Omega\}$$

Sia il set Ω (definito nello spazio degli stati) dato da:

$$\Omega = \{x\colon \mathcal{G}_\Omega x \leq g_\Omega\}$$

Allora: $(Ax + Bu) \in \Omega \Longrightarrow \mathcal{G}_\Omega(Ax + Bu) \leq g_\Omega$

Ovvero: $[\mathcal{G}_\Omega A,\ \mathcal{G}_\Omega B]\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \leq g_\Omega$ **Questo set è definito nello spazio esteso** (x, u)

Come calcolarli?

Aggiungiamo i vincoli su stati e ingressi

$$x \in \mathcal{X}: \boldsymbol{X}_{min} \leq x \leq \boldsymbol{X}_{max} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_{max} \\ -\boldsymbol{X}_{min} \end{bmatrix}$$

$$u \in \mathcal{U}: \boldsymbol{U}_{min} \leq u \leq \boldsymbol{U}_{max} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} \end{bmatrix} u \leq \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_{max} \\ -\boldsymbol{U}_{min} \end{bmatrix}$$

Mettiamo tutto insieme:

$$\mathcal{Q}_{(x,u)}(\Omega): \begin{bmatrix} \mathcal{G}_\Omega A & \mathcal{G}_\Omega B \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathcal{g}_\Omega \\ \boldsymbol{X}_{max} \\ -\boldsymbol{X}_{min} \\ \boldsymbol{U}_{max} \\ -\boldsymbol{U}_{min} \end{bmatrix}$$

Questo set è definito nello spazio esteso (x, u)

Come calcolarli?

Ricordiamo la definizione di 1-step set

$$\mathcal{Q}(\Omega) = \{x \in \mathcal{X}: \exists u \in \mathcal{U}, s.t. (Ax + Bu) \in \Omega\}$$

Il set $\mathcal{Q}(\Omega)$ è definito nello spazio degli stati.

Dobbiamo quindi calcolarne la proiezione su x per ottenere $\mathcal{Q}(\Omega)$

$$\mathcal{Q}(\Omega) = Proj_x(\mathcal{Q}_{(x,u)}(\Omega))$$

Gli step di questo algoritmo sono facilmente definibili in una Matlab function.

Matlab function

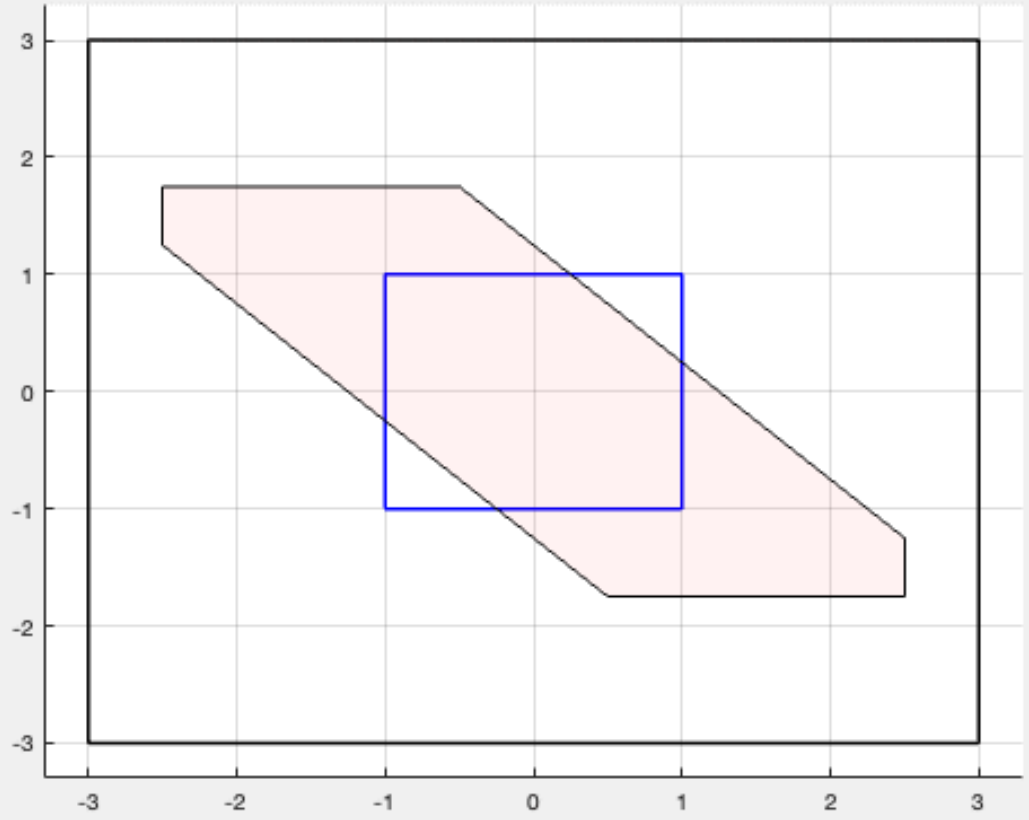
```
function [Q,Qu]=Q1passo(A,B,X,U,Omega)

Mrx= X(:,1:end-1); mrx=X(:,end);
Mru= U(:,1:end-1); mru=U(:,end);
Go= Omega(:,1:end-1); go=Omega(:,end);

na=length(Mrx(:,1));
nb=length(Mru(:,1));
nx=length(Mrx(1,:));
nu=length(Mru(1,:));

M=[Go*A,Go*B;
   Mrx,zeros(na,nu);
   zeros(nb,nx),Mru];
m=[go;mrx;mru];

Qu=[M,m];
Q=ineqproj(Qu,nx);
```

Inserendo questa funzione in una struttura iterativa, otteniamo i controllable set in N step.

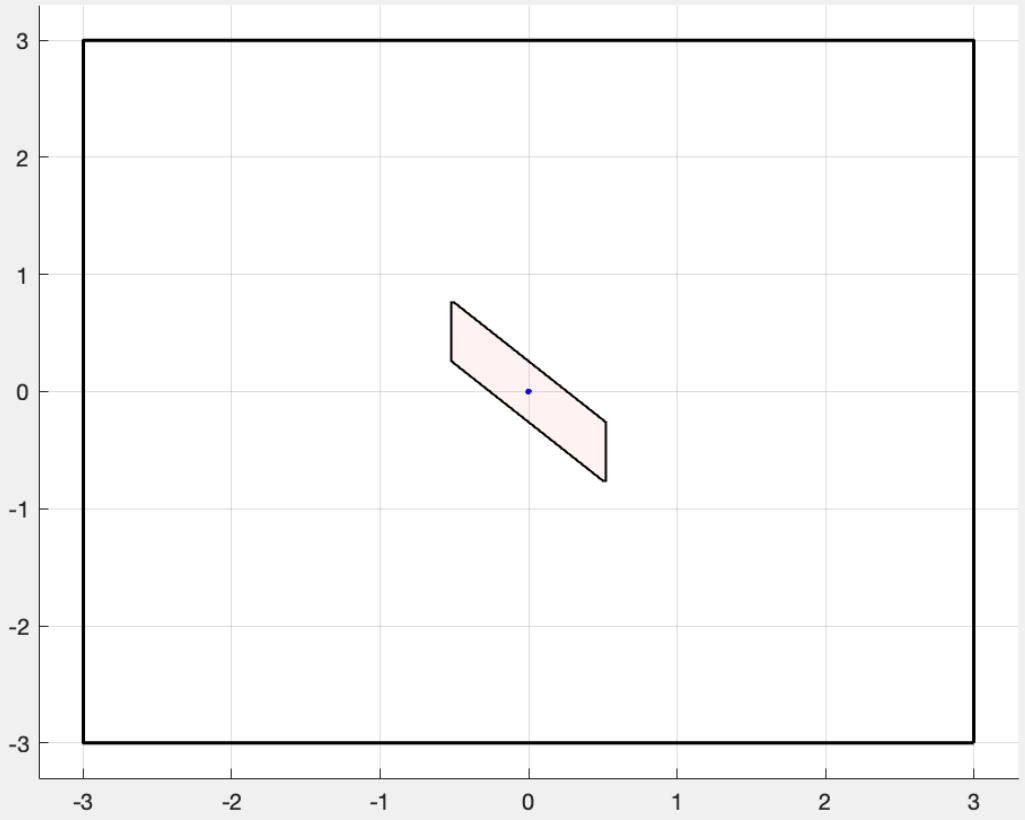
```
function CN=CalcCN(A,B,X,U,Omega,N)

Ci=Omega;

for i=1:N
Ci1=Ci;
Ci=(Q1passo(A,B,X,U,Ci1));
end

CN=Ci;
```

Controllable sets VS Stabilizable set

$\mathcal{C}_i(\mathcal{X}, \Omega)$



$\mathcal{S}_i(\mathcal{X}, \Omega)$



Esempio

Vediamo il set $\mathbb{X}_N$ nel caso del nostro esempio. Il problema MPC con N=5 era:

$$\min_{\boldsymbol{u}} \sum_{j=0}^{5-1} ||x(j)||_Q^2 + ||u(j)||_R^2 + ||x(5)||_P^2$$

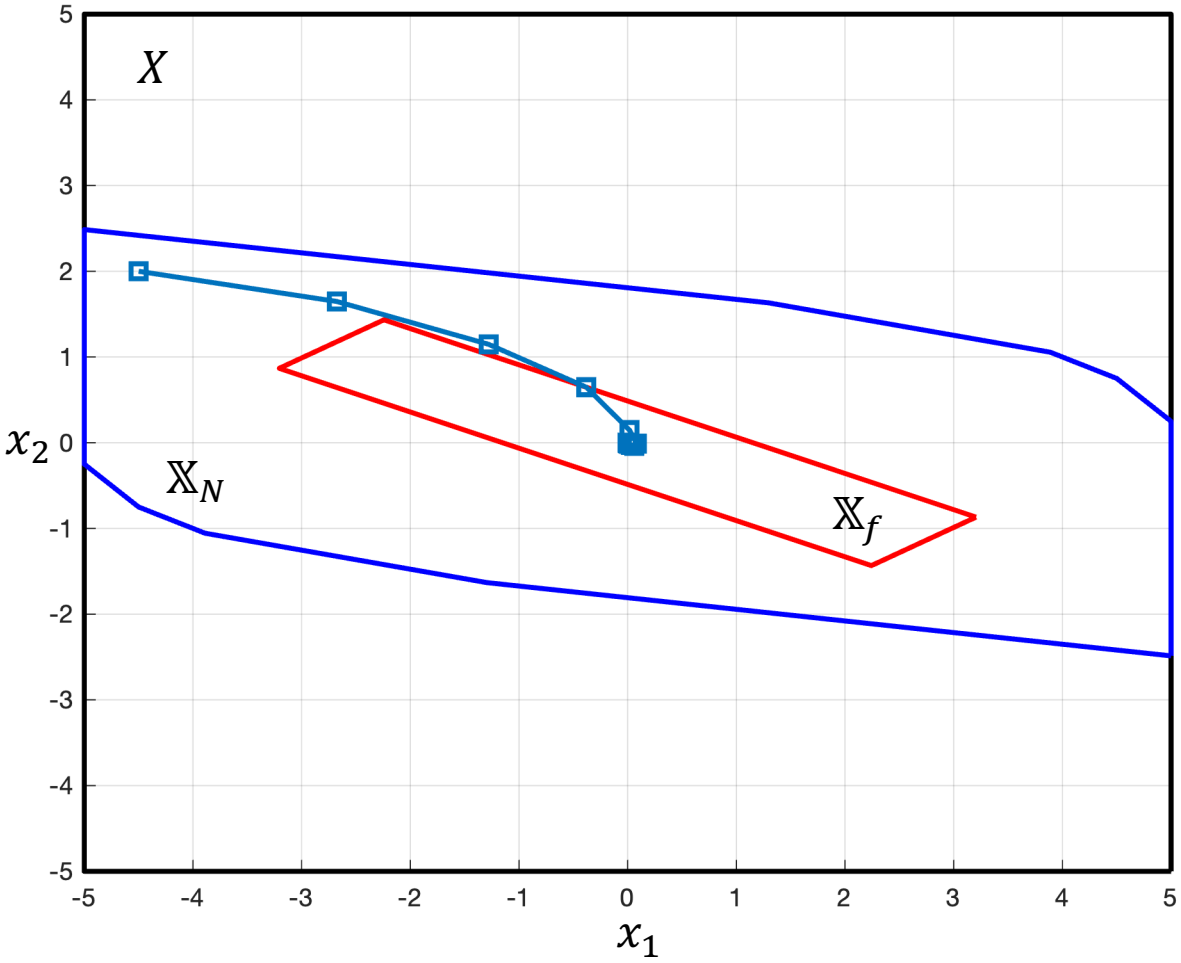
$$s.t. \qquad x(0) = x(k), \quad x(j+1) = Ax(j) + Bu(j)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(j) \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -0.3892 & -0.9212 \\ 0.3892 & 0.9212 \\ 0.5064 & -0.8623 \\ -0.5064 & 0.8623 \end{bmatrix} x(5) \leq \begin{bmatrix} 0.4478 \\ 0.4478 \\ 2.3718 \\ 2.3718 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(j) \leq \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

Esempio

Iterando $\mathcal{Q}(\mathbb{X}_f)$ per 5 passi otteniamo il set in azzurro.



$\mathbb{X}_N$ rappresenta il set di condizioni iniziali per i quali esiste una soluzione fattibile del problema di ottimizzazione.

Partendo da un qualsiasi punto al di fuori del set azzurro, il problema di ottimizzazione del MPC non ammette soluzione.

La dimensione di $\mathbb{X}_N$ dipende:

1. da N (maggiore N, più grande il set)
2. da quella di $\mathbb{X}_f$: più grande è $\mathbb{X}_f$, più grande sarà $\mathbb{X}_N$ (proprietà 4 slide 39).

Esiste un $\mathbb{X}_N$ massimo (proprietà 6 slide 39).

Esempio

Confrontiamo adesso le dimensioni di $\mathbb{X}_N$ per diversi orizzonti.

Prenderemo 3 orizzonti diversi: $N = \{1,2,3\}$.

Inoltre confronteremo il caso di avere vincolo terminale di disuguaglianza, ovvero $x(N) \in \mathbb{X}_N$ con il caso di avere vincolo terminale di uguglianza $x(N) = 0$.

Si tratta sempre di un vincolo terminale dato da un invariante, con la particolarità che questo invariante è solo un punto.

$$\mathbb{X}_f = \{0\}$$

Esempio

Il problema MPC con vincolo terminale di disuguaglianza è:

$$\min_{\boldsymbol{u}} \sum_{j=0}^{N-1} ||x(j)||_Q^2 + ||u(j)||_R^2 + ||x(N)||_P^2$$

$$s.t. \qquad x(0) = x(k), \quad x(j+1) = Ax(j) + Bu(j)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(j) \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -0.3892 & -0.9212 \\ 0.3892 & 0.9212 \\ 0.5064 & -0.8623 \\ -0.5064 & 0.8623 \end{bmatrix} x(N) \leq \begin{bmatrix} 0.4478 \\ 0.4478 \\ 2.3718 \\ 2.3718 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(j) \leq \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

con: $N = \{1,2,3\}$.

Esempio

Il problema MPC con vincolo terminale di uguaglianza è:

$$\min_{\boldsymbol{u}} \sum_{j=0}^{N-1} ||x(j)||_Q^2 + ||u(j)||_R^2$$

$$s.t. \qquad x(0) = x(k), \quad x(j+1) = Ax(j) + Bu(j)$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(j) \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix},}$$

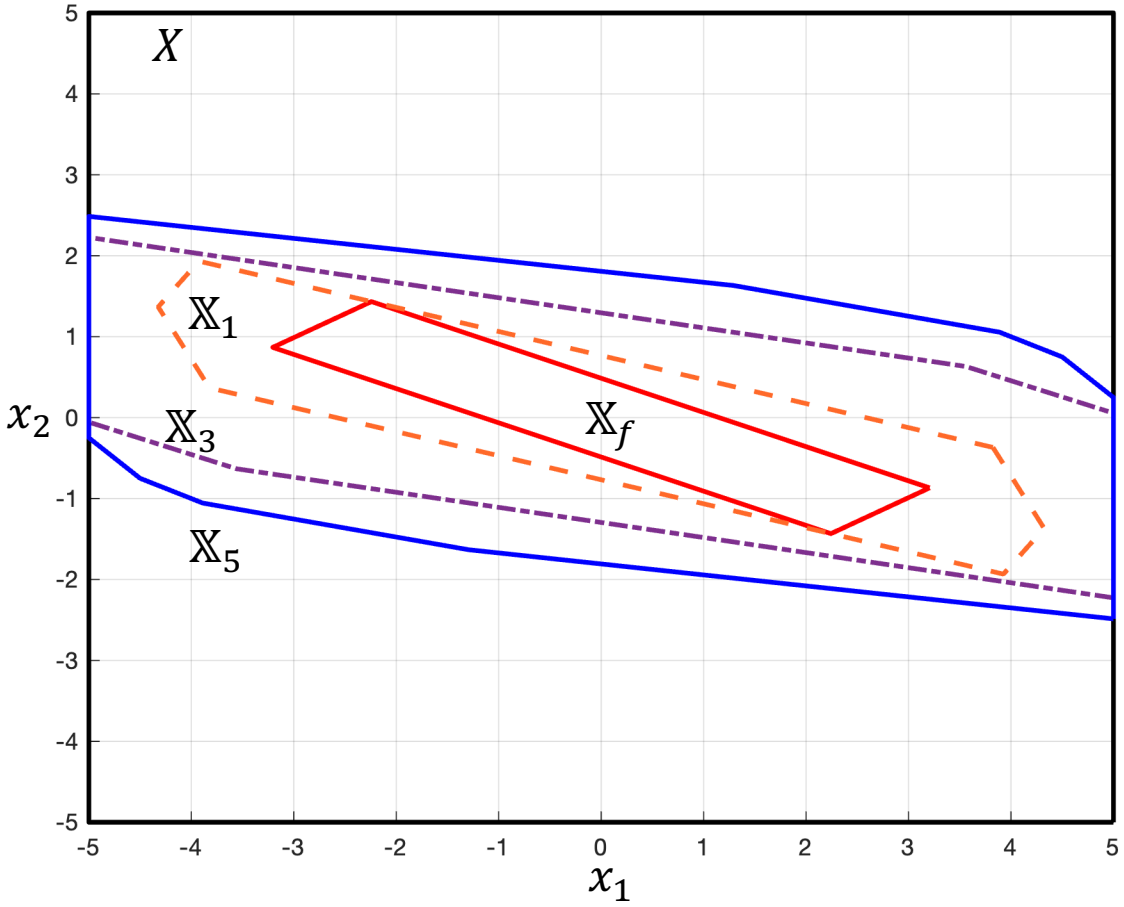
$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(j) \leq \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix},}$$

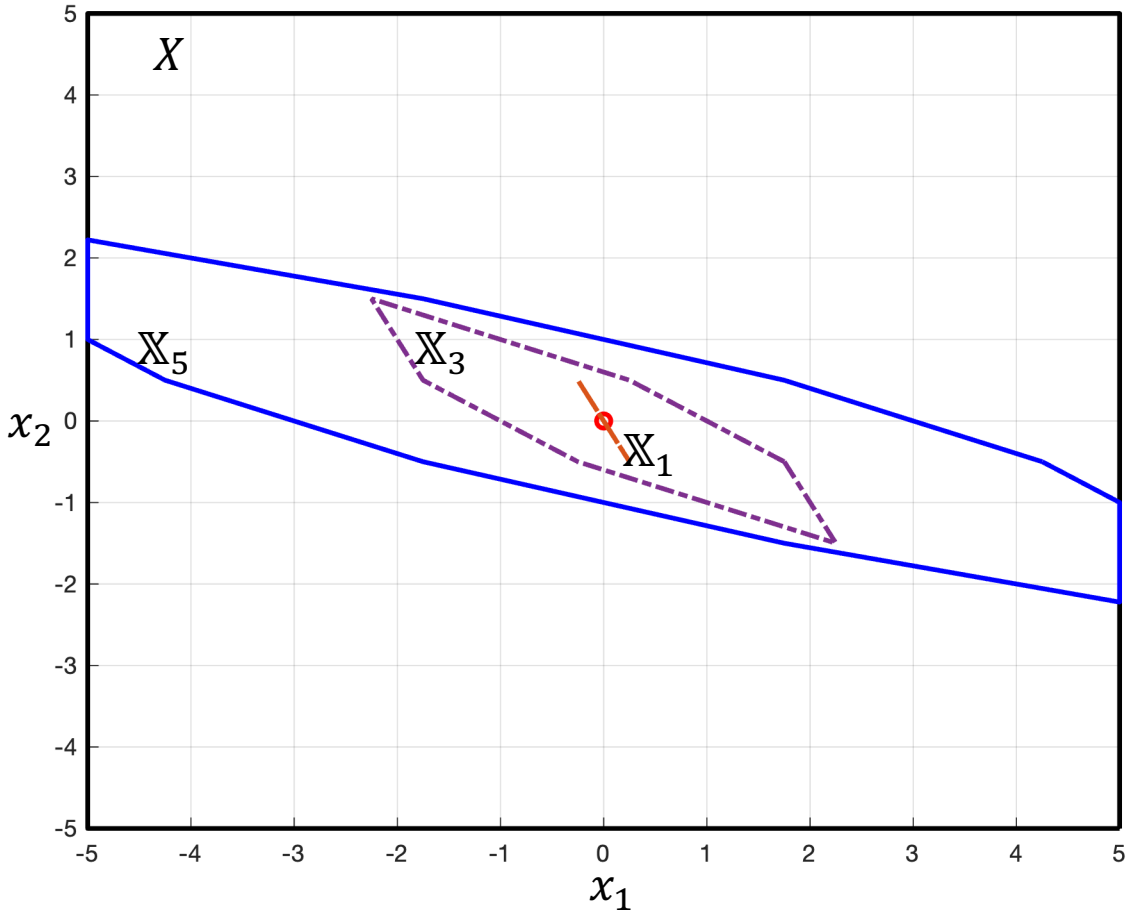
$$\boxed{x(N) = 0}$$

con: $N = \{1,2,3\}$ e $||x(N)||_P^2 = 0$.

Esempio

L'invariant set terminale garantisce un $\mathbb{X}_N$ più grande rispetto al vincolo terminale di uguaglianza grazie alla proprietà 4 della slide 39.





Outline

1. Introduzione
2. Linear MPC
3. **Setpoint Tracking MPC**

Setpoint tracking MPC

Per setpoint tracking si intende il caso in cui si vuole regolare il sistema in un punto di equilibrio diverso dall'origine.

Come cambia la progettazione del regolatore MPC?

Sostanzialmente cambiano 2 cose:

1. Il funzionale di costo.
2. Il vincolo terminale.

Manteniamo lo stesso problema

Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

In cui $k_0 = 0$ e $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$. Lo stato si suppone accessibile. Sia (A, B) ***raggiungibile***.

Si assuma inoltre l'esistenza di vincoli su stato e controllo $x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U}$

$$x \in \mathcal{X} \Longrightarrow x_{min} \leq x \leq x_{max},$$

$$u \in \mathcal{U} \Longrightarrow u_{min} \leq u \leq u_{max}$$

Setpoint tracking cost function

Si voglia risolvere il problema di regolazione dello stato del sistema ad un generico equilibrio x_s

Per farlo, la cifra di merito quadratica, diventa

$$J(x(k), u(.)) = \sum_{j=0}^{N-1} ||x(j) - x_s||_Q^2 + ||u(j) - u_s||_R^2 + ||x(N) - x_s||_P^2$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} (x(j) - x_s)' Q (x(j) - x_s) + (u(j) - u_s)' R (u(j) - u_s) + (x(N) - x_s)' P (x(N) - x_s)$$

Con $x_s = Ax_s + Bu_s$. Si noti che il caso di regolazione all'origine è un caso particolare di setpoint tracking, in cui $(x_s, u_s) = (0,0)$.

Enunciato del problema

Il problema di ottimizzazione sarà quindi dato da

$$\min_{\boldsymbol{u}} J(x(k), u(.))$$

$$s.t.\ \ x(0) = x(k)$$

Condizione iniziale = Feedback di stato

$$x(j+1) = Ax(j) + Bu(j)$$

$$x(j) \in \mathcal{X} \quad u(j) \in \mathcal{U}$$

$$x(N) \in \mathbb{X}_f(x_s)$$

Dove $\mathbb{X}_f(x_s)$ sta ad indicare che l'invariante terminale è calcolato rispetto al setpoint x_s

Vediamo un esempio.

Esempio

Si consideri il sistema precedente: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vincoli sullo stato e sugli ingressi: $x \in \mathcal{X}$ dato da $\begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix} \leq x \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}, -0.5 \leq u \leq 0.5$

Costruiamo un MPC per regolare il sistema al setpoint $x_s = (4,0)$ e $u_s = 0$.

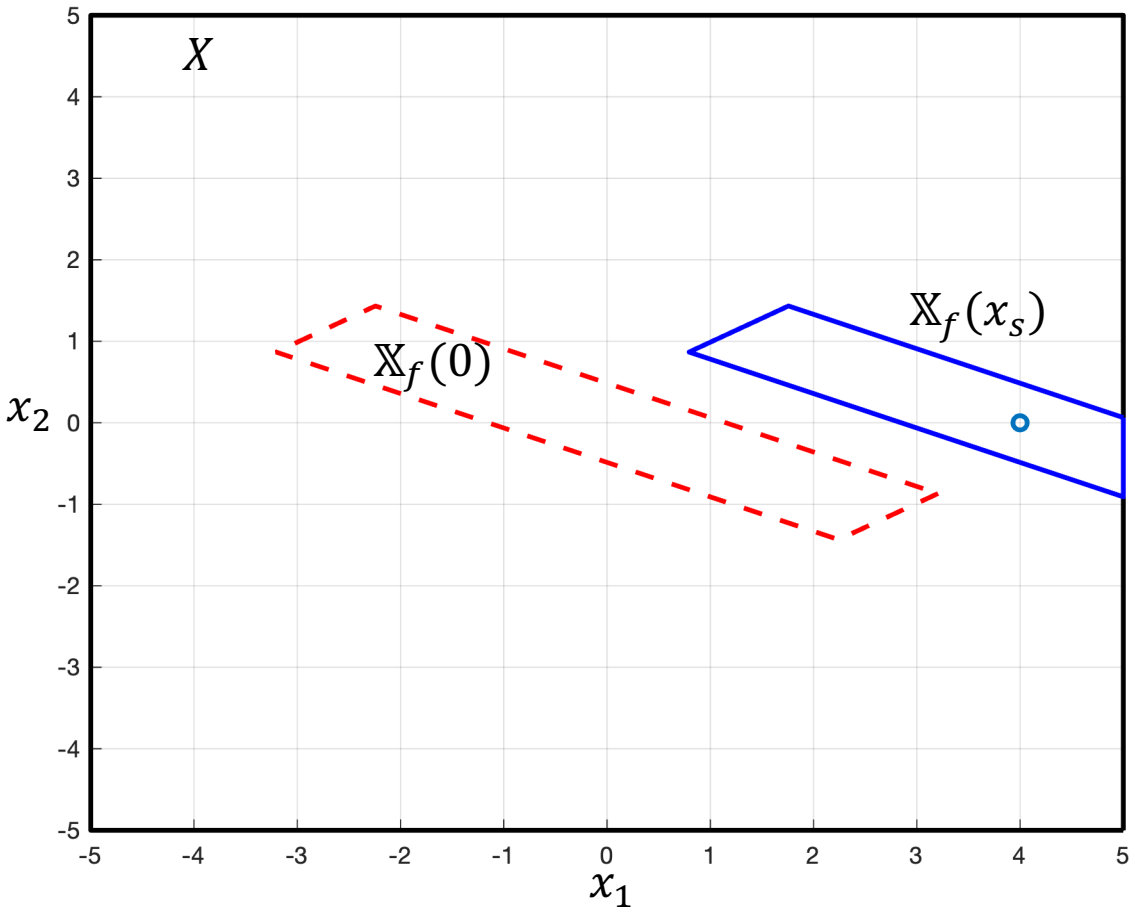
Manteniamo il setup precedente: $\mathrm{Q} = I,\ R = 1, N = 5$. Con questa scelta di matrici avevamo ottenuto

$$K = \begin{bmatrix} 0.4345 & 1.0285 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 2.3671 & 1.1180 \\ 1.1180 & 2.5875 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[K, P] = dlqr(A, B, Q, R)}$$

Esempio

Calcoliamo il terminal invariant set $\mathbb{X}_f(x_s)$



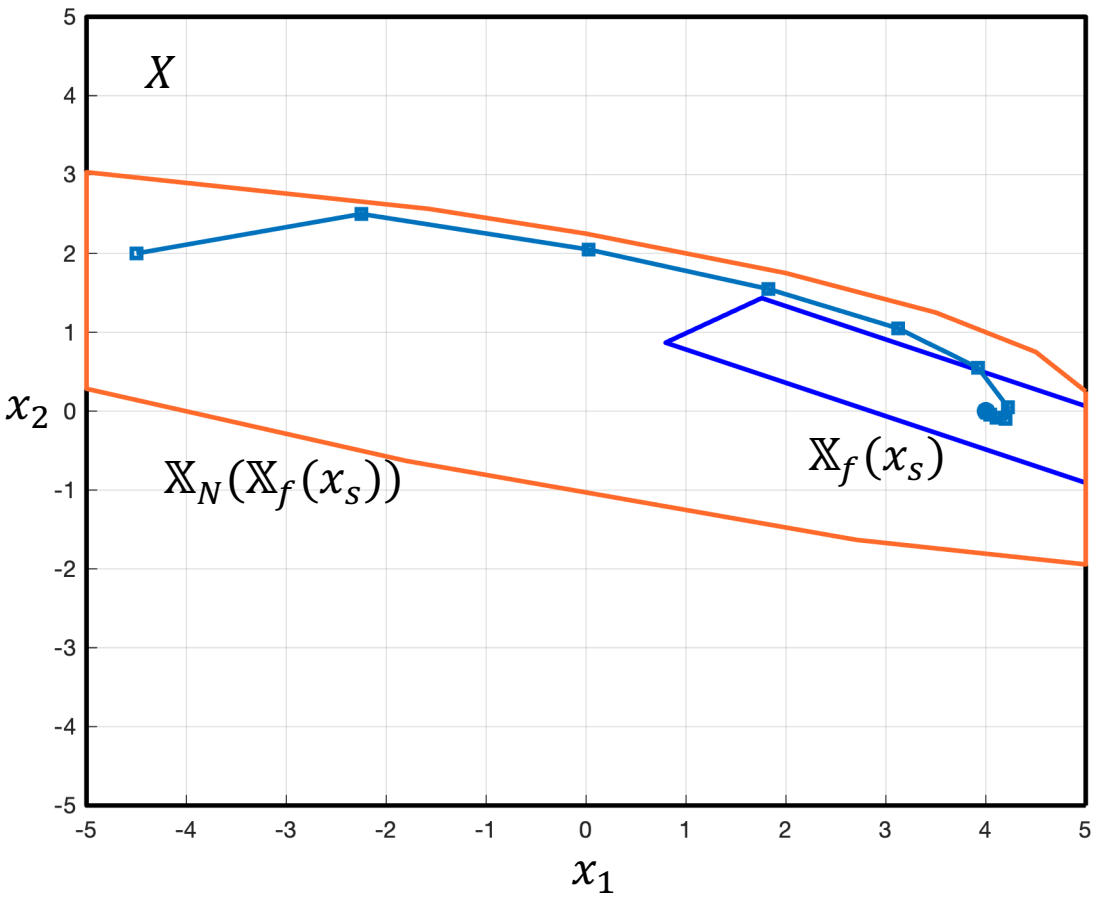
$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.4460 & -0.8950 \\ 0.4460 & 0.8950 \\ -0.9004 & -0.4352 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 5 \\ -1.4467 \\ 2.1216 \\ -2.5638 \end{bmatrix}$$

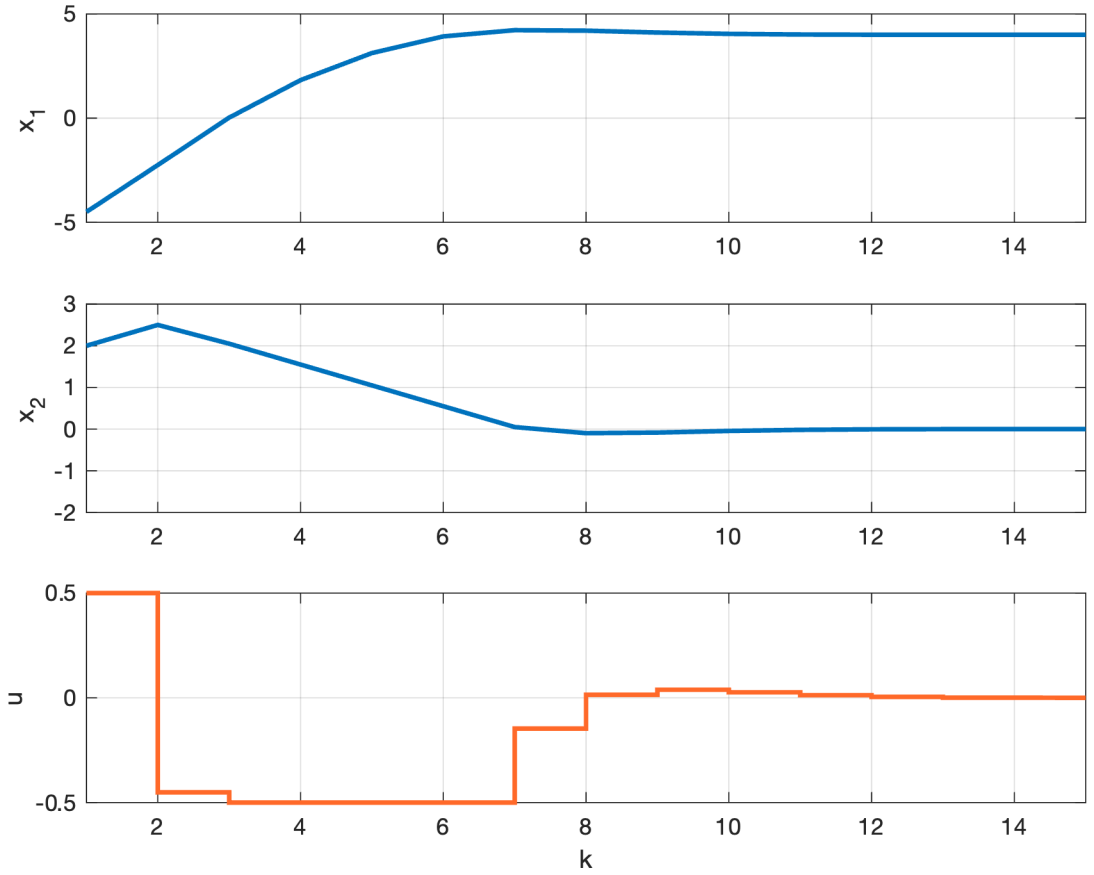
Questo è il maximal invariant set:

$$\mathbb{X}_f(x_s)$$

Esempio

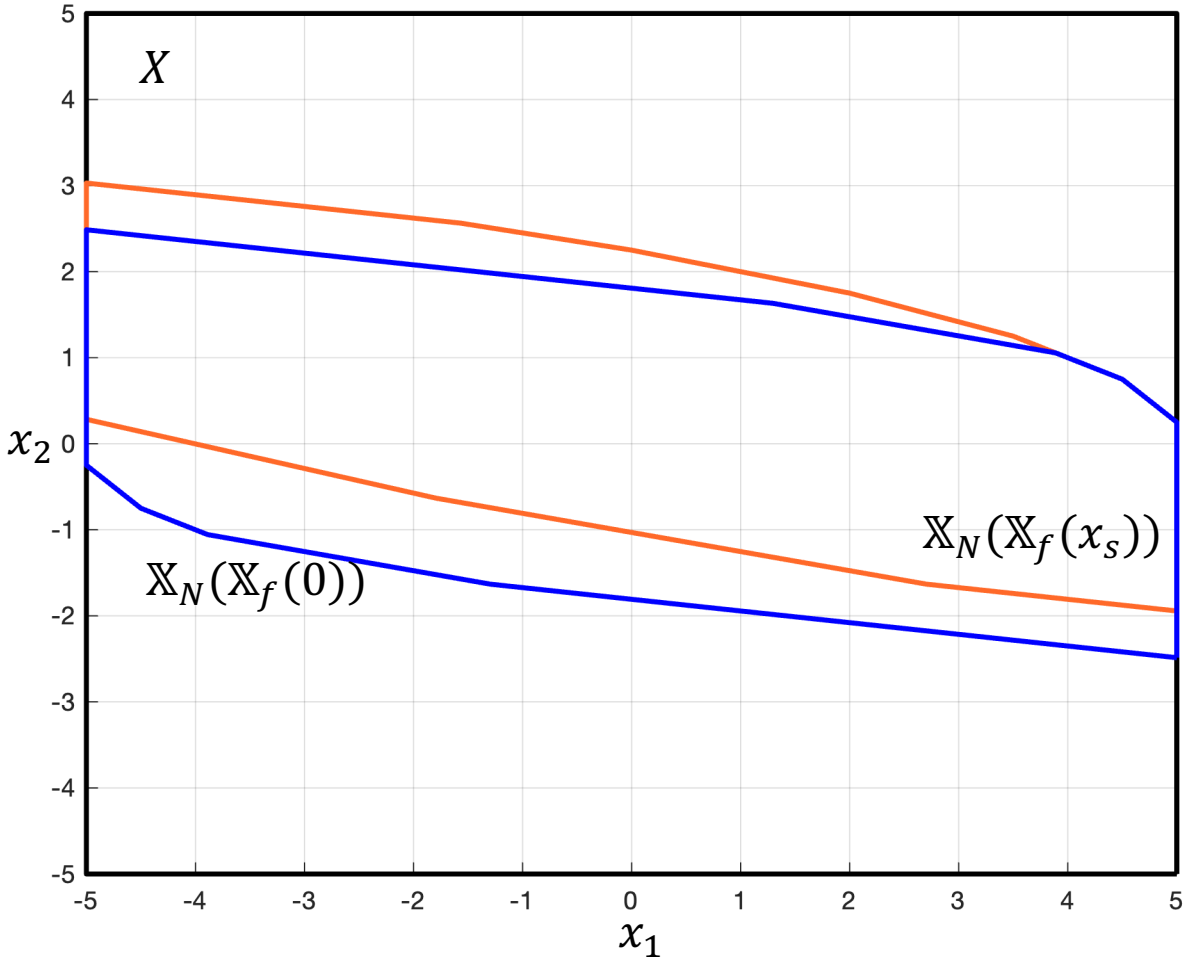
Vediamo il risultato di una simulazione di 15 steps con stato iniziale $x = (-4.5; 2)$





Esempio

Vediamo il confronto tra i set $\mathbb{X}_N$ nei due casi



Come detto precedentemente, la forma e la dimensione di $\mathbb{X}_N$ dipende:

1. da N (maggiore N, più grande il set)
2. da quella di $\mathbb{X}_f$ (più grande è $\mathbb{X}_f$, più grande sarà $\mathbb{X}_N$).

In questo caso, a parità di N, la diversa forma e dimensione di $\mathbb{X}_f$ determinano una diversa forma del dominio di attrazione.

Vincolo terminale di uguglianza

Caso simile alla regolazione all'origine, solo con $x_s \neq 0$

$$\min_{\boldsymbol{u}} \sum_{j=0}^{N-1} ||x(j) - x_s||_Q^2 + ||u(j) - u_s||_R^2$$

$$s.t.\ x(0) = x(k)$$

Condizione iniziale = Feedback di stato

$$x(j+1) = Ax(j) + Bu(j)$$

$$x(j) \in \mathcal{X} \quad u(j) \in \mathcal{U}$$

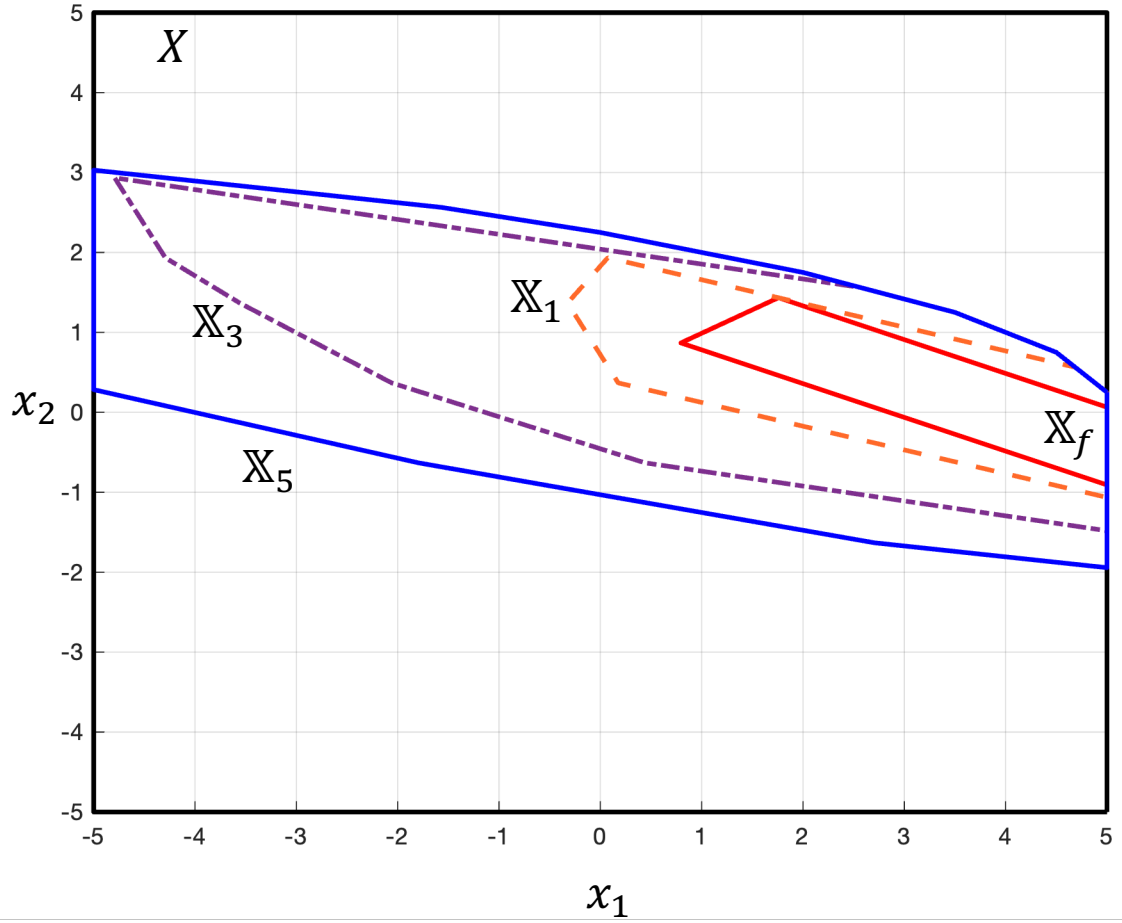
$$x(N) = x_s$$

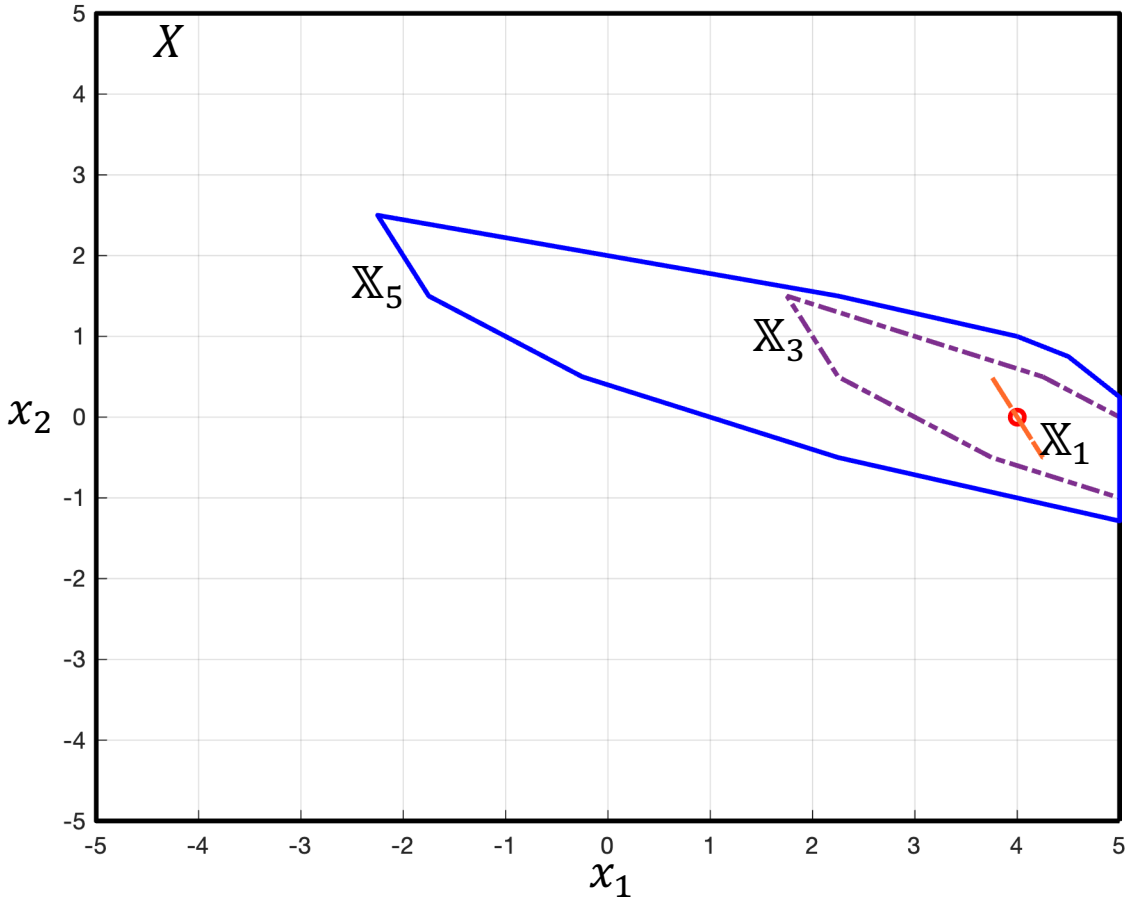
Anche in questo caso si tratta sempre di un vincolo terminale dato da un invariante, con la particolarità che questo invariante è solo un punto.

$$\mathbb{X}_f = \{x_s\}$$

Esempio

Vediamo il confronto tra i set $\mathbb{X}_N$ nei due possibili vincoli terminali





Outline

1. Introduzione
2. Linear MPC
3. Setpoint Tracking MPC
4. **Stato non accessibile**

Stato non accessibile

Quello che abbiamo visto finora nel progetto del regolatore MPC assume completa conoscenza/accessibilità dello stato del sistema.

Questa ipotesi non è sempre verificabile.

In genere, come visto già nel caso del regolatore LQR, abbiamo infatti solo la possibilità di misurare un numero limitato di variabili d'uscita.

In questo caso la strategia risolutiva che dobbiamo impiegare è esattamente la stessa applicata nel caso del LQR.

Osservatore dello stato

In questo caso la strategia risolutiva si basa su due step:

1. Si costruisce un osservatore (o ricostruttore) dello stato, cioè un sistema che in base alle misure disponibili di ingressi e uscite produce una stima dello stato del sistema $\hat{x}$.

2. Si utilizza lo stato stimato, anziché lo stato vero, e lo si comunica al regolatore MPC come feedback.

3. La legge di controllo MPC sarà quindi $u(k) = \kappa(\hat{x}(k))$.

Enunciato del problema

Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

In cui $k_0 = 0$ e $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$. Lo stato si suppone **NON** accessibile. Sia (A, B) ***raggiungibile***.

Obiettivo: progettare un osservatore dello stato tale che ad ogni istante di tempo k sia possibile ottenere una stima dello stato $\hat{x}(k)$ come funzione degli ingressi e delle uscite.

Ma questo ormai lo sappiamo fare…

Ripasso: progetto dell'osservatore

L'obiettivo dell'osservatore è far sì che $\hat{x}(k) = x(k)$, $k \geq 0$, per ogni $u(k)$, $k \geq 0$.

L'osservatore ha quindi la struttura:

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L\,[y(k) - C\hat{x}(k) - Du(k)]$$

Con il guadagno L **costante.**

Per tanto, se definiamo l'***errore di stima***

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$$

Sottraendo l'equazione dell'osservatore da quella del sistema si ottiene

$$e(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) = (A - LC)e(k)$$

L'errore di stima è quindi lo stato di un sistema dinamico lineare e autonomo.

Ripasso: progetto dell'osservatore

Teorema: dato il sistema $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ e l'osservatore $\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L\,[y(k) - C\hat{x}(k) - Du(k)]$, l'errore di stima

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$$

Soddisfa l'equazione differenziale

$$e(k+1) = (A - LC)e(k)$$

E quindi $e(k) \to 0$ quando $k \to \infty$ **se e solo** se la matrice $(A - LC)$ è asintoticamente stabile.

Conclusione: il progetto dell'osservatore sarà quindi quello di garantire che $(A - LC)$ sia asintoticamente stabile, **assegnandone gli autovalori attraverso una opportuna scelta di L.**

Ripasso: come fare?

- Il problema è quindi quello di garantire l'asintotica stabilità del sistema errore:

$$e(k+1) = (A - LC)e(k)$$

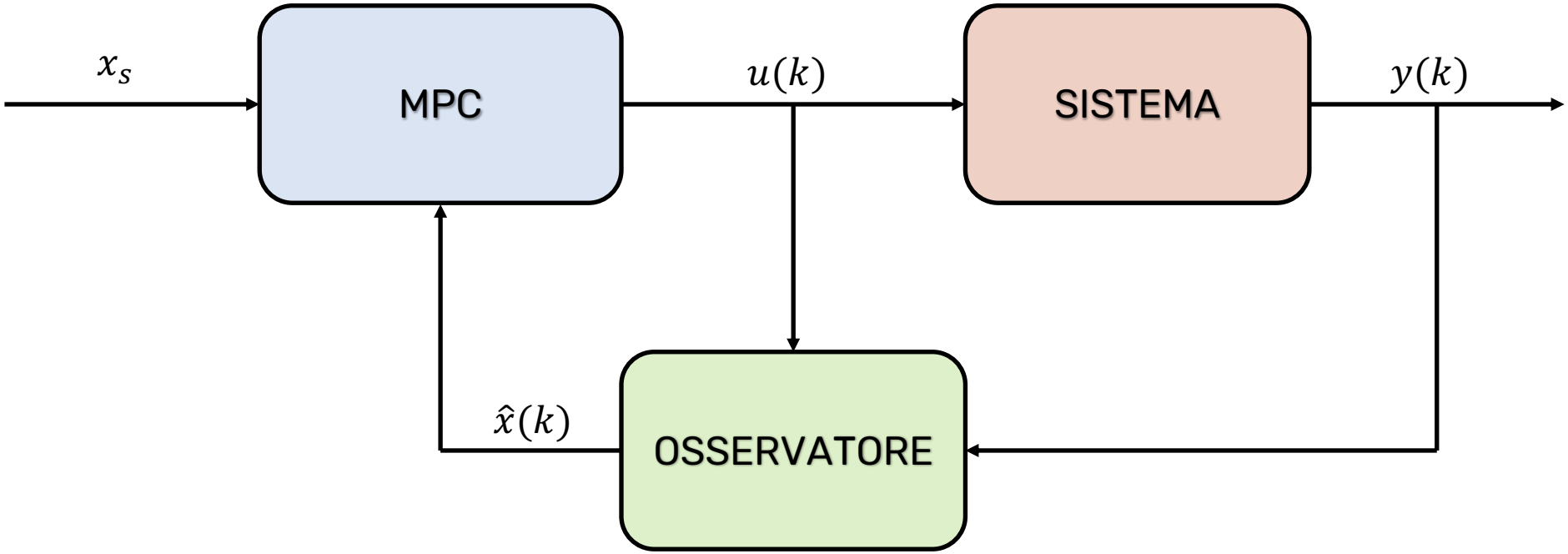
Cioè di garantire che gli autovalori di $(A - LC)$ abbiano modulo minore di uno.

- A questo proposito, si osservi che gli autovalori di $(A - LC)$ sono gli stessi di quelli della matrice $(A' - C'L')$.

Conclusione: il problema di assegnare gli autovalori di $(A' - C'L')$ con un'opportuna scelta di L' coincide con quello di assegnare gli autovalori di $(A - BK)$ con un'opportuna scelta di K.

Possiamo farlo con l'assegnamento degli autovalori o usando LQR.

Schema a blocchi



Come cambia il problema?

Il problema di ottimizzazione sarà quindi dato da

$$\min_{\boldsymbol{u}} J(x(k), u(.))$$

$$s.t.\ x(0) = \hat{x}(k)$$

Condizione iniziale = Feedback di stato

$$x(j+1) = Ax(j) + Bu(j)$$

$$x(j) \in \mathcal{X} \quad u(j) \in \mathcal{U}$$

$$x(N) \in \mathbb{X}_f(x_s)$$

Il problema di ottimizzazione è praticamente lo stesso. L'unica differenza sta nel fatto che il feedback di stato avviene attraverso lo stato stimato (lo stato reale non è accessibile).

Procedimento

1. Verifico che la coppia (A, C) sia osservabile.

2. Progetto L con uno dei metodi visti (assegnamento degli autovalori o LQR).

3. Progetto il regolatore MPC come se lo stato fosse noto.
   - *Il modello è lo stesso: le predizioni saranno sugli stati stimati.*
   - *Le condizioni terminali si calcolano allo stesso modo.*
   - *I vincoli sullo stato vanno soddisfatti dallo stato stimato.*

4. Metto tutto nello schema a blocchi visto prima.

Esempio

Si consideri il sistema precedente: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vincoli sullo stato e sugli ingressi: $x \in \mathcal{X}$ dato da $\begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix} \leq x \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}, -0.5 \leq u \leq 0.5$

Supponiamo lo stato del sistema non accessibile

Costruiamo un MPC per regolare il sistema al setpoint $x_s = (4,0)$ e $u_s = 0$.

Manteniamo il setup precedente: $\mathrm{Q} = I,\ R = 1, N = 5$. Con questa scelta di matrici avevamo ottenuto

$$K = \begin{bmatrix} 0.4345 & 1.0285 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 2.3671 & 1.1180 \\ 1.1180 & 2.5875 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[K, P] = dlqr(A, B, Q, R)}$$

Esempio

Verifichiamo l'osservabilità di (A, C):

$$obsv(A, C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \det(obsv(A, C)) = 1 \neq 0$$

Il sistema è completamente osservabile.

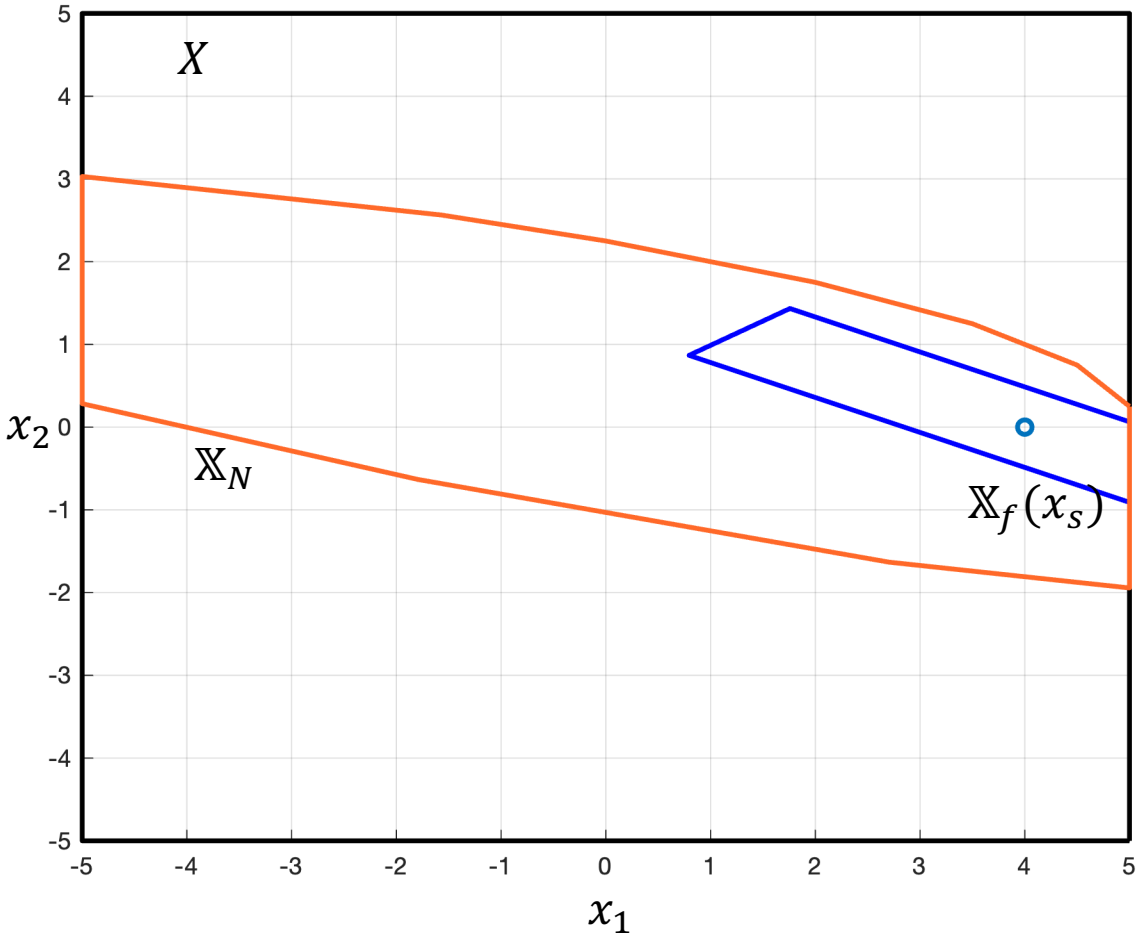
Otteniamo L con $[L', \tilde{P}, \tilde{E}] = dlqr(A', C', eye(2), 100)$

$$L = \begin{bmatrix} 1.2439 \\ 0.4221 \end{bmatrix}, \qquad A - LC = \begin{bmatrix} -0.2439 & 1 \\ -0.4221 & 1 \end{bmatrix}$$

Questo è il guadagno del nostro osservatore.

Esempio

Calcoliamo il terminal invariant set $\mathbb{X}_f(x_s)$



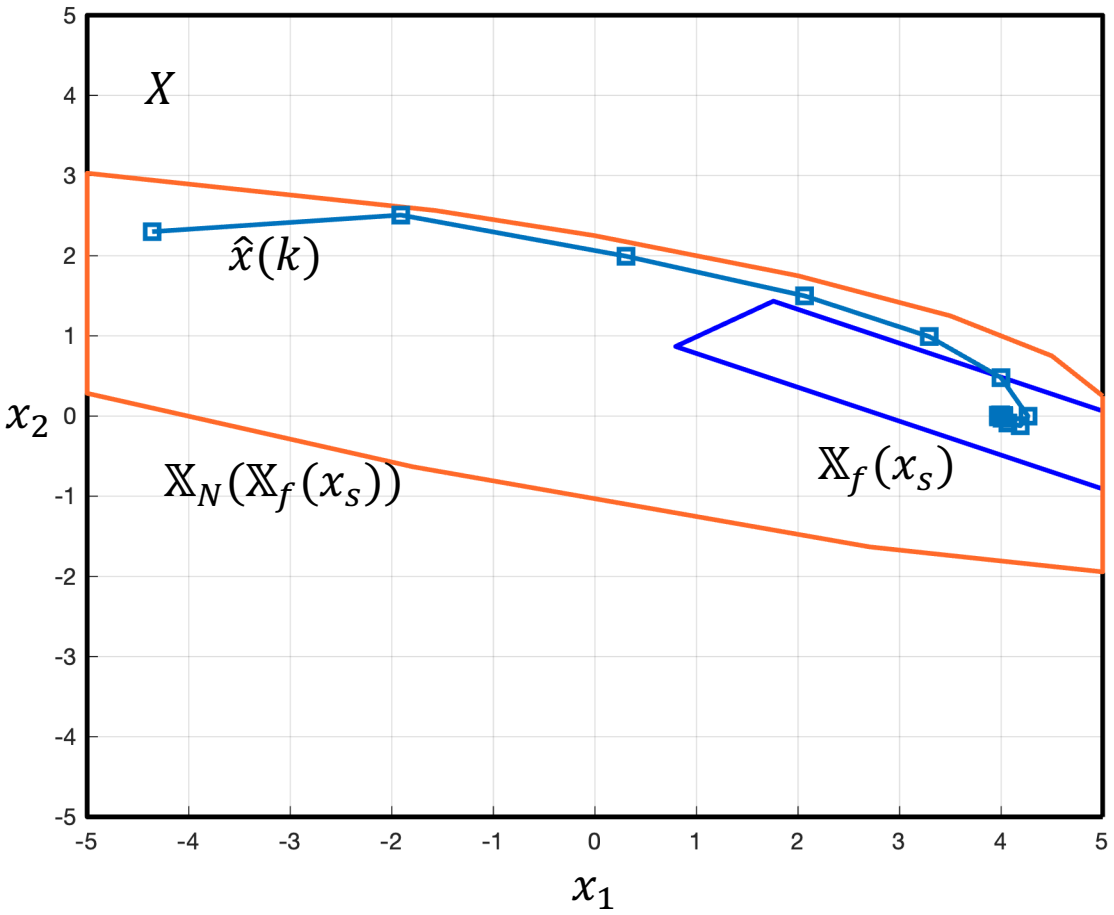
$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.4460 & -0.8950 \\ 0.4460 & 0.8950 \\ -0.9004 & -0.4352 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 5 \\ -1.4467 \\ 2.1216 \\ -2.5638 \end{bmatrix}$$

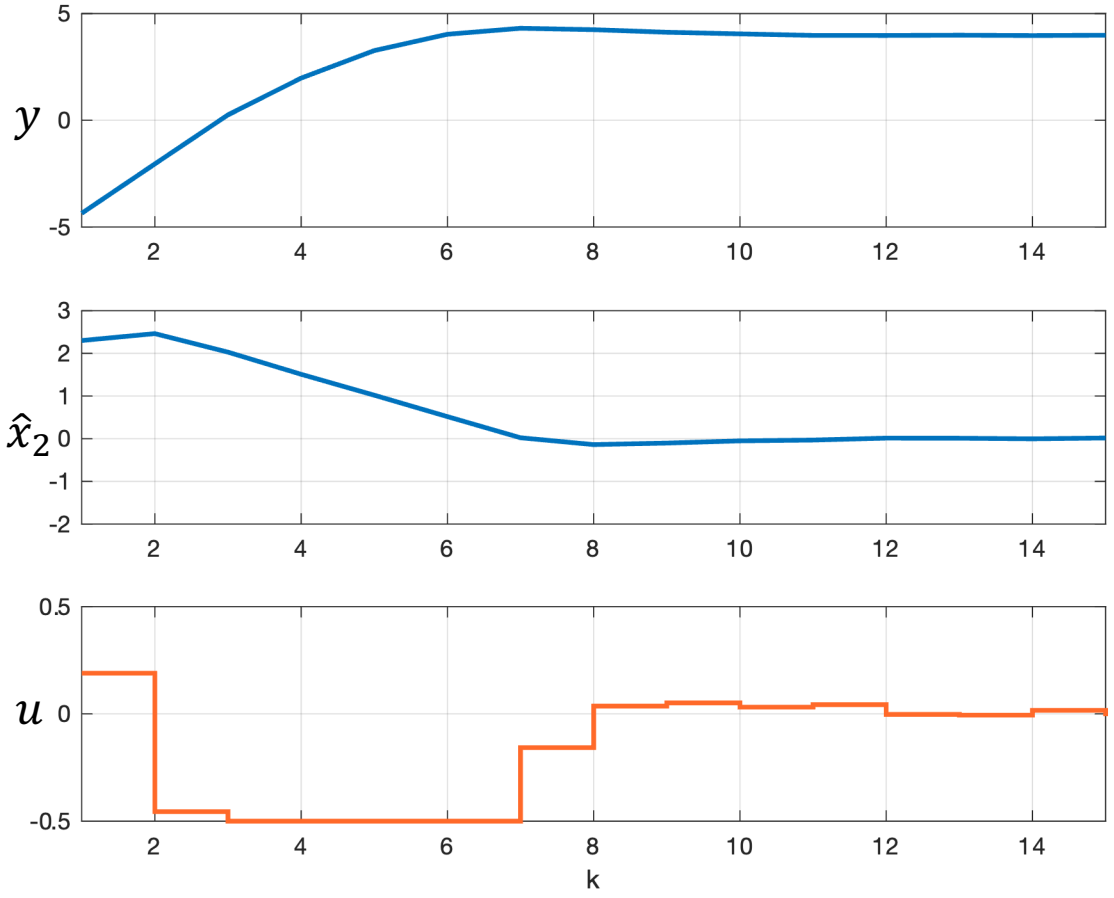
Questo è il maximal invariant set $\mathbb{X}_f(x_s)$, esattamente uguale al precedente.

Anche $\mathbb{X}_N$ è lo stesso.

Esempio

Vediamo il risultato di una simulazione di 15 steps con stato iniziale





Osservazioni

In questa strategia la recursive feasibility a priori non può essere garantita.

Questo perché non conosciamo lo stato reale del sistema, ma solo una sua stima $\hat{x}$, e tale stima potrebbe non rispettare i vincoli sullo stato.

Una possibile soluzione potrebbe essere quella di considerare l'errore di stima come una perturbazione sullo stato del sistema.

$$x(k) = \hat{x}(k) + e(k)$$

Il progetto del regolatore MPC potrebbe quindi essere quello di un regolatore MPC robusto all'incertezza sullo stato $e(k)$.