UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Dipartimento di Ingegneria Gestionale, dell'Informazione e della Produzione

Controllo Avanzato Multivariabile

L8: Regolatore Lineare Quadratico (LQR)

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA INFORMATICA

TEACHERS
Prof. Antonio Ferramosca

PLACE
Università di Bergamo

Contenuti del corso

1. **Sistemi non lineari a tempo discreto**
   - 1.1 Equilibrio
   - 1.2 Stabilità
   - 1.3 Teorema di Lyapunov
2. **Proprietà strutturali dei sistemi lineari multivariabili**
   - 2.1 Controllabilità
   - 2.2 Osservabilità
   - 2.3 Poli e zeri invarianti
3. **Analisi dei sistemi multivariabili**
   - 3.1 Anello aperto
   - 3.2 Anello chiuso
4. **Controllo ottimo**
   - 4.1 Proprietà
   - 4.2 Esempi
   - 4.3 Controllo Lineare Quadratico LQR
   - 4.4 Progetto con osservatore
5. **Controllo predittivo MPC**
   - 5.1 Formulazione
   - 5.2 Proprietà
   - 5.3 Stabilità
   - 5.4 Implementazioni
6. **Esempi di applicazioni**
   - 6.1 Pancreas Artificiale
   - 6.2 Forno SMI

Outline

1. **Regolatore Lineare Quadratico LQR**

Introduzione

Nella scorsa lezione abbiamo studiato il controllo ottimo su orizzonte finito per un generico sistema a tempo discreto e per un funzionale di costo generico.

Abbiamo anche visto la strategia risolutiva, ovvero la programmazione dinamica.

In questa lezione specializzeremo tale tecnica al caso di sistemi LTI. Definiremo anche un funzionale di costo quadratico, ottenendo così quello che è conosciuto come **Linear Quadratic Regulator, LQR.**

Tale strategia verrà poi estesa al caso di un **orizzonte infinito**.

Regolatore LQ

Si assuma che il sistema sia **lineare a tempo discreto**

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

In cui $k_0 = 0$ e $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$.

Si assuma inoltre una **cifra di merito quadratica**, ovvero

$$J(x(0), u(.)) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)'Qx(j) + u(j)'Ru(j) + x(N)'Sx(N)$$

Con $Q = Q' \geq 0, S = S' \geq 0, R = R' > 0$.

Si assuma il costo ottimo all'istante k come $J^*\big(x(k)\big) = x'P(k)x$, con $P(k) = P(k)'$.

Soluzione LQR

Sia il valore ottimo del costo nel generico $k \in [0, N]$:

$$J^*\big(x(k)\big) = \min_{u \in [k, N-1]} J(x(k), u(.)) = \sum_{j=k}^{N-1} x(j)'Qx(j) + u(j)'Ru(j) + x(N)'Sx(N)$$

1. $J^*\big(x(k)\big)$ e $J(x(k), u(.))$ dipendono dal valore corrente dello stato, $x(k)$.
2. $J(x(k), u(.))$ dipende da $u(.)$ mentre $J^*\big(x(k)\big)$ no, in quanto u è fissato dalla soluzione del problema di minimizzazione (che a sua volta dipende da $x(k)$).

Applicando il principio di ottimalità di Bellman possiamo anche scrivere:

$$J^*\big(x(k)\big) = \min_{u(k)} \left\{ l\big(x(k), u(k)\big) + J^*\big(x(k+1)\big) \right\}$$

Soluzione LQR

$$J^*\big(x(k)\big) = \min_{u(k)}\{l\big(x(k), u(k)\big) + J^*\big(x(k+1)\big)\}$$

In parole povere: ***il costo dello spostamento all'istante k è uguale al costo dello spostamento all'istante $k+1$, più il costo di muoversi da k a $k+1$***

In base alle ipotesi fatte:

$$J^*\big(x(k)\big) = \min_{u(k)}\{x(k)'Qx(k) + u(k)'Ru(k) + x(k+1)'P(k+1)x(k+1)\}$$

Sviluppando

$$\begin{aligned} J^*\big(x(k)\big) &= x(k)'Qx(k) + u(k)'Ru(k) + x(k+1)'P(k+1)x(k+1) \\ &= x(k)'Qx(k) + u(k)'Ru(k) + \big(Ax(k) + Bu(k)\big)'P(k+1)\big(Ax(k) + Bu(k)\big) \\ &= x(k)'(\mathrm{Q} + \mathrm{A}'\mathrm{P}(\mathrm{k}+1)\mathrm{A})x(k) + u(k)'(R + B'P(k+1)B)u(k) + 2x(k)'A'P(k+1)Bu(k) \end{aligned}$$

Soluzione LQR

Il minimo si ottiene derivando rispetto a $u(k)$ e uguagliando a zero

$$\frac{\partial J \quad (x(k))}{\partial u(k)} = 2u(k)'(R + B'P(k+1)B) + 2x(k)'A'P(k+1)B = 0$$

Da cui

$$\begin{aligned} u(k) &= -((R + B'P(k+1)B))^{-1}B'P(k+1)Ax(k) \\ &= -K(k)x(k) \end{aligned}$$

Dove $\quad K(k) = -((R + B'P(k+1)B)')^{-1}B'P(k+1)A'$

Sostituendo il valore di $u(k)$ nell'eq. di Bellman (con $J^*(x(k)) = x(k)'P(k)x(k)$)

$$\begin{aligned} x(k)'P(k)x(k) = x(k)'&(\mathrm{Q} + \mathrm{A'P(k+1)A})x(k) \\ &+x(k)'A'P(k+1)B(R + B'P(k+1)B)^{-1}B'P(k+1)Ax(k) \\ &-2x(k)'A'P(k+1)B(R + B'P(k+1)B)^{-1}B'P(k+1)Ax(k) \end{aligned}$$

Soluzione LQR

Ovvero

$$x(k)'P(k)x(k) = x(k)'[(\mathrm{Q} + \mathrm{A}'\mathrm{P}(\mathrm{k}+1)\mathrm{A}) - A'P(k+1)B(R + B'P(k+1)B)^{-1}B'P(k+1)A]x(k)$$

Da qui si ricava **l'eq. di Riccati** per l'update di $P(k)$

$$P(k) = (\mathrm{Q} + \mathrm{A}'P(k+1)\mathrm{A}) - A'P(k+1)B(R + B'P(k+1)B)^{-1}B'P(k+1)A$$

Con condizione iniziale $P(N) = S$, e la legge di controllo ottima

$$u(k) = -K(k)x(k)$$

$$K(k) = (R + B'P(k+1)B))^{-1}B'P(k+1)A$$

Osservazioni

1. La risoluzione a ritroso parte dalla condizione iniziale $P(N) = S$.

2. La matrice $P(k)$ per la simmetria dell'equazione di Riccati e per l'inizializzazione scelta, è sempre definita non-negativa e sempre simmetrica.

3. La legge di controllo

$$u(k) = -K(k)x(k)$$

è variante nel tempo e definita nell'intervallo $[0, N-1]$. Tuttavia per calcolare il guadagno $K(k)$ non è necessario conoscere lo stato all'istante k, e per tanto può essere fatto a priori.

LQ su orizzonte infinito

Da un punto di vista pratico non è molto comodo avere a che fare con una legge tempo variante definita in un intervallo di tempo finito.

Per ottenere una legge invariante, si formula il **controllo ottimo LQ su orizzonte infinito**, imponendo $N \to \infty$

La cifra di merito diventa:

$$J(x(0), u(.)) = \sum_{j=0}^{\infty} x(j)'Qx(j) + u(j)'Ru(j)$$

Con $S \to 0$, quando $N \to \infty$ (asintoticamente $x(N) \to 0$ quando $N \to \infty$).

LQ su orizzonte infinito

<u>Teorema</u>: Se la coppia (A, B) è raggiungibile, e $Q > 0$,

1. La soluzione dell'equazione di Riccati con condizione iniziale $P(N) = 0$ tende per $N \to \infty$ all'**unica** soluzione costante P **dell'equazione stazionaria di Riccati**

$$P = A'PA + Q - A'PB(R + B'PB)^{-1}B'PA$$

2. La legge di controllo ottima è:

$$u(k) = -Kx(k)$$

Con $K = (R + B'PB)^{-1}B'PA$.

3. Il sistema in anello chiuso

$$x(k+1) = (A - BK)x(k)$$

È asintoticamente stabile.

Osservazioni

1. La legge di controllo ottenuta è lineare e invariante nel tempo.
2. La soluzione stazionaria di Riccati si può calcolare con algoritmi numerici appositi.
3. Il sistema in anello chiuso diventa:
$$x(k+1) = (A - BK)x(k)$$
4. In particolare, in Matlab, possiamo usare la funzione:
$$[K, P, E] = dlqr(A, B, Q, R)$$

Dove E contiene gli autovalori del sistema in anello chiuso.

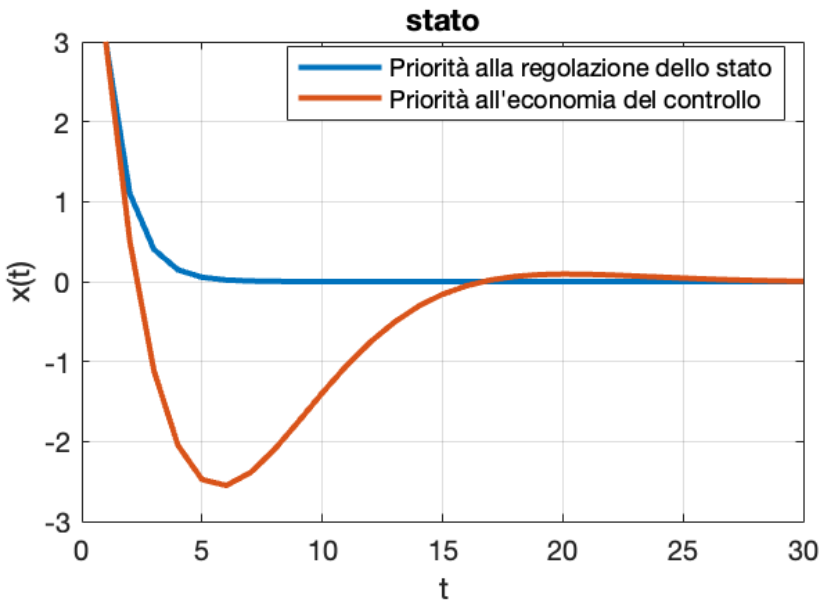
È un metodo universale e ottimo per assegnare gli autovalori in anello chiuso!

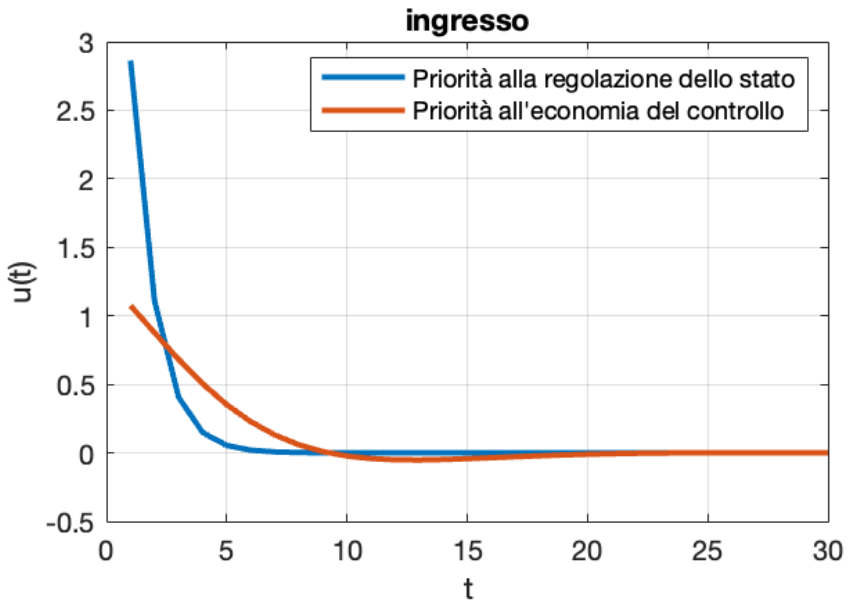
Progettazione

In Matlab, possiamo usare la funzione:

$$[K, P, E] = dlqr(A, B, Q, R)$$

- **Performance in anello chiuso dipende solo dalla scelta delle matrici Q e R.**





$Q \gg R$: **regolazione veloce, controllo aggressivo**

$Q \ll R$: **regolazione lenta, controllo suave**

Punto chiave: quello che conta è il rapporto $\frac{Q}{R}$

Esempio

Si consideri il precedente sistema descritto dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 1 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Si assegnino gli autovalori in anello chiuso in forma ottima mediante la progettazione di un regolatore LQR.

1. Proviamo prima con la scelta $Q = I$ e $R = 1$

$$[K, P, E] = dlqr(A, B, eye(2), 1)$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.3375 & 0.5953 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 1.2825 & 0.3639 \\ 0.3639 & 1.5651 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 0.1824 + i0.1839 \\ 0.1824 + i0.1839 \end{bmatrix}$$

Il guadagno K produce una sistema in anello chiuso asintoticamente stabile (E contiene gli autovalori in anello chiuso). Il controllo è inoltre ottimo per definizione.

Esempio

Vediamo cosa cambia modificando Q e R:

2. Proviamo prima con la scelta $Q = 1000I$ e $R = 1$

$$[K, P, E] = lqr(A, B, 1000 * eye(2), 1)$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.5577 & 0.9183 \end{bmatrix}, \qquad P = 10^3 \begin{bmatrix} 1.0984 & 0.0566 \\ 0.0566 & 1.0329 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} -0.0084 + i0.0088 \\ -0.0084 + i0.0088 \end{bmatrix}$$

3. Proviamo prima con la scelta $Q = I$ e $R = 1000$

$$[K, P, E] = lqr(A, B, eye(2), 1000)$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.0020 & 0.0040 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 1.9532 & 1.7208 \\ 1.7208 & 4.3625 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 0.6956 \\ 0.3005 \end{bmatrix}$$

Esempio

2. Scelta $Q = 1000I$ e $R = 1$

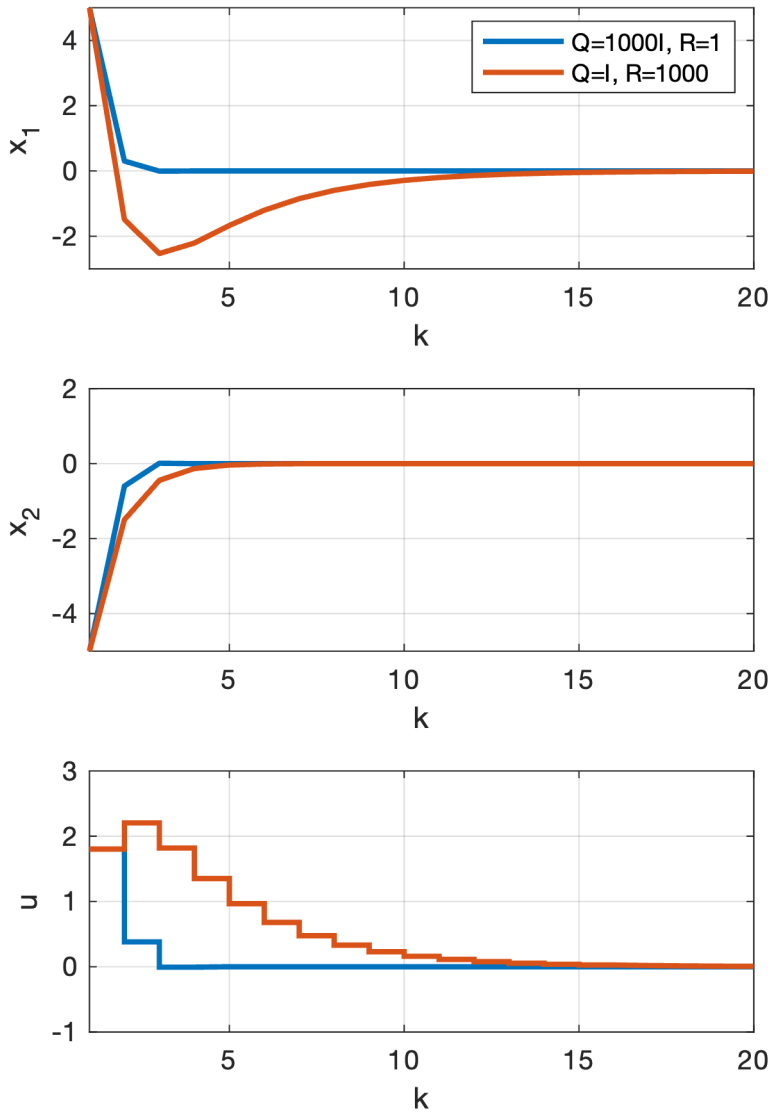
$$K = [0.5577 \quad 0.9183], \qquad E = \begin{bmatrix} -0.0084 + i0.0088 \\ -0.0084 + i0.0088 \end{bmatrix}$$

3. Scelta $Q = I$ e $R = 1000$

$$K = [0.0020 \quad 0.0040], \qquad E = \begin{bmatrix} 0.6956 \\ 0.3005 \end{bmatrix}$$

- Nel primo caso il controllo $u(k) = -Kx(k)$ è più aggressivo e la regolazione più veloce.

- Nel secondo caso $K \approx 0$ (gli autovalori sono infatti prossimi a quelli dell'anello aperto).



Esempio 2

Proviamo a calcolar un LQR su orizzonte finito, considerando lo stesso sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 1 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Si assuma $N = 10$ e $P(N) = I$. Siano inoltre $Q = I$ e $R = 100$.

Il guadano K all'istante $k=9$ sará

$$K(9) = ((R + B'P(10)B)')^{-1}B'P(10)A'$$

$$= [0.3111 \quad 0.5111]$$

L'update della matrice P è invece:

$$P(9) = (\mathrm{Q} + \mathrm{A}'P(10)\mathrm{A}) - A'P(10)B(R + B'P(10)B)^{-1}B'P(10)A$$

$$= \begin{bmatrix} 100.2722 & 0.3422 \\ 0.3422 & 100.5022 \end{bmatrix}$$

Esempio 2

- Alla seguente iterazione:

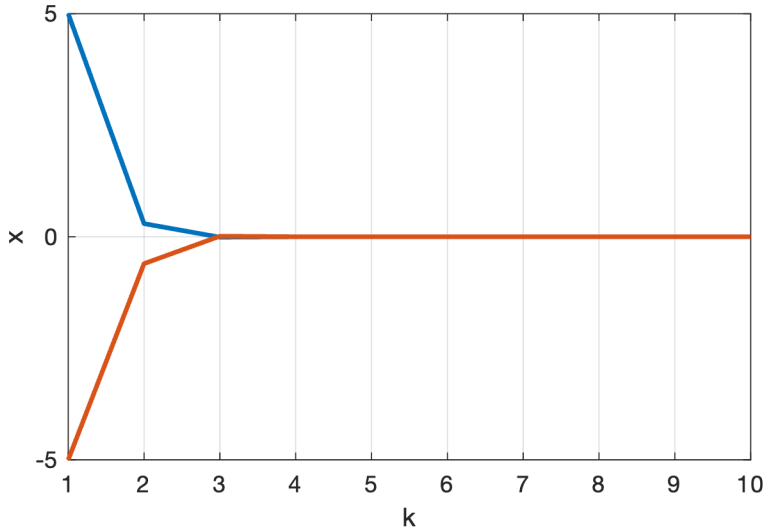
$$K(8) = ((R + B'P(9)B)')^{-1}B'P(9)A'$$
$$= [0.5548 \quad 0.9123]$$

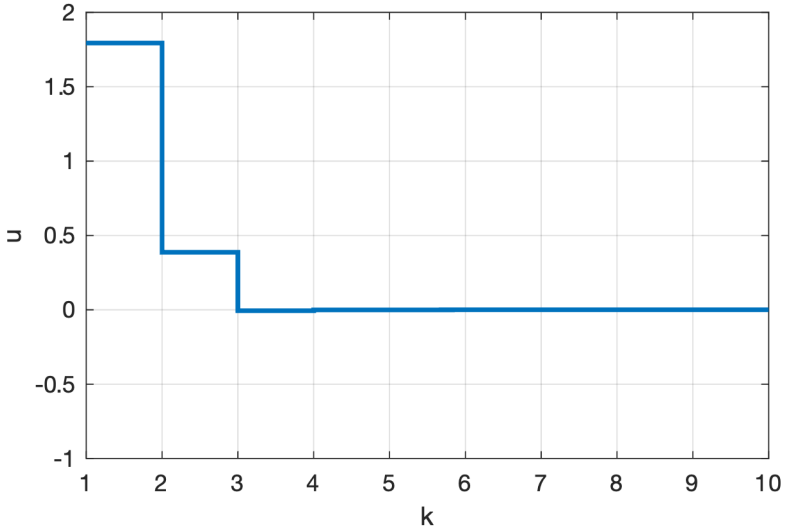
$$P(8) = (\mathrm{Q} + \mathrm{A}'P(9)\mathrm{A}) - A'P(9)B(R + B'P(9)B)^{-1}B'P(9)A$$
$$= \begin{bmatrix} 110.1280 & 6.1203 \\ 6.1203 & 104.0447 \end{bmatrix}$$

- Iterando fino a k=0:

$$K(0) = ((R + B'P(1)B)')^{-1}B'P(1)A'$$
$$= [0.5531 \quad 0.9118]$$

$$P(0) = (\mathrm{Q} + \mathrm{A}'P(1)\mathrm{A}) - A'P(1)B(R + B'P(1)B)^{-1}B'P(1)A$$
$$= \begin{bmatrix} 110.1425 & 6.1276 \\ 6.1276 & 104.0486 \end{bmatrix}$$





Esempio 3

Si consideri il precedente sistema descritto dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.05 \\ 0.05 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.005 \\ 0.002 & 0.1 \\ 0.005 & 0.005 \end{bmatrix}$$

Si assegnino gli autovalori in anello chiuso in forma ottima mediante la progettazione di un regolatore LQR.

Proviamo prima con la scelta $Q = 10I$ e $R = I$

$$[K, P, E] = dlqr(A, B, 10 * eye(3), I)$$

$$K = \begin{bmatrix} 3.2630 & 0.9900 & 2.3841 \\ 1.1042 & 1.6314 & 2.5091 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 44.2371 & 11.5241 & 29.6401 \\ 11.5241 & 23.5048 & 25.5485 \\ 29.6401 & 25.5485 & 117.4207 \end{bmatrix},$$

Il guadagno K produce una sistema in anello chiuso asintoticamente stabile:

$$E = [0.8781 \quad 0.7211 \quad 0.5795]$$

LQR per tracking

Come progettare il regolatore se il set-point è uno stato diverso dall'origine?

Si consideri il solito sistema lineare a tempo discreto

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

In cui $k_0 = 0$ e $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$. Lo stato si suppone accessibile. Sia (A, B) ***raggiungibile***.

Obiettivo: Si cerca il segnale ottimo di ingressi

$$u(k), k \in [0, N-1]$$

Che permette allo stato del sistema di inseguire un set-point desiderato dato dal punto d'equilibrio (x_s, u_s) e assegni in forma ottima gli autovalori.

LQ su orizzonte infinito

Sappiamo risolvere questo problema!

L'obiettivo di inseguire un set-point equivale a regolare a zero l'errore di tracking

$$e(k) = x(k) - x_s$$

La cifra di merito diventa:

$$J(x(0), u(.)) = \sum_{j=0}^{\infty} ((x(j) - x_s)' Q (x(j) - x_s) + (u(j) - u_s)' R (u(j) - u_s))$$

La legge di controllo asintotica è in questo caso:

$$(u(k) - u_s) = -((R + B'PB))^{-1} B'PA(x(k) - x_s) = -K(x(k) - x_s)$$

Ovvero:

$$u(k) = -K(x(k) - x_s) + u_s$$

Esempio

Si il precedente sistema descritto dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 1 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Si progetti un regolatore LQR a tempo infinito per inseguire il set-point dato dall'ingresso di equilibrio $u_s = 2$.

1. Per prima cosa calcoliamo lo stato d'equilibrio generato da $u_s = 2$.

$$x_s = Ax_s + Bu_s \Longrightarrow x_s = (I - A)^{-1}Bu_s$$

Da cui $x_s = (11.4286,\ 1.4286)$.

2. Calcoliamo un LQR con con la scelta $Q = 100I$ e $R = 1$

$$[K, P, E] = dlqr(A, B, 100 * eye(2), 1)$$

Da cui

$$K = [0.5531 \quad 0.9118]$$

Esempio

3. La legge di controllo

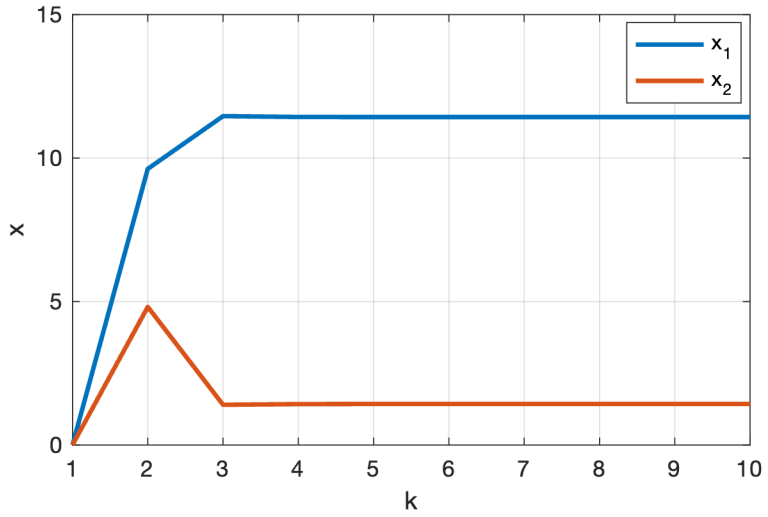
$$u(k) = -K(x(k) - x_s) + u_s$$

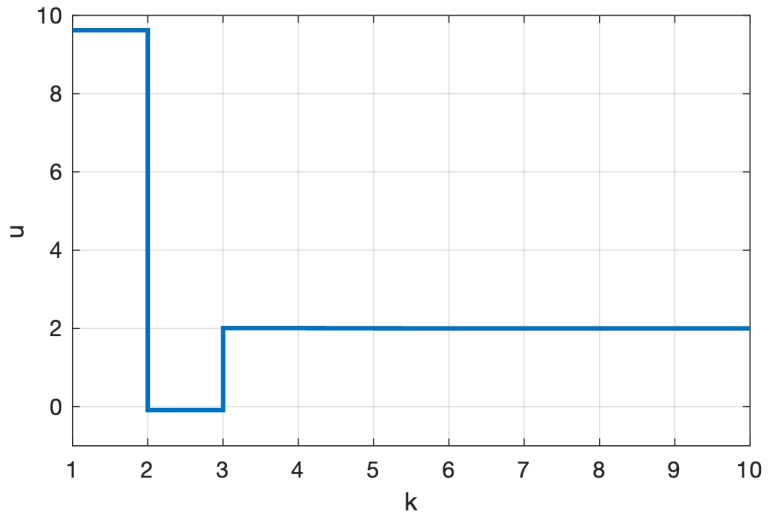
diventa quindi

$$u(k) = -[0.5531 \quad 0.9118]\left(x(k) - \begin{bmatrix} 11.4286 \\ 1.4286 \end{bmatrix}\right) + 2$$

Il sistema converge al set-point desiderato e l'ingresso asintotico è esattamente

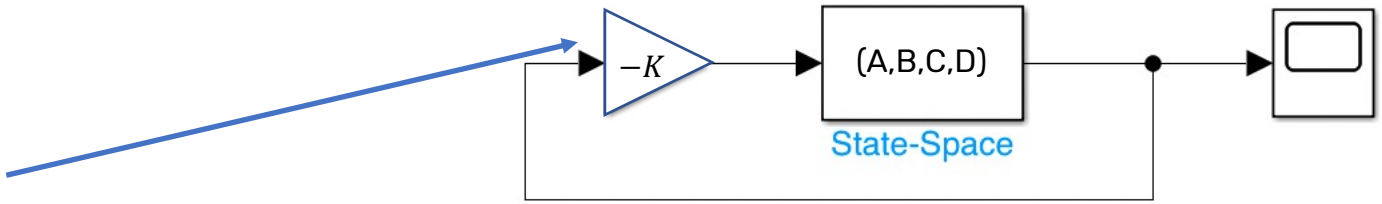
$$u(k) = u_s = 2$$



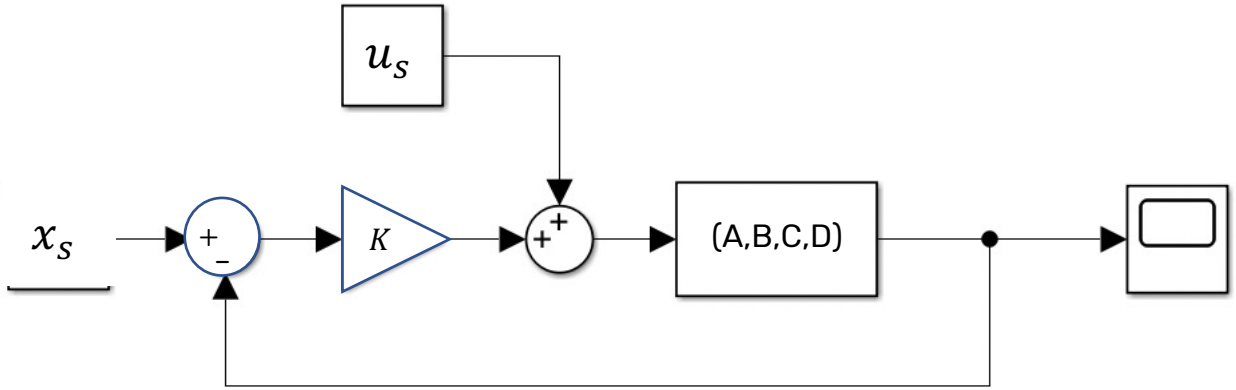


Esempio

Realizzazione in Simulink degli esempi visti



$$K = [0.5531 \quad 0.9118]$$



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Dipartimento di Ingegneria Gestionale, dell'Informazione e della Produzione