UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Dipartimento di Ingegneria Gestionale, dell'Informazione e della Produzione

# Controllo Avanzato Multivariabile

## L5: Analisi dei sistemi multivariabili

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA INFORMATICA

TEACHERS
Prof. Antonio Ferramosca

PLACE
Università di Bergamo

# Contenuti del corso

1. **Sistemi non lineari a tempo discreto**
   - 1.1 Equilibrio
   - 1.2 Stabilità
   - 1.3 Teorema di Lyapunov
2. **Proprietà strutturali dei sistemi lineari multivariabili**
   - 2.1 Controllabilità
   - 2.2 Osservabilità
   - 2.3 Poli e zeri invarianti
3. **Analisi dei sistemi multivariabili**
   - 3.1 Anello aperto
   - 3.2 Anello chiuso
4. **Controllo ottimo**
   - 4.1 Controllo Lineare Quadratico LQR
   - 4.2 Proprietà
   - 4.3 Esempi
5. **Controllo predittivo MPC**
   - 5.1 Formulazione
   - 5.2 Proprietà
   - 5.3 Stabilità
   - 5.4 Implementazioni
6. **Esempi di applicazioni**
   - 6.1 Pancreas Artificiale
   - 6.2 Forno SMI

# Outline

1. Schemi a blocchi
2. Analisi in anello aperto
3. Analisi in anello chiuso

# Outline

1. **Schemi a blocchi**
2. Analisi in anello aperto
3. Analisi in anello chiuso

# Introduzione

La rappresentazione in f.d.t. di un sistema MIMO, $Y(z) = G(z)U(z)$ è data da:

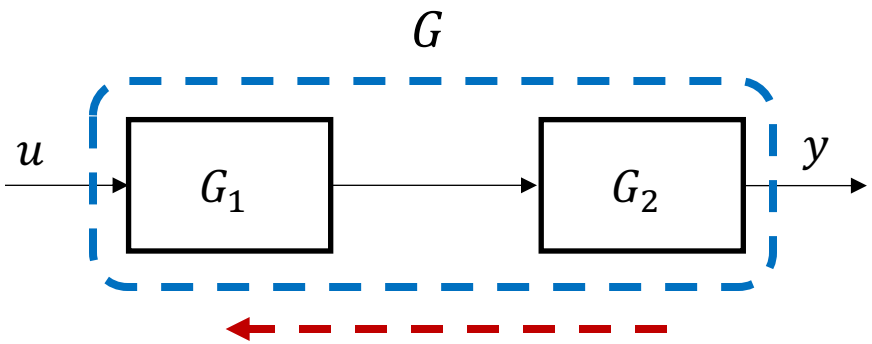
$$Y(z) = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_1(z) \\ \vdots \\ Y_p(z) \end{bmatrix}}_{p\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_{11}(z) & \dots & G_{1m}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{p1}(z) & \dots & G_{pm}(z) \end{bmatrix}}_{p\times m} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1(z) \\ \vdots \\ U_m(z) \end{bmatrix}}_{m\times 1}$$

- Un piccolo cambio nell'ingresso $U_1(z)$ avrà effetto su tutte le uscite.
- Si dice che input e output sono accoppiati.

**Nota:** se $G$ e $K$ sono due matrici, si ricordi che $GK \neq KG$

# Diagrammi a blocchi

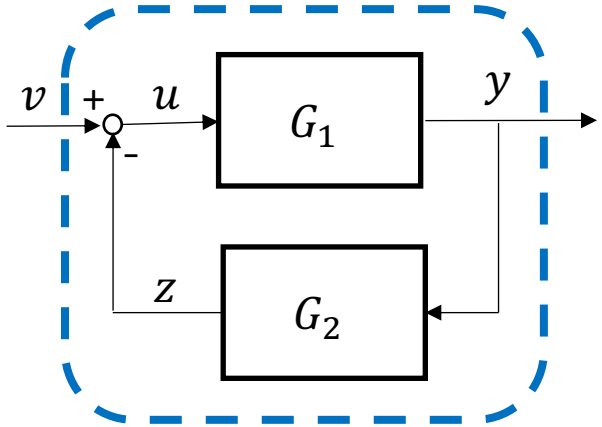
Si consideri il seguente diagramma a blocchi:




- La f.d.t. del sistema in cascata è: $G = G_2 G_1$
- L'ordine di questa moltiplicazione è fondamentale perché si tratta di matrici.
- Si noti che l'ordine della moltiplicazione è inverso rispetto a come appaiano nello schema a blocchi.

# Diagrammi a blocchi

Si consideri il seguente schema a blocchi in retroazione negativa:




- $y = G_1 u$
- $u = v - z$
- $z = G_2 y$

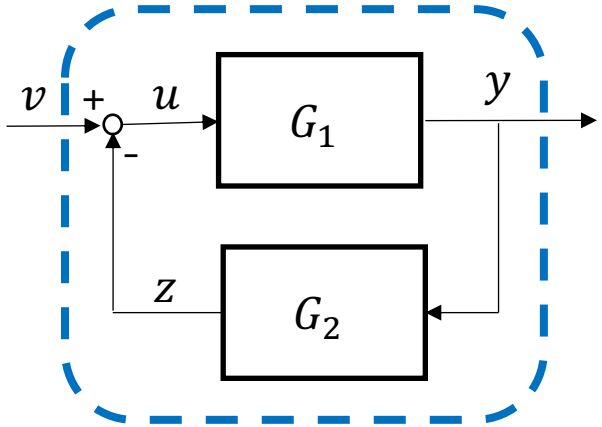
$$y = G_1(v - G_2 y)$$

$$(I + G_1 G_2) y = G_1 v$$

$$y = (I + G_1 G_2)^{-1} G_1 v$$

# Diagrammi a blocchi

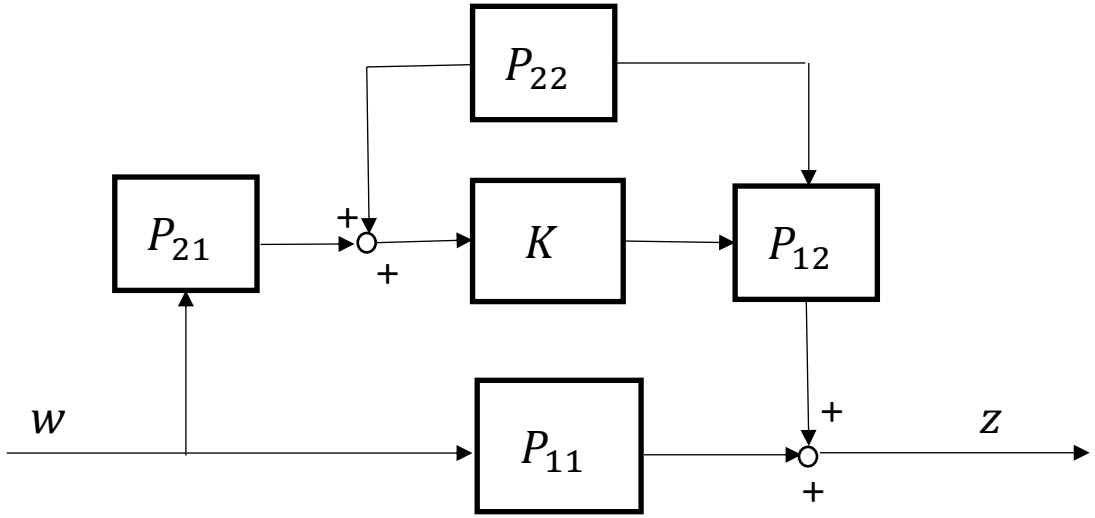
Si consideri il seguente schema a blocchi in retroazione negativa:




- $u = (I + L)^{-1}v$, con $\mathrm{L} = G_2 G_1$
- **Regola**: *si parte dall'uscita e si scrivono i blocchi così come appaiono spostandosi verso l'ingresso in senso apposto al verso delle frecce. Quando si esce da un anello chiuso, si scriverà* $(I - L)^{-1}$ *per feedback positivi, e* $(I + L)^{-1}$ *per feedback negativi.*

# Esempio

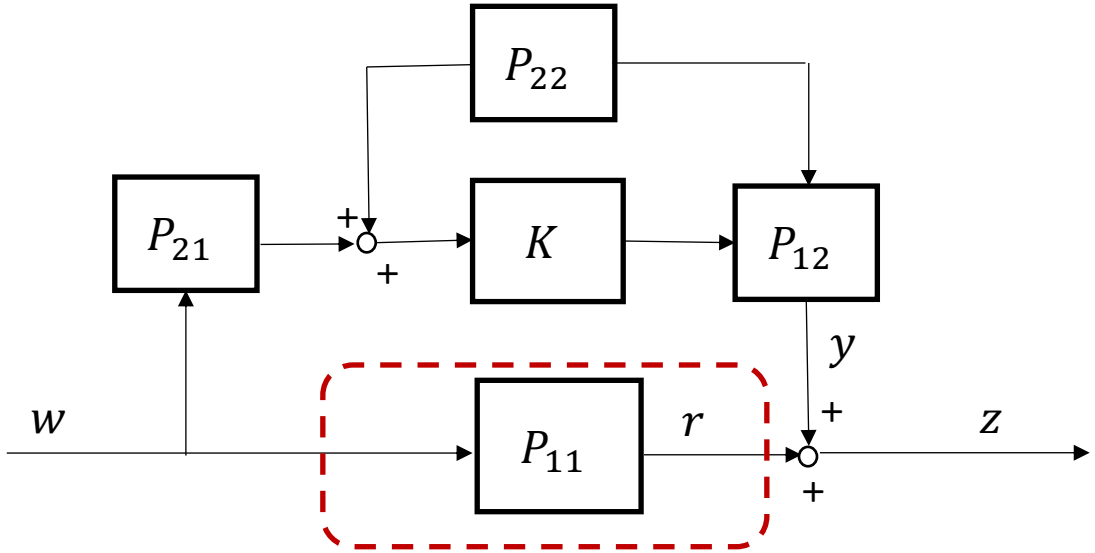
Trovare la funzione di trasferimento del seguente schema a blocchi :




È: $z = (P_{11} + P_{12}K(I - KP_{22})^{-1}\, P_{21})w$

# Esempio

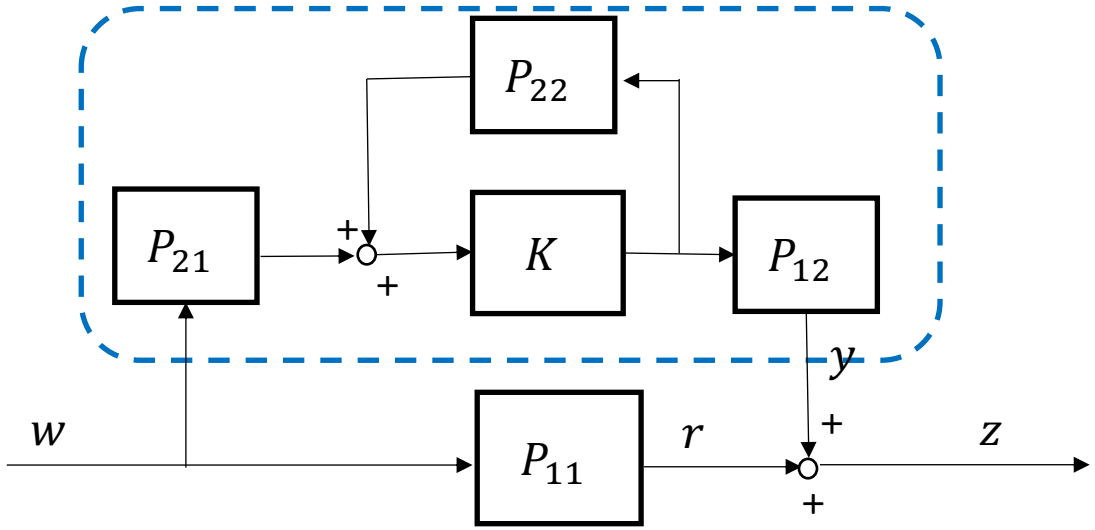
Trovare la funzione di trasferimento del seguente schema a blocchi :




- Innanzitutto notiamo che il segnale $z$ è composto da due parti: $z = r + y$
- Il primo pezzo è facilmente identificabile: $r = P_{11}w$

# Esempio

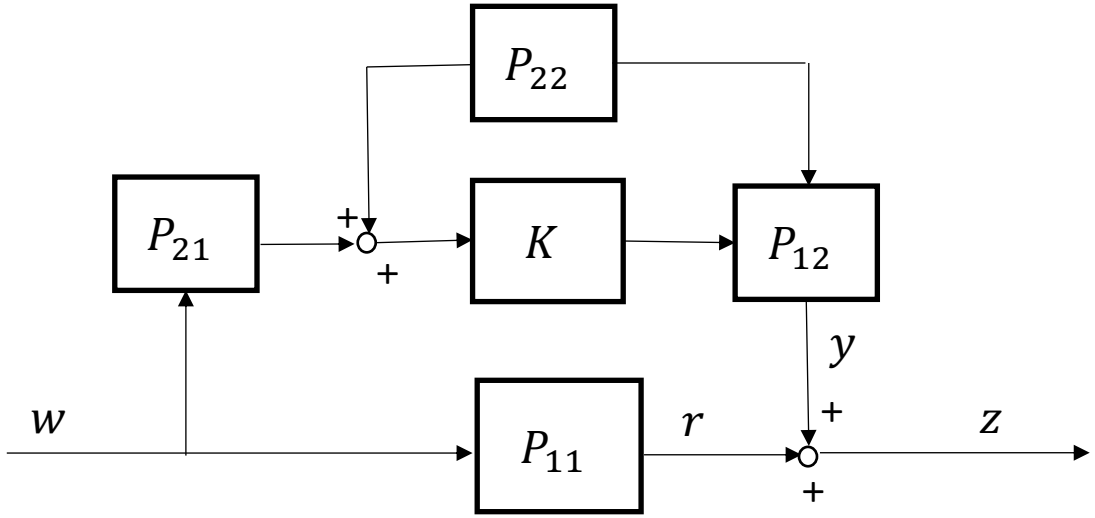
Il secondo pezzo va calcolato con calma




- Muovendoci all'indietro da $y$, troviamo prima $P_{12}$, poi $K$.
- Poi troviamo l'anello con retroazione positiva: $(I - KP_{22})^{-1}$.
- Infine, in uscita dall'anello troviamo $P_{21}$.
- Quindi: $y = P_{12}K(I - KP_{22})^{-1}\, P_{21}w$

# Esempio

Trovare la funzione di trasferimento del seguente schema a blocchi :

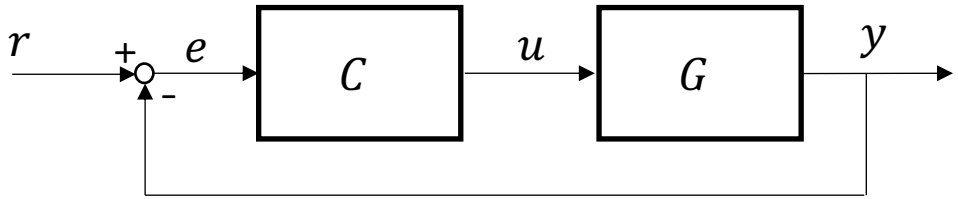



La somma dei due contributi fa:

$$z = r + y = (P_{11} + P_{12}K(I - KP_{22})^{-1}\, P_{21})w$$

# Sistema in retroazione

Si consideri il seguente diagramma a blocchi:




- La **funzione di trasferimento** da $e$ a $y$: $L = GC$
- La f. di **sensitività** (come nei SISO) da $r$ a $e$ è:

$$S = (I + L)^{-1}$$

- La f.d.t. da $r$ a $y$, detta anche **funzione di sensitività complementare** (come nei SISO) è:

$$T = (I + L)^{-1}L$$

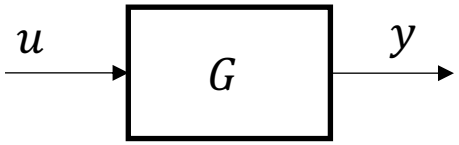
- Anche nel caso dei sistemi MIMO: $S + T = I$

# Outline

1. Schemi a blocchi
2. **Analisi in anello aperto**
3. Analisi in anello chiuso

# Risposta in frequenza

Si voglia studiare la risposta in frequenza del seguente sistema:




L'equazione del sistema si può anche scrivere come: $y(\omega) = G\left(e^{j\omega}\right)u(\omega)$

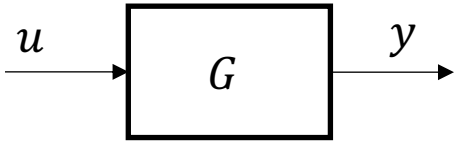
- Nei sistemi SISO il guadagno del sistema è dato da:

$$\frac{|y(\omega)|}{|u(\omega)|} = \frac{|G\left(e^{j\omega}\right)u(\omega)|}{|u(\omega)|} = |G\left(e^{j\omega}\right)|$$

- Il guadagno dipende da $\omega$ ma visto che il sistema è lineare, non dipende dall'entità dell'ingresso, $|u(\omega)|$.

# Risposta in frequenza

Nel caso dei sistemi MIMO la situazione è differente:




Dato che $y(\omega)$ e $u(\omega)$ sono vettori e $G\left(e^{j\omega}\right)$ è una matrice, non possiamo calcolare il modulo ma dobbiamo passare alle norme

- Nei sistemi MIMO il guadagno del sistema è dato da:

$$\frac{||y(\omega)||_2}{||u(\omega)||_2} = \frac{||G\left(e^{j\omega}\right)u(\omega)||_2}{||u(\omega)||_2}$$

- Anche in questo caso, il guadagno dipende da $\omega$, non dipende dall'entità dell'ingresso, $||u(\omega)||_2$, ma **dipende dalla sua direzione.**

# Esempio

- Si considerino i seguenti vettori d'ingresso:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix}, u_4 = \begin{bmatrix} 0.707 \\ -0.707 \end{bmatrix}, u_5 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ -0.8 \end{bmatrix}$$

Tutti con la stessa norma $||u||_2 = 1$, ma sono tutti su direzioni diverse.

- Sia la funzione di trasferimento data da una matrice costante $G = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Le uscite sono quindi:

$$y_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}, y_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, y_3 = \begin{bmatrix} 6.36 \\ 3.54 \end{bmatrix}, y_4 = \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix}, y_5 = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

- I guadagni sono quindi

$$||y_1||_2 = 5.83, ||y_2||_2 = 4.47, ||y_3||_2 = 7.30, ||y_4||_2 = 1, ||y_5||_2 = 0.28$$

Che sono tutti diversi.

# Valori singolari

Il massimo guadagno che può assumere il sistema (quando la direzione degli input varia) è il **massimo valore singolare di $G$**

$$max \frac{||G(e^{j\omega})u(\omega)||_2}{||u(\omega)||_2} = max_{||u(\omega)||_2=1}\left[||G(e^{j\omega})u(\omega)||_2\right] = \bar{\sigma}(G)$$

Mentre il minimo guadagno corrisponde al **minimo valore singolare di $G$**

$$min \frac{||G(e^{j\omega})u(\omega)||_2}{||u(\omega)||_2} = min_{||u(\omega)||_2=1}\left[||G(e^{j\omega})u(\omega)||_2\right] = \underline{\sigma}(G)$$

- In generale valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\underline{\sigma}(G) \leq \frac{||G(e^{j\omega})u(\omega)||_2}{||u(\omega)||_2} \leq \bar{\sigma}(G)$$

# Significato

**Il massimo guadagno che può assumere il sistema è $\bar{\sigma}(G)$**

- Questo vuol dire che esiste un ingresso $\bar{u}$ tale che

$$G\bar{u} = \bar{\sigma}(G)\bar{y}$$

Dove $\bar{y}$ rappresenta l'uscita con la massima amplificazione.

**Allo stesso modo, il minimo guadagno corrisponde è $\underline{\sigma}(G)$**

- Questo vuol dire che esiste un ingresso $\underline{u}$ tale che

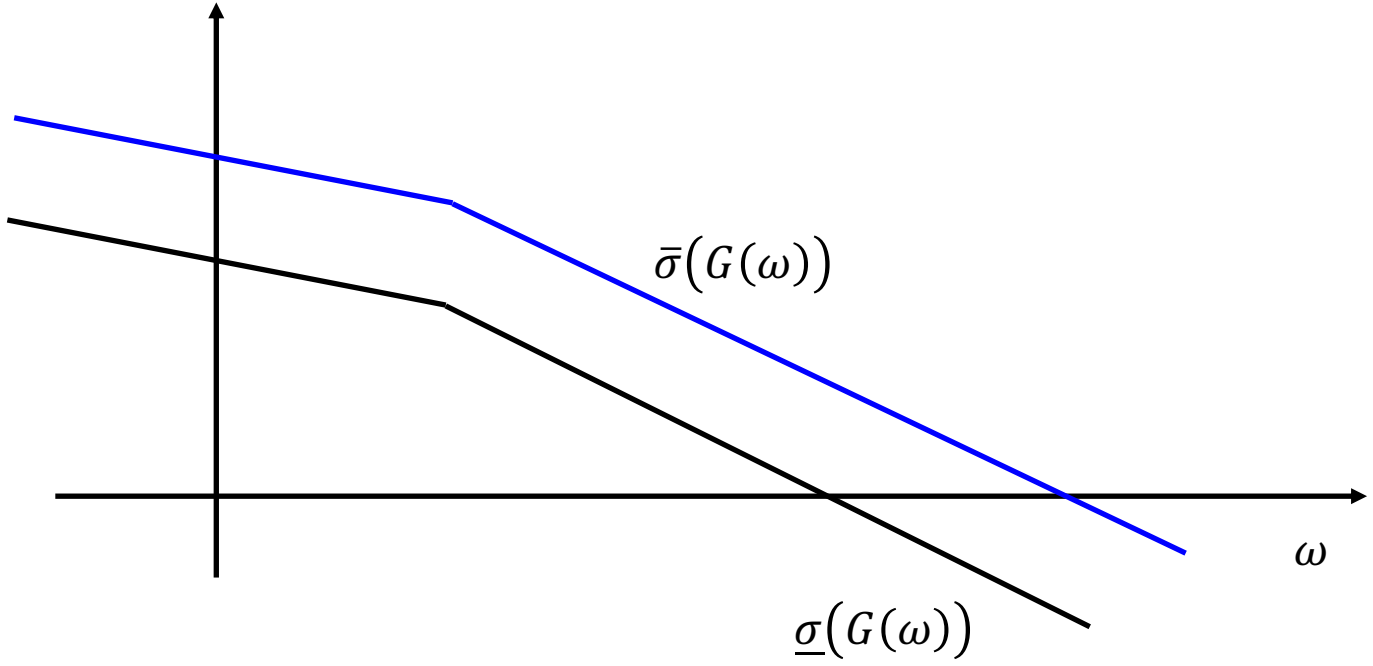
$$G\underline{u} = \underline{\sigma}(G)\underline{y}$$

Dove $\underline{y}$ rappresenta l'uscita con la minima amplificazione.

# Osservazioni

**Il diagramma di $\underline{\sigma}(G(\omega))$ e $\bar{\sigma}(G(\omega))$ in funzione di $\omega$, è un utile strumento per lo studio in frequenza dei sistemi MIMO.**

- Per ottenere **un'uscita piccola (attenuata)** ad una certa frequenza $\bar{\omega}$, indipendentemente dalla direzione degli ingressi, si vorrebbe $\bar{\sigma}(G(\bar{\omega}))$ piccolo.

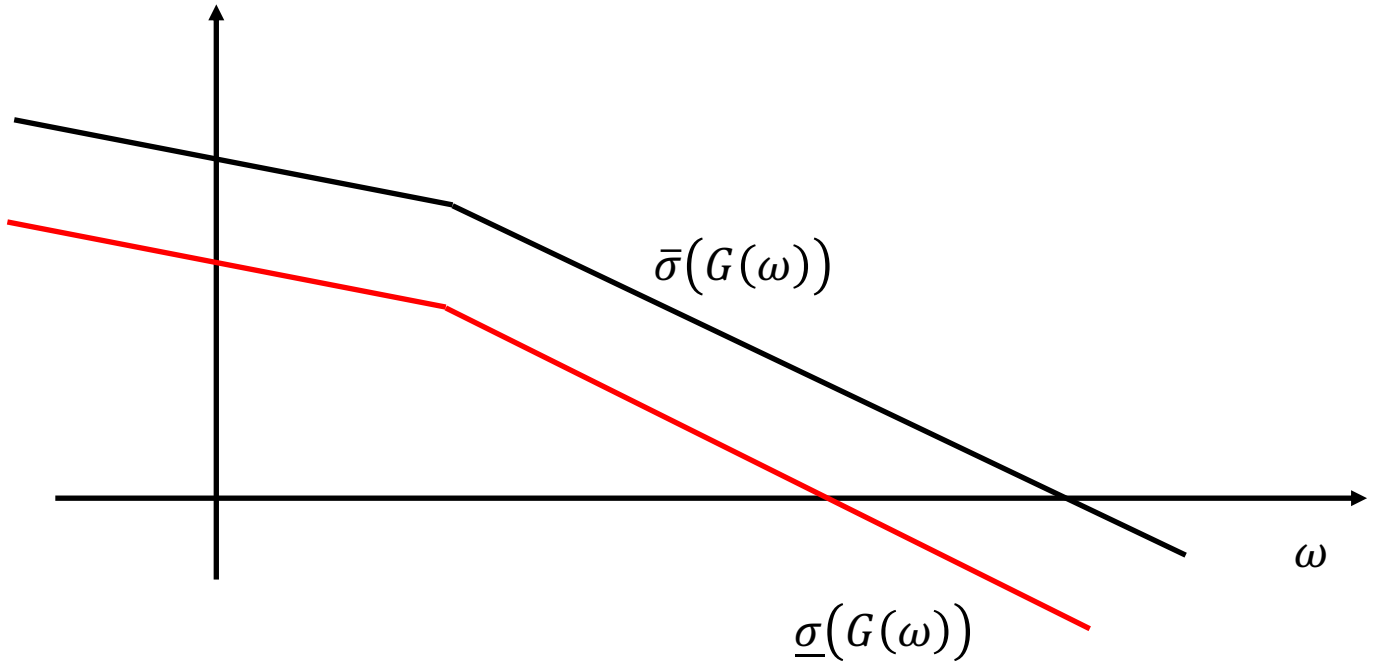



*Nota: Per semplicità di notazione scriverò $G(\omega)$ per indicare $G(z)|_{z=e^{j\omega}} = G(e^{j\omega})$*

# Osservazioni

**Il diagramma di $\underline{\sigma}(G(\omega))$ e $\bar{\sigma}(G(\omega))$ in funzione di $\omega$, è un utile strumento per lo studio in frequenza dei sistemi MIMO.**

- Per ottenere **un'uscita amplificata** ad una certa frequenza $\bar{\omega}$, indipendentemente dalla direzione degli ingressi, si vorrebbe $\underline{\sigma}(G(j\bar{\omega}))$ grande.



# Osservazioni

**Il diagramma di $\underline{\sigma}(G(\omega))$ e $\bar{\sigma}(G(\omega))$ in funzione di $\omega$, è un utile strumento per lo studio in frequenza dei sistemi MIMO.**

- Per ottenere un'uscita piccola (attenuata) ad una certa frequenza $\bar{\omega}$, indipendentemente dalla direzione degli ingressi, si vorrebbe $\bar{\sigma}(G(j\bar{\omega}))$ piccolo.
- Per ottenere un'uscita amplificata ad una certa frequenza $\bar{\omega}$, indipendentemente dalla direzione degli ingressi, si vorrebbe $\underline{\sigma}(G(j\bar{\omega}))$ grande.

**Possiamo definire il numero di condizionamento come**

$$\gamma(G(\omega)) = \frac{\bar{\sigma}(G(\omega))}{\underline{\sigma}(G(\omega))}$$

- Un sistema con $\gamma(G(\omega))$ vicino ad 1 è facile da controllare, perché **non è molto sensibile alla direzione degli ingressi** (massimo e minimo guadagno sono praticamente uguali).
- Se $\gamma(G(\omega))$ è molto grande, il sistema si dice **mal condizionato**.

# Esempio

Nell'esempio precedente con $G = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ abbiamo:

$$\bar{\sigma}(G) = 7.34, \qquad \underline{\sigma}(G) = 0.27, \qquad \gamma(G) = \frac{\bar{\sigma}(G)}{\underline{\sigma}(G)} = 27$$

I guadagni ottenuti

$$||y_1||_2 = 5.83, ||y_2||_2 = 4.47, ||y_3||_2 = 7.30, ||y_4||_2 = 1, ||y_5||_2 = 0.28$$

Rispettano i limiti imposti dal massimo e dal minimo.

***Nota**: i valori singolari di una matrice 2x2 sono dati da*

$$\bar{\sigma}(G) = \sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}}, \underline{\sigma}(G) = \sqrt{\frac{b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}}$$

*Con $b = tr(G^*G)$ e $c = det(G^*G)$. Ricorda che $G^*$ è la trasposta coniugata di G (nel caso di una matrice reale, è la semplice trasposta).*

# Esempio

Nell'esempio precedente con $G = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ abbiamo, usando il comando Matlab:

$$[U, \Sigma, V] = svd(G)$$

Otteniamo:

$$G = U\Sigma V^*$$

Con

$$U = \begin{bmatrix} 0.872 & 0.490 \\ 0.490 & -0.872 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 7.343 & 0 \\ 0 & 0.272 \end{bmatrix}, V^* = \begin{bmatrix} 0.794 & -0.608 \\ 0.608 & 0.794 \end{bmatrix}$$

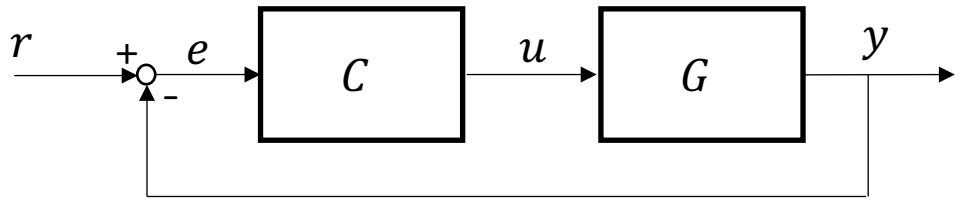
- $\Sigma$ contiene i valori singolari sulla diagonale (ordinati dal maggiore al minore)
- U contiene i vettori di uscita singolari, ovvero le direzioni delle uscite.
- $V$ contiene gli ingressi (vettori colonne) che generano i valori singolari della matrice G, ovvero le direzioni degli ingressi.

# Outline

1. Schemi a blocchi
2. Analisi in anello aperto
3. **Analisi in anello chiuso**

# Valori singolari e performance

L'analisi dei valori singolari è utile anche per analizzare le performance del sistema in anello chiuso.




Ricordiamo che

- La f. di **sensitività** (come nei SISO) è: $S = (I + L)^{-1}$
- La f.d.t. da $r$ a $y$, detta anche **funzione di sensitività complementare** (come nei SISO) è:

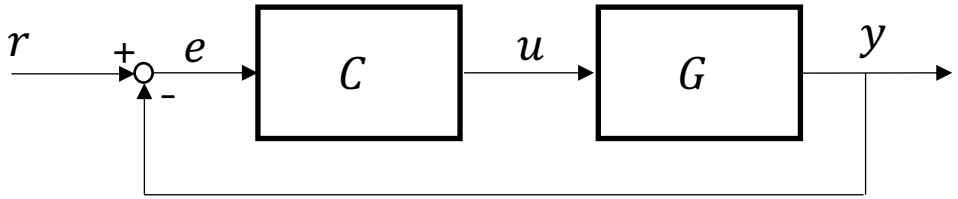
$$T = (I + L)^{-1} L$$

- Inoltre, $T + S = I$

# Valori singolari e performance

Un obiettivo di controllo è sicuramente quello di avere un tracking perfetto. Ovvero $y \to r$ per $k \to \infty$.

La relazione tra $y$ ed $r$ è la **funz. di sensitività complementare**:




$$\boxed{y = Tr}$$

- $y \to r$ implica che $\mathrm{T}(\omega) \approx I$.
- Ma $T(\omega) + S(\omega) = I$. Il che implica che $\mathrm{S}(\omega) \approx 0$.

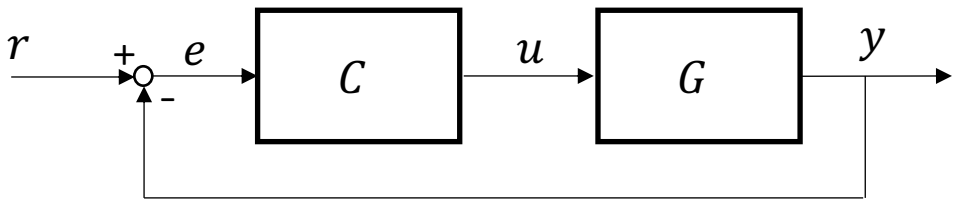
**Dimostreremo ora come $\mathrm{T}(\omega) \approx \mathrm{I}$ è garantito da $\underline{\sigma}\big(\mathrm{L}(\omega)\big) \gg 1$.**

# Valori singolari e performance

La f. di **sensitività** (come nei SISO) è:

$$S = (I + L)^{-1}$$

Essa rappresenta la risposta in anello chiuso dal riferimento $r$ all'errore di trackin $e = r - y$ :




$$\boxed{e = -Sr}$$

Richiedere che $S(\omega) \approx 0$ implica che

$$\frac{||(I + L(\omega))^{-1} r||_2}{||r||_2} \ll 1 \quad \forall r$$

# Valori singolari e performance

Tale condizione è garantita se

$$\bar{\sigma}[(I + L(\omega))^{-1}] = \frac{1}{\underline{\sigma}[(I + L(\omega))]} \ll 1$$

La teoria dei valori singolari ci dice che

$$\max\big(0, \underline{\sigma}(Q) - 1\big) \leq \underline{\sigma}(Q + I) \leq \underline{\sigma}(Q) + 1$$

Da cui

$$\frac{1}{\underline{\sigma}[(I + L(\omega))]} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}\big(L(\omega)\big) - 1}$$

Se avessimo $\underline{\sigma}\big(L(\omega)\big) \gg 1$, allora

$$\bar{\sigma}[(I + L(\omega))^{-1}] \leq \frac{1}{\underline{\sigma}\big(L(\omega)\big)} \ll 1$$

**QED**

# Valori singolari e performance

Per i sistemi SISO sappiamo che l'analisi di $|S(\omega)|$ come funzione della frequenza permette di studiare l'efficienza del controllo, perché

$$\frac{|e(\omega)|}{|r(\omega)|} = |S(\omega)|$$

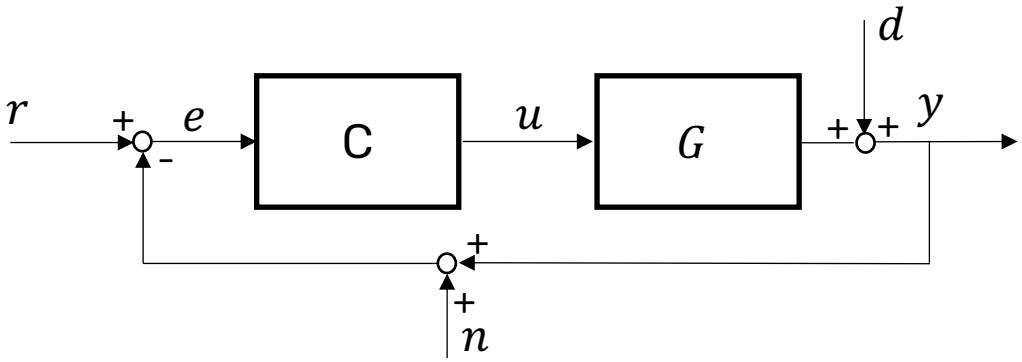
Generalizzando al caso dei sistemi MIMO:

$$\underline{\sigma}(S(\omega)) \leq \frac{||e(\omega)||_2}{||r(\omega)||_2} \leq \bar{\sigma}(S(\omega))$$

- **Dal punto di vista della performance, quello che si desidera è che il rapporto $\frac{||e(\omega)||_2}{||r(\omega)||_2}$ rimanga piccolo per ogni direzione di $r$**, incluso nel peggiore caso, che è dato da $\bar{\sigma}(S(\omega))$
- **I valori singolari di $S(\omega)$ sono piccoli quando il controllo è efficace**.

# Reiezione del disturbo

Supponiamo di avere dei disturbi sull'uscita.




Ricordiamo che

$$Y(z) = T(z)\big(R(z) - N(z)\big) + S(z)D(z)$$

**E' desiderabile che $T(\omega)$ sia piccola quando $N(\omega)$ presenta componenti armoniche significative.**

Ciò avviene tipicamente ad alte frequenze.

# Reiezione del disturbo

Analizziamo questo requisito. Ricordiamo che

$$T(z) = I - S(z) = I - (I + L(z))^{-1}$$

Il teorema dell'inversione di una matrice dice che, date le matrici A,B,C,D di dimensioni opportune con A e C non singolari, si ha che

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(DA^{-1}B + C^{-1})^{-1}DA^{-1}$$

Se consideriamo $A = I, B = I, D = I$ e $C = L(z)$, allora:

$$(I + L(z))^{-1} = I - (I + L(z)^{-1})^{-1}$$

# Reiezione del disturbo

Considernado la definizione di $T(z)$ si ha:

$$T(z) = I - (I + L(z))^{-1} = I - I + (I + L(z)^{-1})^{-1} = (I + L(z)^{-1})^{-1}$$

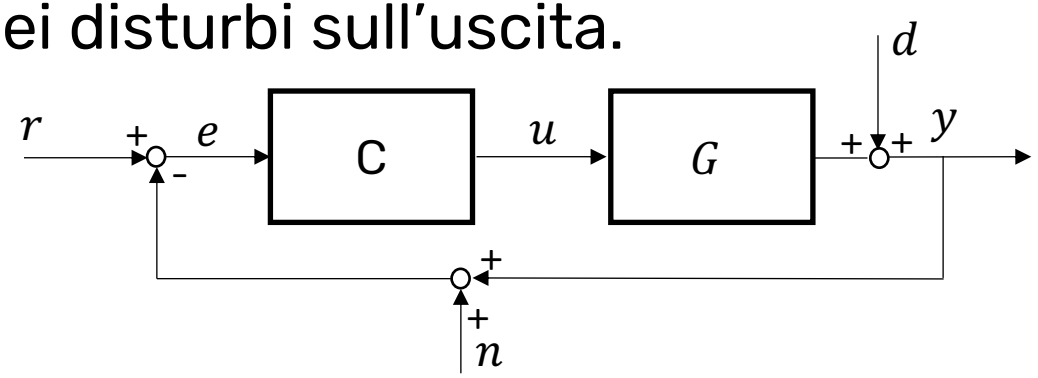
Per tanto

$$\bar{\sigma}\big(T(\omega)\big) = \bar{\sigma}[(I + L(\omega)^{-1})^{-1}] = \frac{1}{\underline{\sigma}[I + L(\omega)^{-1}]} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}[L(\omega)^{-1}] - 1}$$

**Quindi per avere $\bar{\sigma}\big(T(\omega)\big)$ piccolo, bisogna scegliere un controllo che faccia $\underline{\sigma}[L(\omega)^{-1}]$ grande, ovvero $\bar{\sigma}\big(L(\omega)\big)$ piccolo, ad alte frequenze.**

# Reiezione del disturbo

Supponiamo di avere dei disturbi sull'uscita.




Ricordiamo che $Y(z) = T(z)\big(R(z) - N(z)\big) + S(z)D(z)$

**E' desiderabile che $S(\omega)$ sia piccola quando $D(\omega)$ presenta componenti armoniche significative, tipicamente a basse frequenze.**

- Facendo simili considerazioni, per avere $\bar{\sigma}\big(S(\omega)\big)$ piccolo a basse frequenze, bisogna scegliere un controllo che faccia $\underline{\sigma}\big(L(\omega)\big)$ grande a basse frequenze.

# Reiezione del disturbo

Analizziamo questo requisito. Ricordiamo che

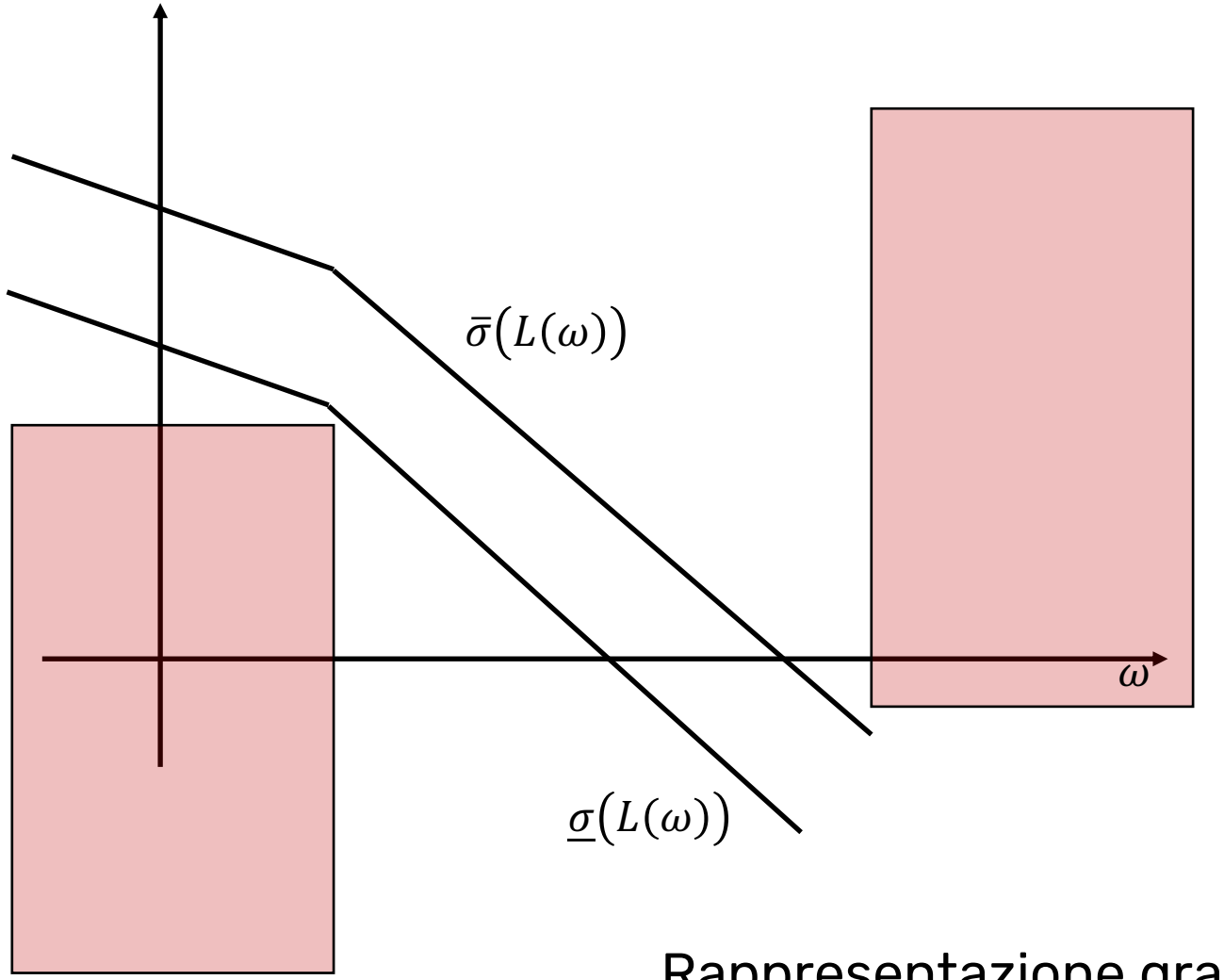
$$S(z) = (I + L(z))^{-1}$$

Per tanto

$$\bar{\sigma}\big(S(\omega)\big) = \bar{\sigma}[(I + L(\omega))^{-1}] = \frac{1}{\underline{\sigma}[I + L(\omega)]} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}[L(\omega)] - 1} \ll 1$$

**Quindi per avere $\bar{\sigma}\big(S(\omega)\big)$ piccolo, bisogna scegliere un controllo che faccia $\underline{\sigma}[L(\omega)]$ grande, a basse frequenze.**

# Requisiti dinamici in frequenza




Rappresentazione grafica dei requisiti dinamici in frequenza