UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Dipartimento di Ingegneria Gestionale, dell'Informazione e della Produzione

Controllo Avanzato Multivariabile

L4b: Poli e zeri invarianti

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA INFORMATICA

TEACHERS
Prof. Antonio Ferramosca

PLACE
Università di Bergamo

Contenuti del corso

1. **Sistemi non lineari a tempo discreto**
   - 1.1 Equilibrio
   - 1.2 Stabilità
   - 1.3 Teorema di Lyapunov
2. **Proprietà strutturali dei sistemi lineari multivariabili**
   - 2.1 Controllabilità
   - 2.2 Osservabilità
   - 2.3 Poli e zeri invarianti
3. **Analisi dei sistemi multivariabili**
   - 3.1 Anello aperto
   - 3.2 Anello chiuso
4. **Controllo ottimo**
   - 4.1 Controllo Lineare Quadratico LQR
   - 4.2 Proprietà
   - 4.3 Esempi
5. **Controllo predittivo MPC**
   - 5.1 Formulazione
   - 5.2 Proprietà
   - 5.3 Stabilità
6. **Esempi di applicazioni**
   - 6.1 Pancreas Artificiale
   - 6.2

Outline

1. Poli
2. Zeri invarianti

Introduzione

L'obiettivo di questa lezione è studiare la rappresentazione in funzione di trasferimento di un sistema MIMO e di conseguenza **poli e zeri multivariabili**.

Si consideri il sistema lineare a tempo discreto in

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

In cui $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$(sistema MIMO).

La **rappresentazione esterna** (input-output)

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

Dove $G(z)$ è la **funzione di trasferimento** data da

$$G(z) = C(zI - A)^{-1} B + D$$

Introduzione

Nei sistemi SISO la **funzione di trasferimento** è data da:

$$G(z) = C(zI - A)^{-1} B + D = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \cdots + \beta_m z^m}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_p z^p}$$

Nel caso dei sistemi MIMO, abbiamo **una** funzione di trasferimento **per ogni** relazione ingresso-uscita.

Se $u \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^p$, abbiamo un totale di $p \times m$ funzioni di trasferimento organizzate in una **matrice di funzioni di trasferimento**:

$$G(z) = C(zI - A)^{-1} B + D = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & \dots & G_{1m}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{p1}(z) & \dots & G_{pm}(z) \end{bmatrix}$$

Introduzione

Questo implica che:

$$Y(z) = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_1(z) \\ \vdots \\ Y_p(z) \end{bmatrix}}_{p\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_{11}(z) & \dots & G_{1m}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{p1}(z) & \dots & G_{pm}(z) \end{bmatrix}}_{p\times m} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1(z) \\ \vdots \\ U_m(z) \end{bmatrix}}_{m\times 1}$$

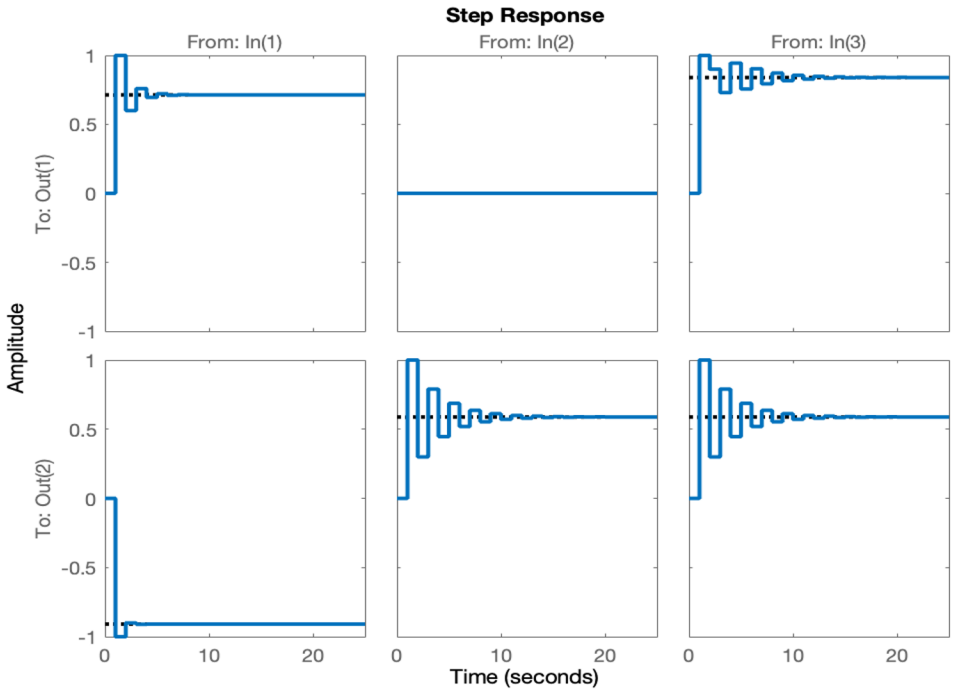
- La trasformazione dallo spazio di stato a funzione di trasferimento è **unica** e si calcola con la stessa formula dei sistemi SISO.
- Il problema della realizzazione (da funzione a trasferimento a spazio di stato) nei sistemi MIMO è più complesso.
- È importante sottolineare che la funzione di trasferimento rappresenta la parte raggiungibile e osservabile del sistema (**realizzazione minima**).

Esempio

Definizione: si consideri il sistema

$$G(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z+0.4} & 0 & \dfrac{z+1}{(z+0.7)(z+0.4)} \\ \dfrac{-1}{z+0.1} & \dfrac{1}{z+0.7} & \dfrac{1}{z+0.7} \end{bmatrix}$$

```
%% funzioni di trasferimento MIMO

%comando tf(num,dem,ts) crea una funzione di trasferimento con tempo di
%capionament ts. Se ts=-1, non viene specificato un tempo di campionamento

G_11=tf([1],[1 0.4],-1);
G_12=0;
G_13=tf([1 1],conv([1 0.7],[1 0.4]),-1)

G_21=tf([-1],[1 .1],-1);
G_22=tf([1],[1 0.7],-1);
G_23=tf([1],[1 0.7],-1);

% LA MATRICE DI FUNZIONI DI TRASFERIMENTO È
G=[G_11, G_12, G_13;
   G_21, G_22, G_23]

step(G)
```

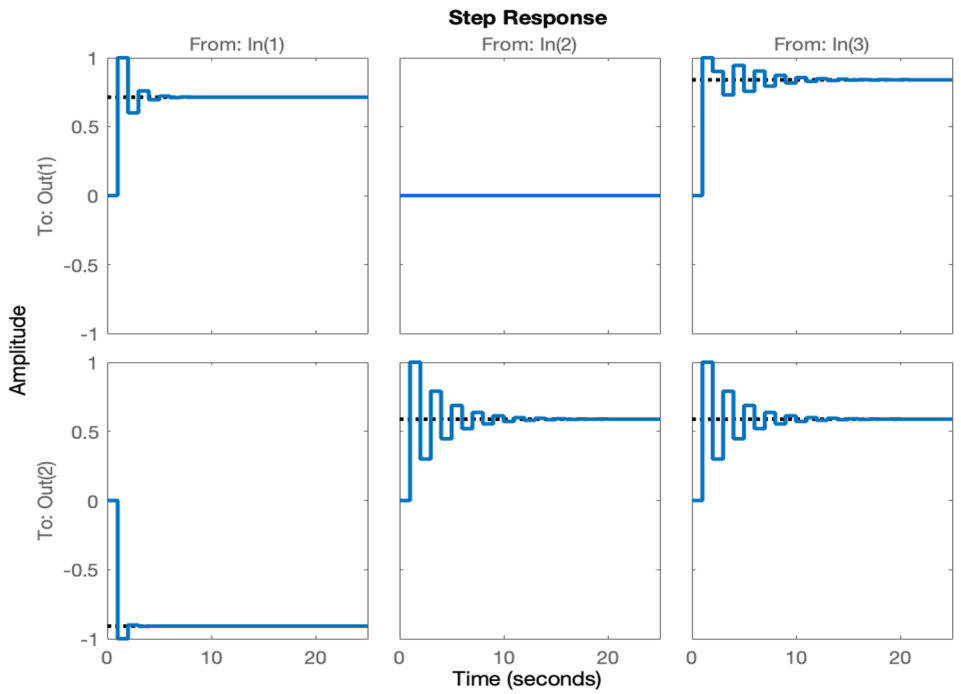


Esempio

Definizione: si consideri il sistema

$$G(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z+0.4} & 0 & \dfrac{z+1}{(z+0.7)(z+0.4)} \\ \dfrac{-1}{z+0.1} & \dfrac{1}{z+0.7} & \dfrac{1}{z+0.7} \end{bmatrix}$$

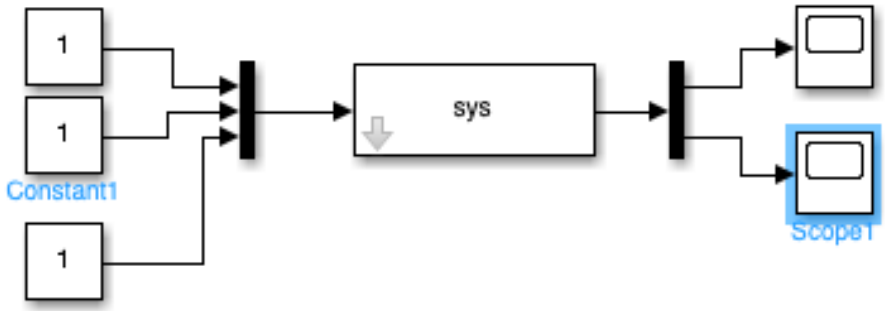
```
%% un altro modo per farlo

num = {[1] [0] [1 1]; [-1] [1] [1]};
den = {[1 0.4] [1] [conv([1 0.7],[1 0.4])]; [1 0.1] [1 0.7] [1 0.7]};

sys = tf(num, den,-1);

step(sys)
```

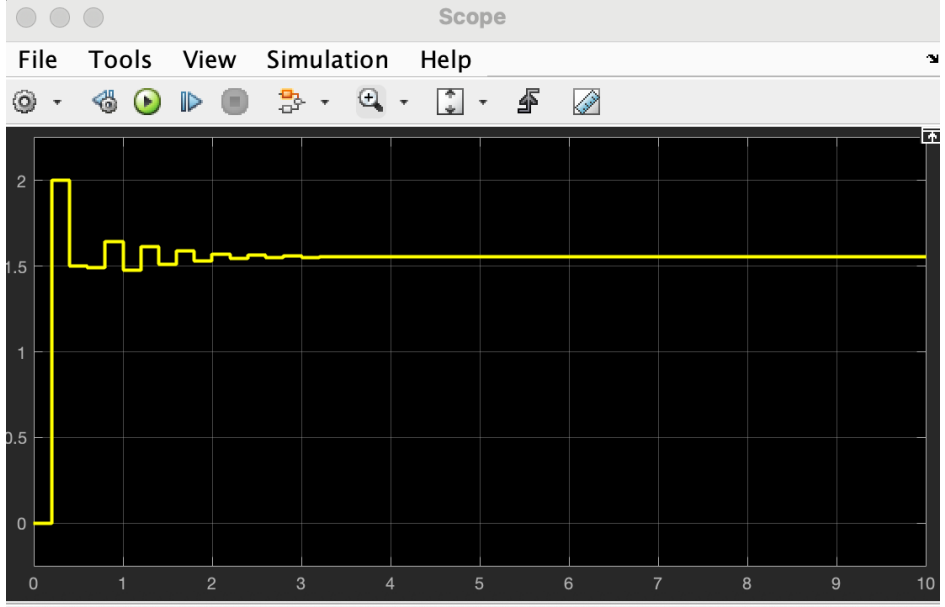


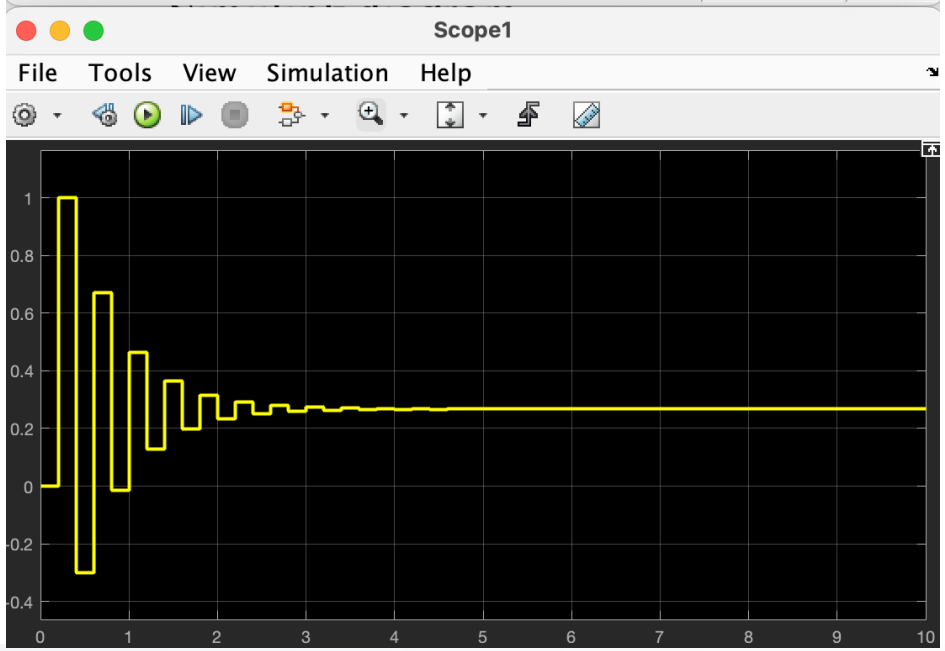
Esempio

Stesso sistema in Simulink

$$G(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z+0.4} & 0 & \dfrac{z+1}{(z+0.7)(z+0.4)} \\ \dfrac{-1}{z+0.1} & \dfrac{1}{z+0.7} & \dfrac{1}{z+0.7} \end{bmatrix}$$



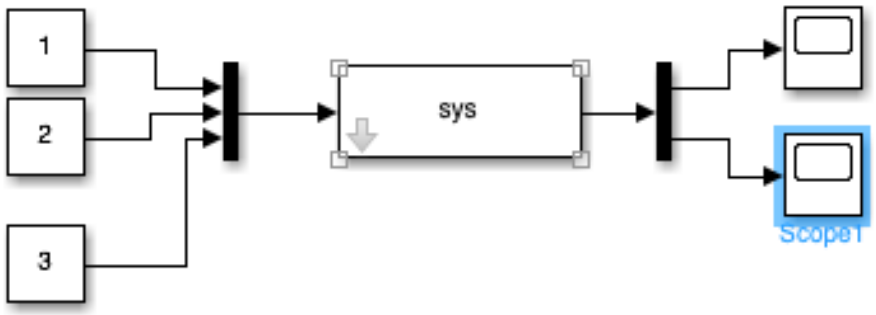


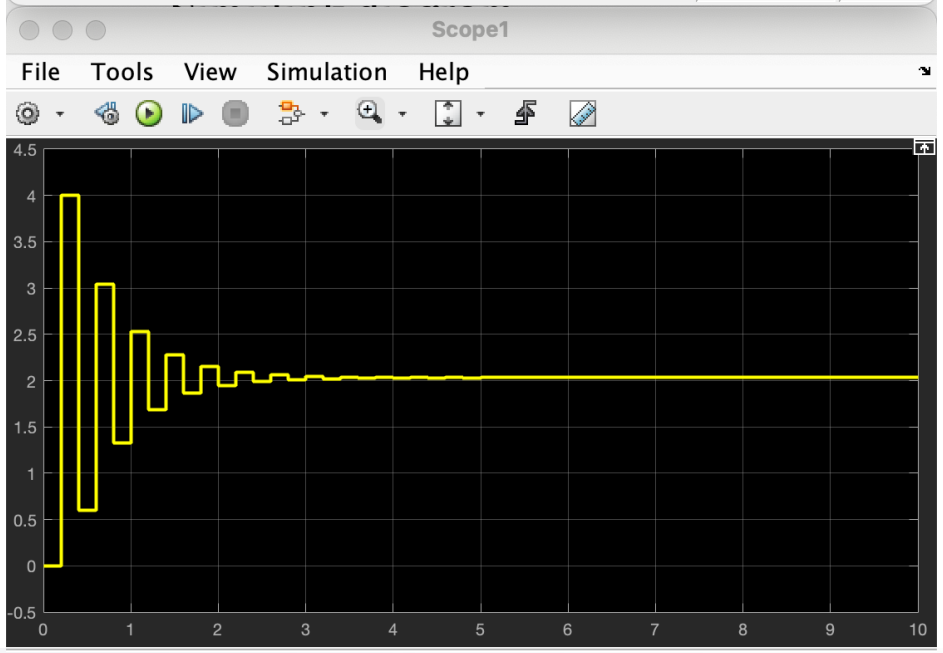


Esempio

Stesso sistema in Simulink

$$G(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z+0.4} & 0 & \dfrac{z+1}{(z+0.7)(z+0.4)} \\ \dfrac{-1}{z+0.1} & \dfrac{1}{z+0.7} & \dfrac{1}{z+0.7} \end{bmatrix}$$





Esempio

Stesso sistema in spazio di stato

$$G(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z+0.4} & 0 & \dfrac{z+1}{(z+0.7)(z+0.4)} \\ \dfrac{-1}{z+0.1} & \dfrac{1}{z+0.7} & \dfrac{1}{z+0.7} \end{bmatrix}$$

```
>> ss(sys)

ans =

  A =
           x1      x2      x3      x4      x5      x6
   x1    -0.4       0       0       0       0       0
   x2       0    -0.1       0       0       0       0
   x3       0       0    -0.7       0       0       0
   x4       0       0       0    -1.1   -0.56       0
   x5       0       0       0     0.5       0       0
   x6       0       0       0       0       0    -0.7

  B =
        u1  u2  u3
   x1    1   0   0
   x2    1   0   0
   x3    0   1   0
   x4    0   0   2
   x5    0   0   0
   x6    0   0   1

  C =
         x1   x2   x3   x4   x5   x6
   y1     1    0    0  0.5    1    0
   y2     0   -1    1    0    0    1

  D =
        u1  u2  u3
   y1    0   0   0
   y2    0   0   0

Sample time: unspecified
Discrete-time state-space model.
```

Esempio

È raggiungibile?

$$G(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z+0.4} & 0 & \dfrac{z+1}{(z+0.7)(z+0.4)} \\ \dfrac{-1}{z+0.1} & \dfrac{1}{z+0.7} & \dfrac{1}{z+0.7} \end{bmatrix}$$

```
>> Mr=ctrb(F.A,F.B)

Mr =

  Columns 1 through 12

    1.0000         0         0   -0.4000         0         0    0.1600         0         0   -0.0640         0         0
    1.0000         0         0   -0.1000         0         0    0.0100         0         0   -0.0010         0         0
         0    1.0000         0         0   -0.7000         0         0    0.4900         0         0   -0.3430         0
         0         0    2.0000         0         0   -2.2000         0         0    1.8600         0         0   -1.4300
         0         0         0         0         0    1.0000         0         0   -1.1000         0         0    0.9300
         0         0    1.0000         0         0   -0.7000         0         0    0.4900         0         0   -0.3430

  Columns 13 through 18

    0.0256         0         0   -0.0102         0         0
    0.0001         0         0   -0.0000         0         0
         0    0.2401         0         0   -0.1681         0
         0         0    1.0522         0         0   -0.7570
         0         0   -0.7150         0         0    0.5261
         0         0    0.2401         0         0   -0.1681

>> rank(Mr)

ans =

     5
```

Questa realizzazione non è completamente raggiungibile

Esempio

È osservabile?

$$G(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z+0.4} & 0 & \dfrac{z+1}{(z+0.7)(z+0.4)} \\ \dfrac{-1}{z+0.1} & \dfrac{1}{z+0.7} & \dfrac{1}{z+0.7} \end{bmatrix}$$

```
>> Mo=obsv(F.A,F.C)

Mo =

    1.0000         0         0    0.5000    1.0000         0
         0   -1.0000    1.0000         0         0    1.0000
   -0.4000         0         0   -0.0500   -0.2800         0
         0    0.1000   -0.7000         0         0   -0.7000
    0.1600         0         0   -0.0850    0.0280         0
         0   -0.0100    0.4900         0         0    0.4900
   -0.0640         0         0    0.1075    0.0476         0
         0    0.0010   -0.3430         0         0   -0.3430
    0.0256         0         0   -0.0944   -0.0602         0
         0   -0.0001    0.2401         0         0    0.2401
   -0.0102         0         0    0.0738    0.0529         0
         0    0.0000   -0.1681         0         0   -0.1681

>> rank(Mo)

ans =

     4
```

Questa realizzazione non è completamente osservabile

Esempio

Realizzazione minima

$$G(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z+0.4} & 0 & \dfrac{z+1}{(z+0.7)(z+0.4)} \\ \dfrac{-1}{z+0.1} & \dfrac{1}{z+0.7} & \dfrac{1}{z+0.7} \end{bmatrix}$$

```
>> minreal(F)
2 states removed.

ans =

  A =
                 x1          x2          x3          x4
   x1       -0.2903     -0.1473     -0.1899      0.2326
   x2         0.038     -0.6291     -0.1143    -0.04646
   x3       -0.1394     -0.2601     -0.2806      0.1704
   x4    -5.551e-17   1.318e-16  -2.776e-17        -0.7

  B =
                 u1          u2          u3
   x1        0.1166  -3.656e-16     -0.4222
   x2       -0.3535     -0.7441      -1.055
   x3         1.297     -0.2029     -0.6197
   x4     2.776e-16     -0.6366        1.43

  C =
              x1       x2       x3       x4
   y1     0.8796  -0.7007   0.5011   0.6593
   y2     0.6046  -0.8657   -1.062  -0.2207

  D =
       u1  u2  u3
   y1   0   0   0
   y2   0   0   0

Sample time: unspecified
Discrete-time state-space model.
```

```
>> eig(ans.A)

ans =

   -0.4000
   -0.1000
   -0.7000
   -0.7000
```

Outline

1. **Poli**

2. Zeri invarianti

Poli multivariabili

Definizione: i poli della funzione di trasferimento

$$G(z) = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & \dots & G_{1m}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{p1}(z) & \dots & G_{pm}(z) \end{bmatrix}$$

coincidono con gli autovalori della matrice A, ovvero con le radici del polinomio caratteristico

$$\phi(z) = \det(zI - A) = 0$$

Teorema: il polinomio caratteristico $\phi(z)$ associato a una realizzazione minima del sistema con funzione di trasferimento $G(z)$, è **il minimo comun denominatore di tutti i minori non nulli** (di ogni ordine) di $G(z)$.

Esempio

Si consideri il sistema

$$G(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z+0.4} & 0 \\ 0 & \dfrac{3}{z+0.4} \end{bmatrix}$$

I minori del primo ordine sono:

$$\frac{1}{z+0.4}, \frac{3}{z+0.4}$$

Il minore del secondo ordine è:

$$\frac{3}{(z+0.4)^2}$$

Il sistema ha due poli in $z = -0.4$

Esempio

Definizione: si consideri il sistema

$$G(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z+0.4} & \dfrac{-0.4}{z+0.4} \\ \dfrac{1}{z+0.4} & \dfrac{z}{z+0.4} \end{bmatrix}$$

I minori del primo ordine sono:

$$\frac{1}{z+0.4}, \frac{-0.4}{z+0.4}, \frac{1}{z+0.4}, \frac{z}{z+0.4}$$

Il minore del secondo ordine è:

$$\frac{1}{z+0.4} \times \frac{z}{z+0.4} - \frac{1}{z+0.4} \times \frac{-0.4}{z+0.4} = \frac{z+0.4}{(z+0.4)^2} = \frac{1}{z+0.4}$$

Il sistema è quindi del primo ordine ed ha un polo in $z = -0.4$

Esempio

Definizione: si consideri il sistema

$$G(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z+0.4} & 0 & \frac{z+1}{(z+0.7)(z+0.4)} \\ \frac{-1}{z+0.1} & \frac{1}{z+0.7} & \frac{1}{z+0.7} \end{bmatrix}$$

I minori del primo ordine sono:

$$\frac{1}{z+0.4}, \frac{z+1}{(z+0.7)(z+0.4)}, \frac{-1}{z+0.1}, \frac{1}{z+0.7}, \frac{1}{z+0.7}$$

Per i minori del secondo ordine dobbiamo ignorare una colonna alla volta…

Esempio

1. Eliminando la **seconda** colonna

$$M_2 = det\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{z+0.4} & \frac{z+1}{(z+0.7)(z+0.4)} \\ \frac{-1}{z+0.1} & \frac{1}{z+0.7} \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{z+0.4} \times \frac{1}{z+0.7} - \frac{-1}{z+0.1} \times \frac{z+1}{(z+0.7)(z+0.4)}$$

$$= \frac{2z+1.1}{(z+0.7)(z+0.4)(z+0.1)}$$

2. Eliminando la **terza** colonna

$$M_3 = det\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{z+0.4} & 0 \\ \frac{-1}{z+0.1} & \frac{1}{z+0.7} \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{(z+0.7)(z+0.4)}$$

Esempio

3. Eliminando la **prima** colonna

$$M_1 = det\left(\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{z+1}{(z+0.7)(z+0.4)} \\ \dfrac{1}{z+0.7} & \dfrac{1}{z+0.7} \end{bmatrix}\right) = -\frac{z+1}{(z+0.7)^2(z+0.4)}$$

Il minimo comun denominatore di tutti i minori è dato da

$$\phi(z) = (z+0.7)^2(z+0.4)(\mathrm{z}+0.1)$$

Quindi il sistema ha 4 poli in: $\mathrm{z} = -0.1, -0.4, -0.7, -0.7$

Nota: *i poli di G(z) sono anche poli delle singole funzioni di trasferimento, ma la loro molteplicità non può essere determinata dalla sola analisi di esse.*

Outline

1. Poli

2. **Zeri invarianti**

Zeri nei sistemi SISO

Nei sistemi SISO la **funzione di trasferimento** è data da:

$$G(z) = C(zI - A)^{-1} B + D = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \cdots + \beta_m z^m}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_p z^p}$$

Gli **zeri** della funzione di trasferimento sono le radici del numeratore $N(z)$.

L'analisi degli zeri è importante per determinare eventuali limitazioni nella performance del sistema di controllo.

Gli zeri non determinano la stabilità del sistema: zeri con modulo >1 causano quella che si chiama **risposta inversa** del sistema.

Zeri invarianti

Diamo ora una definizione più generica per i sistemi MIMO.

Si consideri il sistema lineare a tempo discreto in

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

In cui $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$(sistema MIMO).

La trasformata Z del sistema è data da:

$$zX(z) = AX(z) + BU(z)$$
$$Y(z) = CX(z) + DU(z)$$

Da cui:

$$\begin{bmatrix} zI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(z) \\ U(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Y(z) \end{bmatrix}$$

Zeri invarianti

Definiamo la matrice $P(z)$:

$$P(z) = \begin{bmatrix} zI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Definizione: data la matrice $P(z)$, il suo **rango normale** è il rango della matrice $P(z)$ per ogni valore di z, eccetto per un numero finito di singolarità.

Definizione: gli **zeri invarianti** di un sistema MIMO sono i valori di z tali per cui il rango della matrice $P(z)$, è **minore** del suo **rango normale**.

In altre parole, sono i valori di z tali per cui il **determinante della matrice $P(z)$ è nullo**. Vediamo di capire meglio con un esempio.

Esempio

Definiamo la funzione di trasferimento SISO:

$$G(z) = \frac{\beta_2 z^2 + \beta_1 z + \beta_0}{z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0}$$

Una realizzazione nello spazio degli stati di questo sistema è data dalla rappresentazione in forma canonica di raggiungibilità:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2], \qquad D = 0$$

Per tanto: $P(z) = \begin{bmatrix} zI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & -1 & 0 & 0 \\ 0 & z & -1 & 0 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & z + \alpha_2 & -1 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix}$

Esempio

Il determinate di $P(z) = \begin{bmatrix} zI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & -1 & 0 & 0 \\ 0 & z & -1 & 0 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & z + \alpha_2 & -1 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix}$ è:

$$\det\big(P(z)\big) = \beta_2 z^2 + \beta_1 z + \beta_0 = N(z)$$

Quindi in questo caso, ed in generale nel caso dei sistemi SISO, **gli zeri invarianti coincidono con gli zeri della funzione di trasferimento.**

Non possiamo fare la stessa affermazione per i sistemi MIMO.

Proprietà bloccante degli zeri MIMO

Gli zeri di un sistema MIMO non sono quelli delle singole funzioni di trasferimento, ma godono della proprietà bloccante.

Teorema: *se λ è uno zero invariante, allora esiste uno stato iniziale $x_0 \neq 0$ e un vettore $u_0 \neq 0$, tali che dato un ingresso $u(k) = \lambda^k u_0$, l'uscita è $y(k) = 0, k \geq 0$.*

Ciò significa che se λ è uno zero invariante di $G(z)$, allora l'uscita forzata generata da un ingresso $u(k) = \lambda^k u_0$ è nulla. Questo fatto va sotto il nome di **proprietà bloccante degli zeri**, appunto perché gli zeri bloccano gli ingressi corrispondenti alle loro pulsazioni.

Proprietà bloccante degli zeri MIMO

Proof: se λ è uno zero invariante, dati $x_0 \neq 0$ e $u_0 \neq 0$, allora per $y(0) = 0$:

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ovvero

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{rl} (\lambda I - A)x_0 - Bu_0 & = 0 \\ Cx_0 + Du_0 & = 0 \end{array}$$

Visto che $u(k) = \lambda^k u_0$, la sua trasformata Z è $U(z) = \frac{u_0 z}{z-\lambda}$, quindi:

$$zX(z) - zx_0 = AX(z) + BU(z) \Longrightarrow \begin{array}{rcl} X(z) & = & (zI - A)^{-1}[zx_0 + BU(z)] \\ & = & (zI - A)^{-1}\left[x_0 + \dfrac{Bu_0}{z-\lambda}\right]z \end{array}$$

Proprietà bloccante degli zeri MIMO

Dalla prima equazione, $Bu_0 = (\lambda I - A)x_0$, per cui

$$X(z) = (zI - A)^{-1}\left[x_0 + \frac{(\lambda I - A)x_0}{z - \lambda}\right]z$$

Sviluppiamo il calcolo

$$X(z) = (zI - A)^{-1}\left[x_0 + \frac{(\lambda I - A)x_0}{z - \lambda}\right]z$$

$$= (zI - A)^{-1}\left[\frac{zIx_0 - \lambda Ix_0 + \lambda Ix_0 - Ax_0}{z - \lambda}\right]z$$

$$= (zI - A)^{-1}\left[\frac{zIx_0 - Ax_0}{z - \lambda}\right]z = (zI - A)^{-1}\left[\frac{zI - A}{z - \lambda}\right]x_0 z = \frac{x_0 z}{z - \lambda}$$

Proprietà bloccante degli zeri MIMO

La trasformata Z dell'uscita è:

$$Y(z) = CX(z) + DU(z) = C\frac{x_0 z}{z-\lambda} + D\frac{u_0 z}{z-\lambda}$$

$$= [Cx_0 + Du_0]\frac{z}{z-\lambda} = [Cx_0 + Du_0]\frac{1}{1-\lambda z^{-1}} = 0$$

Riscriviamola:

$$(1-\lambda z^{-1})Y(z) = [Cx_0 + Du_0] = 0 \quad \Longrightarrow \quad Y(z) = \lambda z^{-1} Y(z)$$

Anti-trasformando:

$$y(k) = \lambda y(k-1) \Longrightarrow y(k) = \lambda^k y(0)$$

Da cui, visto che $y(0) = 0$, si deduce $y(k) = 0, \forall k \geq 0.$ **QED**

Calcolo degli zeri invarianti MIMO

Come i poli, anche gli zeri possono essere calcolati dalla funzione di trasferimento:

Definizione: il polinomio $\lambda(z)$ degli zeri invarianti di $G(z)$, è il polinomio con radici coincidenti con tutti e soli gli zeri invarianti di $G(z)$.

Teorema: il polinomio $\lambda(z)$ degli zeri invarianti di $G(z)$, è il **massimo comun divisore di tutti i numeratori di tutti i minori di ordine r** di $G(z)$, dove r è il **rango normale** di $G(z)$, assumendo che tali minori siano scritti con il polinomio caratteristico $\phi(z)$ dei poli al denominatore.

Esempio

Il polinomio caratteristico del sistema:

$$G(z) = \frac{1}{(z+0.9)(z+0.8)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+2z & 2 \end{bmatrix}$$

è dato da $\phi(z) = (z+0.9)^2(z+0.8)^2$

Il suo rango normale è 2 perchè:

$$\det\big(G(z)\big) = \frac{2-1-2z}{\phi(z)} = \frac{1-2z}{\phi(z)} \neq 0 \quad \forall z \neq 0.5$$

Quindi l'unico zero è $z = 0.5$

Remark

Data una matrice di funzioni di trasferimento razionali $G(z)$, essa si può sempre esprimere nella forma:

$$G(z) = \frac{1}{D_G(z)} P(z)$$

Dove $P(z)$ è una matrice polinomiale e $D_G(z)$ è il minimo comune multiplo dei denominatori delle singole funzioni di trasferimento.

Tale rappresentazione è molto utile per calcolare i poli e gli zeri di $G(z)$.

Esempio

Dato il sistema:

$$G(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{z+0.4}{(z+0.2)(z+0.3)} & \dfrac{2}{(z+0.3)} \\ \dfrac{0.7}{(z+0.2)(z+0.3)} & \dfrac{1}{(z+0.4)(z+0.3)} \end{bmatrix}$$

Esso può essere espresso nella forma:

$$G(z) = \frac{1}{(z+0.2)(z+0.3)(z+0.4)} \begin{bmatrix} (z+0.4)^2 & 2z^2+1.2z+0.16 \\ 0.7z+0.28 & z+0.2 \end{bmatrix}$$

Esempio

I minori del primo ordine sono:

$$\frac{z+0.4}{(z+0.2)(z+0.3)}, \frac{2}{(z+0.3)}, \frac{0.7}{(z+0.2)(z+0.3)}, \frac{1}{(z+0.4)(z+0.3)}$$

Il minore del secondo ordine è:

$$\frac{z+0.4}{(z+0.2)(z+0.3)} \times \frac{1}{(z+0.4)(z+0.3)} - \frac{2}{(z+0.3)} \times \frac{0.7}{(z+0.2)(z+0.3)}$$

$$= \frac{1}{(z+0.2)(z+0.3)^2} - \frac{1.4}{(z+0.2)(z+0.3)^2} = \frac{-0.4}{(z+0.2)(z+0.3)^2}$$

Il minimo comun denominatore di tutti i minori è dato da

$$\phi(z) = (z+0.3)^2(z+0.4)(\mathrm{z}+0.2)$$

Quindi il sistema ha 4 poli in: $\mathrm{z} = -0.2, -0.4, -0.3, -0.3$

Esempio

Il polinomio caratteristico è dato da

$$\phi(z) = (z + 0.3)^2(z + 0.4)(z + 0.2)$$

Il rango normale del sistema è 2 perchè:

$$\det\big(G(z)\big) = \frac{-0.4}{(z + 0.2)(z + 0.3)^2} =$$

$$= \frac{-0.4(z + 0.4)}{\phi(z)} \neq 0 \quad \forall z \neq -0.4$$

Quindi l'unico zero è $z = -0.4$

Esempio 2

Sia il sistema:

$$G(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{z+0.4}{(z+0.2)(z+0.3)} & \dfrac{2}{(z+0.2)(z+0.3)} \\ \dfrac{0.7}{(z+0.2)(z+0.3)} & \dfrac{1}{(z+0.2)(z+0.3)} \end{bmatrix}$$

Il cui polinomio caratteristico è $\phi(z) = (z+0.2)^2(z+0.3)^2$

Il suo rango normale è 2 perchè:

$$\det\big(G(z)\big) = \frac{z+0.4-1.4}{\phi(z)} = \frac{z-1}{\phi(z)} \neq 0 \quad \forall z \neq 1$$

Quindi l'unico zero è $z = 1$

Esempio 3

Si consideri il sistema

$$G(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z+0.4} & 0 & \frac{z+1}{(z+0.7)(z+0.4)} \\ \frac{-1}{z+1} & \frac{1}{z+0.7} & \frac{1}{z+0.7} \end{bmatrix}$$

Il cui polinomio caratteristico è dato da $\phi(z) = (z+0.7)^2(z+0.4)(\mathrm{z}+1)$

Quindi il sistema ha 4 poli in: $\mathrm{z} = -1, -0.4, -0.7, -0.7$

Scriviamo i minori del secondo ordine in modo che abbiano $\phi(z)$ al denominatore…

Esempio 3

Scriviamo i minori del secondo ordine in modo che abbiano $\phi(z)$ al denominatore…

$$M_2 = \frac{2}{(z+0.7)(z+0.4)} = \frac{2(z+0.7)(z+1)}{(z+0.7)^2(z+0.4)(\mathrm{z}+1)}$$

$$M_1 = \frac{-(z+1)}{(z+0.7)^2(z+0.4)} = \frac{-(z+1)^2}{(z+0.7)^2(z+0.4)(\mathrm{z}+1)}$$

$$M_3 = \frac{1}{(z+0.7)(z+0.4)} = \frac{(z+0.7)(z+1)}{(z+0.7)^2(z+0.4)(\mathrm{z}+1)}$$

Il massimo comun divisore è: $\lambda(z) = (z+1)$.

Il sistema ha quindi uno zero in $z = -1$

Esempio 4

Sia il sistema:

$$G(z) = \frac{1}{(z+0.5)}\begin{bmatrix}(z+0.4) & 0.03 \\ 2 & 2(z+0.2)\end{bmatrix}$$

Il cui polinomio caratteristico è $\phi(z) = (z+0.5)$

L'unico minore del secondo ordine è:

$$\det\big(G(z)\big) = \frac{2(z+0.4)(z+0.2)-0.06}{(z+0.5)^2} = \frac{2z^2+1.2z+0.16-0.06}{(z+0.5)^2}$$

$$= \frac{2z^2+1.2z+0.1}{(z+0.5)^2} = \frac{2(z+0.5)(z+0.1)}{(z+0.5)^2} = \frac{2\,(z+0.1)}{(z+0.5)}$$

Quindi l'unico zero è $z = -0.1$ (**che non è uno zero delle singole funzioni di trasferimento**) e l'unico polo è $z = -0.5$

Nota finale

Gli zeri invarianti sono **tutti** gli zeri del sistema e sono quelli che fanno si che il rango di

$$P(z) = \begin{bmatrix} zI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Non sia il massimo (rango normale).

Se (A,B,C,D) è una **realizzazione minima** del sistema, allora questi zeri coincidono con quelli di $G(z)$.

In caso contrario, gli zeri di $G(z)$ rappresentanto un **sottoinsieme** degli zeri (invarianti) di (A,B,C,D), detti **zeri di trasmissione**.

Zeri di disaccoppiamento

Gli autovalori della parte non osservabile e quelli della parte non raggiungibile sono a tutti gli effetti zeri (di disaccoppiamento) del sistema e godono di una facile interpretazione in termini di proprietà bloccante.

E' importante però notare che la matrice di sistema $P(z)$ può non perdere rango (cioè possono non essere zeri invarianti). Ciò può accadere se $p < m$ per gli zeri di disaccoppiamento di uscita e $p > m$ per gli zeri di disaccoppiamento di ingresso.

Per un sistema con ugual numero di ingressi e uscite (sistema quadrato), l'insieme di zeri di disaccoppiamento è un sottoinsieme dell'insieme degli zeri invarianti. Se, in più, il sistema quadrato è in forma minima, gli insiemi degli zeri di trasmissione e invarianti coincidono.