UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Dipartimento di Ingegneria Gestionale, dell'Informazione e della Produzione

Controllo Avanzato Multivariabile

L4: Trasformata Z

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA INFORMATICA

TEACHERS
Prof. Antonio Ferramosca

PLACE
Università di Bergamo

Contenuti del corso

1. **Sistemi non lineari a tempo discreto**
   - 1.1 Equilibrio
   - 1.2 Stabilità
   - 1.3 Teorema di Lyapunov
2. **Proprietà strutturali dei sistemi lineari multivariabili**
   - 2.1 Controllabilità
   - 2.2 Osservabilità
   - 2.3 Poli e zeri invarianti
3. **Analisi dei sistemi multivariabili**
   - 3.1 Anello aperto
   - 3.2 Anello chiuso
4. **Controllo ottimo**
   - 4.1 Controllo Lineare Quadratico LQR
   - 4.2 Proprietà
   - 4.3 Esempi
5. **Controllo predittivo MPC**
   - 5.1 Formulazione
   - 5.2 Proprietà
   - 5.3 Stabilità
6. **Esempi di applicazioni**
   - 6.1 Pancreas Artificiale
   - 6.2

Outline

1. Trasformata Zeta

2. Funzione di trasferimento

Outline

1. **Trasformata Zeta**

2. Funzione di trasferimento

Trasformata Z

Dato un **segnale a tempo discreto** $s(k) \ : \ \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ la trasformata Z è il polinomio:

$$\mathcal{Z}[s](z) = \sum_{k=0}^{\infty} s(k) \cdot z^{-k} = s(0) + s(1)z^{-1} + \cdots$$

Dove la variabile z è un numero complesso, $z \in \mathbb{C}$.

Perché un'altra trasformazione?

- Converte un segnale a tempo discreto, che è una funzione reale, in una rappresentazione complessa nel dominio della frequenza.

- La trasformata discreta di Fourier è un caso particolare di trasformata Z (con $z = e^{j\omega}$) che ci permette di vedere le componenti spettrali di un segnale.

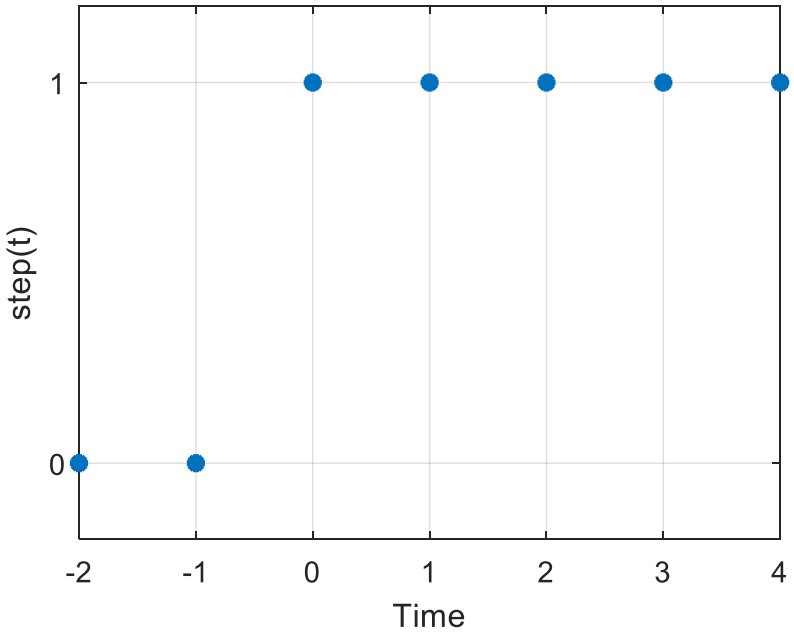
- In parole povere, può essere vista come la versione discreta della trasformata di Laplace.

- La trasformata Z ha alcune proprietà interessanti che ci permettono di analizzare i sistemi dinamici.

Esempio: scalino discreto

$$step(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[step](z) &= \sum_{k=0}^{\infty} step(k) \cdot z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1})^k \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \\ &= \frac{z}{z-1} \end{aligned}$$



La trasformata Z converge iffLa trasformata Z converge $|z| > 1$

Serie geometrica ($|a| < 1$)

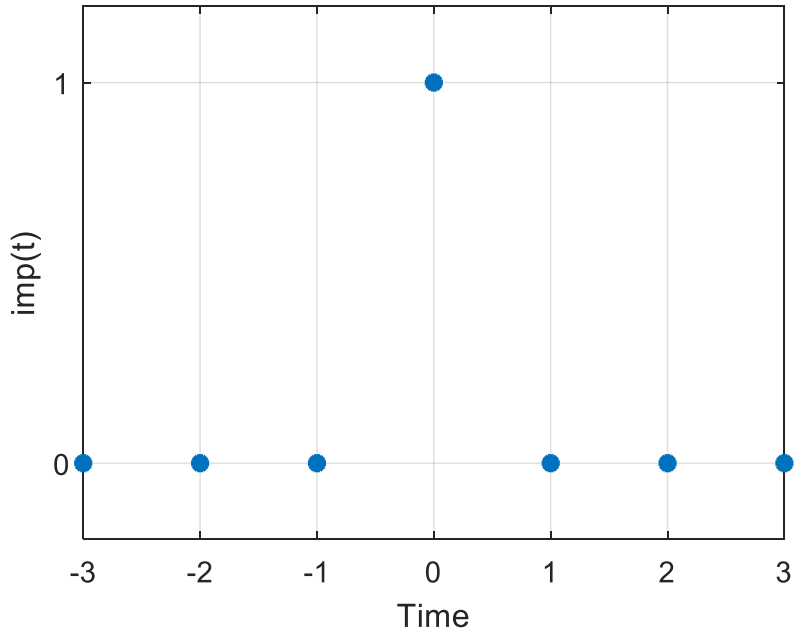
$$\sum_{t=0}^{\infty} a^t = \frac{1}{1-a}$$

Esempio: impulso discreto

$$imp(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[imp](z) &= \sum_{k=0}^{\infty} imp(k) \cdot z^{-k} \\ &= 1 \cdot z^{0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

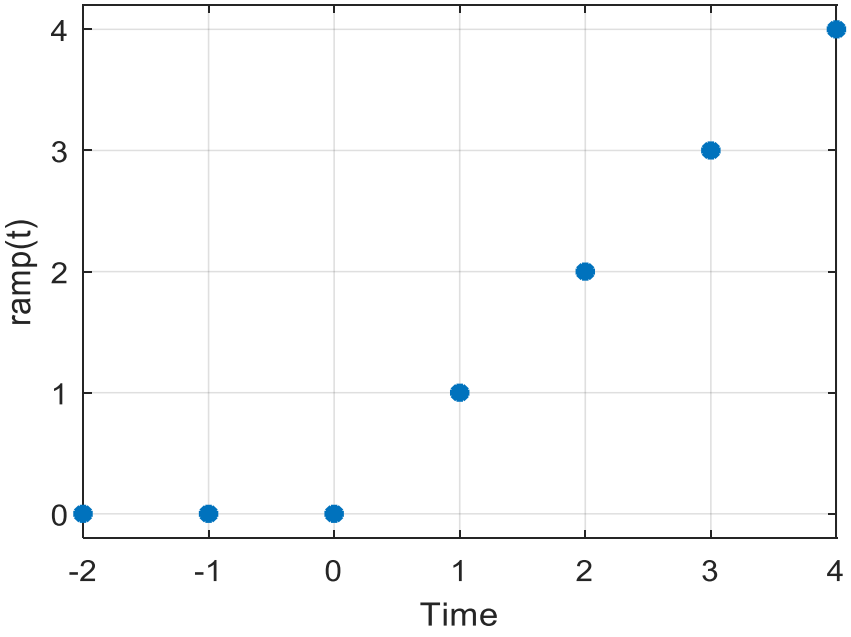
La trasformata Z converge sempre



Esempio: rampa discreta

$$ramp(k) = \begin{cases} k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[ramp](z) &= \sum_{k=0}^{\infty} ramp(k) \cdot z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (z^{-1})^k \\ &= \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \\ &= \frac{z}{(z-1)^2} \end{aligned}$$



La trasformata Z converge iff $|z| > 1$

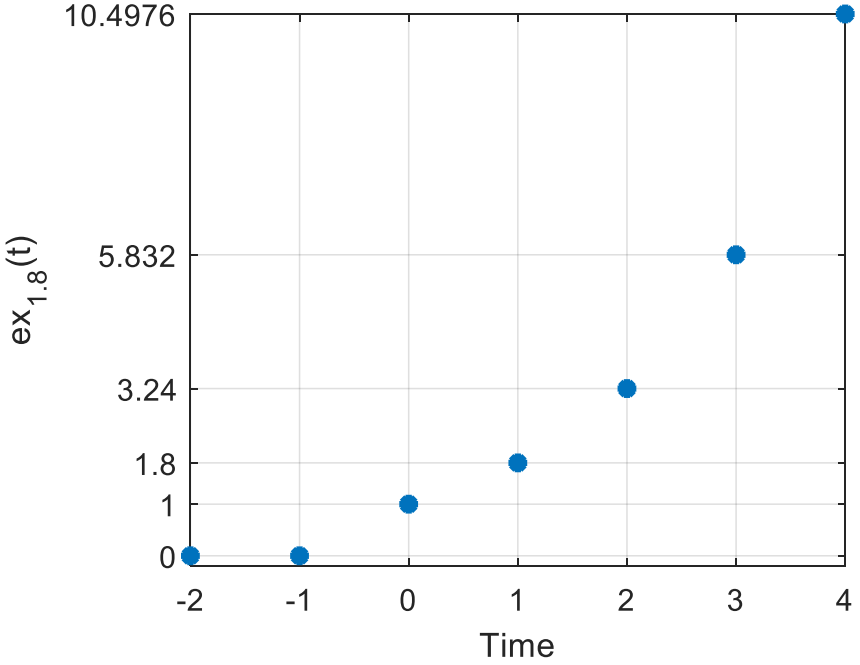
Con $|a| < 1$ È noto che:

$$\sum_{t=0}^{\infty} t a^t = \frac{a}{(1-a)^2}$$

Esempio: esponenziale

$$ex_\lambda(k) = \begin{cases} \lambda^k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[ex_\lambda](z) &= \sum_{k=0}^{\infty} ex_\lambda(k) \cdot z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \cdot z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda \cdot z^{-1})^k \\ &= \frac{1}{1 - \lambda z^{-1}} \\ &= \frac{z}{z - \lambda} \end{aligned}$$



Con $|a| < 1$ è noto che:

$$\sum_{t=0}^{\infty} a^t = \frac{1}{1-a}$$

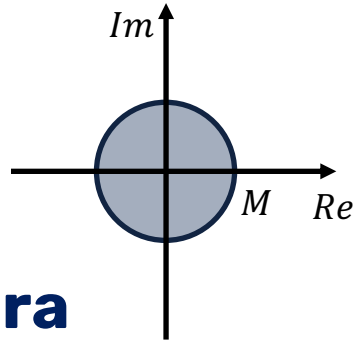
La trasformata Z converge iff $|z| > \lambda$

Regione di convergenza

- La trasformata Z non converge per ogni valore $z \in \mathbb{C}$
- La regione di convergenza di un segnale è chiamata **ROC** (region of convergence)
- La ROC deve essere fornita per definire completamente la trasformata Z
- Per segnali tali che $s(k) = 0, \forall k < 0$ la ROC è nella forma:

$$ROC[s] = \{z \; s.t. \; |z| > M\}$$

per alcuni positivi $M \in \mathbb{R}$



Per noi, quest'ultima proprietà è sempre vera

ROC: Esempi

$$ROC[step] = \{z\ s.t.\ |z| > 1\}$$

$$ROC[imp] = \mathbb{C}$$

$$ROC[ramp] = \{z\ s.t.\ |z| > 1\}$$

$$ROC[ex_\lambda] = \{z\ s.t.\ |z| > \lambda\}$$

Polynomial form

Dato un segnale $s(k)$ e $z \in ROC[s]$ si ha:

$$\mathcal{Z}[s](z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Dove $N(z)$ e $D(z)$ sono polinomi di grado finito.

- Le radici di $D(z)$ sono chiamate **poli** del segnale
- Le radici di $N(z)$ sono chiamate **zeri** del segnale
- I poli e gli zeri sono **singolarità** di $\mathcal{Z}[s](z)$.

Forma polinomiale: esempi

$$\mathcal{Z}[step](z) = \frac{z}{z-1}$$

$N(z) = z$
$D(z) = z - 1$

Zeri: 0
Poli: 1

$$\mathcal{Z}[imp](z) = 1$$

$N(z) = 1$
$D(z) = 1$

Zeri: none
Poli: none

$$\mathcal{Z}[ramp](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$N(z) = z$
$D(z) = (z-1)^2$

Zeri: 0
Poli: 1 e 1 (doppia molteplicità)

$$\mathcal{Z}[ex_\lambda](z) = \frac{z}{z-\lambda}$$

$N(z) = z$
$D(z) = z - \lambda$

Zeri: 0
Poli: λ

Linearità

Dati due segnali $s_1(k)$ and $s_2(k)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, la trasformata Z del segnale:

$$g(k) = \alpha \cdot s_1(k) + \beta \cdot s_2(k)$$

è data da:

$$\mathcal{Z}[g](z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} [\alpha \cdot s_1(k) + \beta \cdot s_2(k)] \cdot z^{-k}$$

$$= \alpha \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} s_1(k) \cdot z^{-k}} + \beta \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} s_2(k) \cdot z^{-k}}$$

$$= \alpha \cdot \mathcal{Z}[s_1](z) + \beta \cdot \mathcal{Z}[s_2](z)$$

Ritardo

Dato un segnale $s(k)$ la trasformata Z del segnale:

$$g(k) = s(k-1)$$

è data da:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[g](z) &= \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \cdot z^{-k} \\
&= g(0) + g(1)z^{-1} + g(2)z^{-2} + \cdots \\
&= s(-1) + s(0)z^{-1} + s(1)z^{-2} + \cdots \\
&= 0 + z^{-1} \cdot (s(0) + s(1)z^{-1} + \cdots) \\
&= z^{-1} \cdot \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} s(k) \cdot z^{-k}} = z^{-1} \cdot \mathcal{Z}[s](z)
\end{aligned}$$

Anticipo

Dato un segnale $s(k)$ la trasformata Z del segnale:

$$g(k) = s(k+1)$$

È data da:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[g](z) &= \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \cdot z^{-k} \\
&= g(0) + g(1)z^{-1} + g(2)z^{-2} + \cdots \\
&= s(1) + s(2)z^{-1} + s(3)z^{-2} + \cdots \\
&= z \cdot s(0) - z \cdot s(0) + s(1) + s(2)z^{-1} + s(3)z^{-2} + \cdots \\
&= -z \cdot s(0) + z \cdot \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} s(k) \cdot z^{-k}} \\
&= -z \cdot s(0) + z \cdot \mathcal{Z}[s](z) \\
&= z \cdot \mathcal{Z}[s](z) - z \cdot s(0)
\end{aligned}$$

Teorema del valore iniziale

Dato un segnale $s(k)$ allora:

$$\lim_{z \to +\infty} \mathcal{Z}[s](z) = s(0)$$

Questo perché:

$$\lim_{z \to +\infty} \mathcal{Z}[s](z) = \lim_{z \to +\infty} [s(0) + \boxed{s(1)z^{-1} + s(2)z^{-2} \cdots}]$$
$$= s(0)$$

Tutti tendono a 0

Teorema del valore finale

Dato un segnale $s(k)$ con trasformata Z razionale tale che tutti i poli p_i abbiamo $|p_i| < 1$ oppure siano $p_i = 1$

$$\lim_{z \to 1} [(z-1)\mathcal{Z}[s](z)] = \lim_{k \to \infty} s(k)$$

Trasformate importanti

$$s_1(k) = imp(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{Z}[s_1](z) = 1$$

$$s_2(k) = step(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{Z}[s_2](z) = \frac{z}{z-1}$$

$$s_3(k) = ramp(k) = \begin{cases} k & k \geq 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{Z}[s_3](z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$s_4(k) = par(k) = \begin{cases} k^2 & k \geq 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{Z}[s_4](z) = \frac{z}{(z-1)^3}$$

Trasformate importanti

$$s_5(k) = ex_\lambda(k) = \begin{cases} \lambda^k & k \geq 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{Z}[s_5](z) = \frac{z}{z-\lambda}$$

$$s_6(k) = \begin{cases} \sin(\omega \cdot k) & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{Z}[s_6](z) = \frac{z \cdot \sin\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$$

$$s_7(k) = \begin{cases} \cos(\omega \cdot k) & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{Z}[s_7](z) = \frac{z \cdot (z - \cos\omega)}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$$

Trasformata Z inversa

Esistono diversi modi per calcolare la trasformata inversa:

- Decomposizione di Heaviside **Non trattata in questo corso**
- Lunga divisione

Lunga divisione

Sappiamo che:

$$\mathcal{Z}[s](z) = \frac{N(z)}{D(z)} = s(0) + s(1)z^{-1} + \cdots$$

Pertanto, se risolviamo la divisione tra i due polinomi $N(z)$ e $D(z)$, otteniamo i valori del segnale originale.

Lunga divisione: esempio

$$\mathcal{Z}[s](z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{4z^2 - z + 2}{z^2 + 2z + 2}$$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
N(z) = & 4z^2 & -\ z & +2 & & z^2 + 2z + 2 = D(z) \\
\cline{6-6}
 & -4z^2 & -8z & -8 & & 4 - 9z^{-1} + 12z^{-2} - 6z^{-3} + \cdots \\
\cline{2-4}
 & & -9z & -6 & & \\
 & & +9z & +18 & +18z^{-1} & \\
\cline{3-5}
 & & & +12 & +18z^{-1} & \\
 & & & -12 & -24z^{-1} & -24z^{-2} \\
\cline{4-5}
 & & & & -6z^{-1} & -24z^{-2}
\end{array}
$$

$s(0) = 4$

$s(1) = -9$

$s(2) = 12$

$s(3) = -6$

Remark

- La lunga divisione fornisce solo un numero finito di campioni dai segnali originali.

- Se vogliamo l'intero segnale, dobbiamo usare altre tecniche (come la decomposizione di Heaviside).

Trasformata di Fourier a tempo discreto

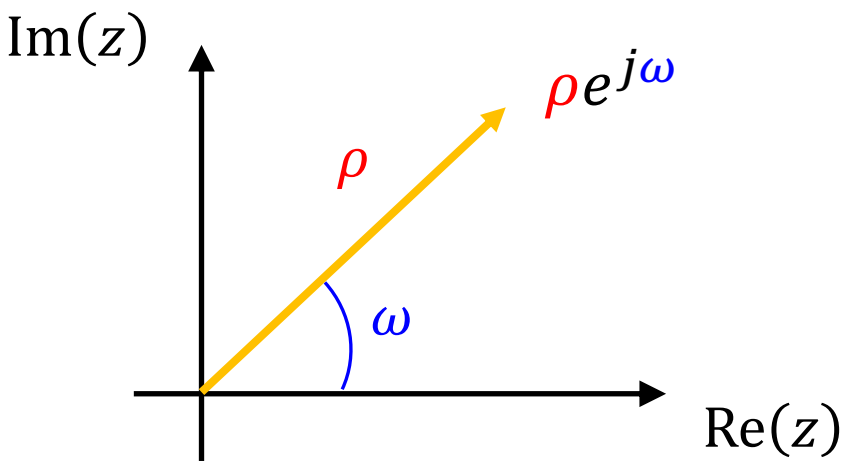
La trasformata di Fourier a tempo discreto può essere ottenuta valutando la trasformata Z di $s(k)$ in $z = e^{j\omega}$:

$$\boxed{\mathcal{F}[s(k)] = S\left(e^{j\omega}\right)}$$

$$\mathcal{F}[s(k)] = \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k) \cdot z^{-k}\right]_{z=e^{j\omega}}$$

Interpretazione: la DFTF è la trasformata Z **vincolata nel limite del cerchio unitario**, cioè tutti i valori di z che possono essere scritti come $z = e^{j\omega}$, cioè tutti i punti con modulo $\rho = 1$

$$\mathcal{F}[s(k)] = S(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

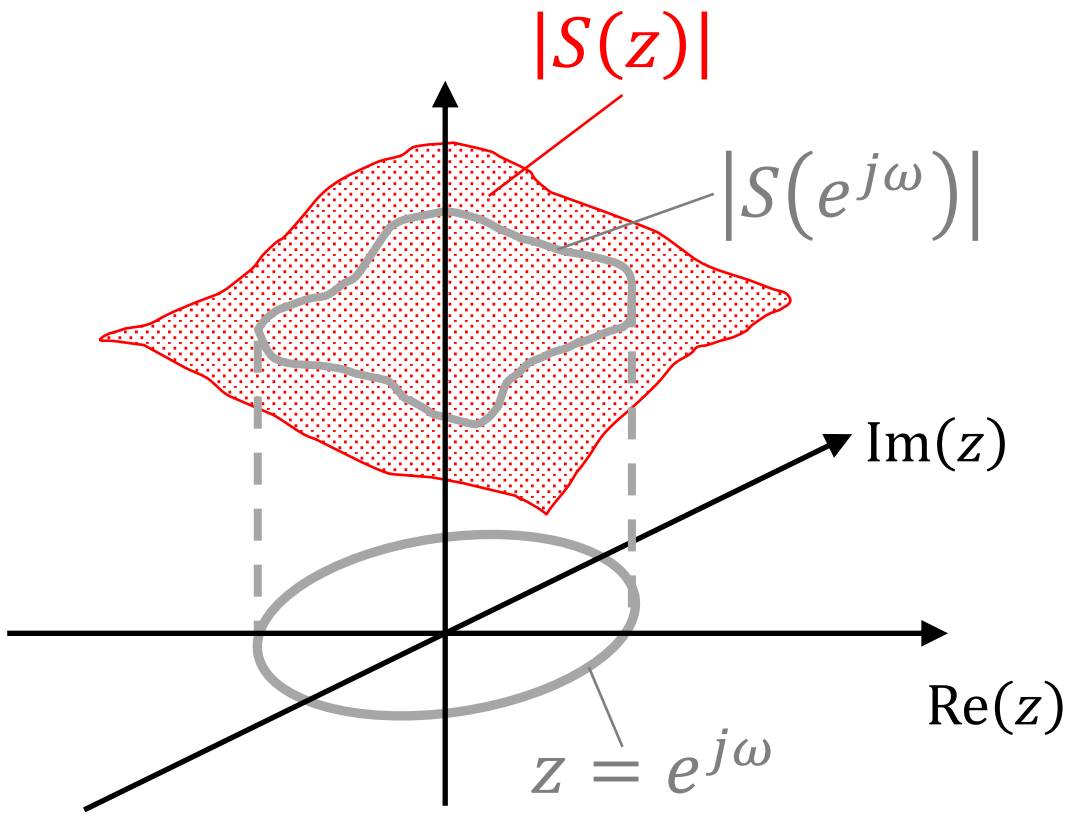


Trasformata di Fourier a Tempo Discreto (DTFT)

Interpretazione: la DFTF è la trasformata Z vincolata nel limite del cerchio unitario

$$\mathcal{F}[s(k)] = S(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

Per semplicità prendiamo il modulo di $S(z)$ e $S(e^{j\omega})$. Allora, $|S(z)|$ è una superfice nel piano complesso, mentre $|S(e^{j\omega})|$ è un percorso sul piano complesso.



Outline

1. Transformata Z

2. **Funzione di trasferimento**

Trasformata Z dei movimenti

Si consideri il movimento di stato del sistema LTI:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = A \cdot \boldsymbol{x}(k) + B \cdot u(k) \\ y(k) = C \cdot \boldsymbol{x}(k) + D \cdot u(k) \end{cases}$$

Corrispondente all'ingresso $u(k) = \check{u}(k), \mathrm{k} \geq 0$ e stato iniziale $\check{\boldsymbol{x}}(0) = 0$.

- Vogliamo calcolare:
- $\mathcal{Z}[\check{\boldsymbol{x}}](z)$: la trasformata Z del movimento forzato dello stato
- $\mathcal{Z}[\check{y}](z)$: la trasformata Z del movimento forzato dell'uscita

Movimento forzato dello stato

Sappiamo che:

$$\boldsymbol{f}(k) \triangleq \breve{\boldsymbol{x}}(k+1) = A \cdot \breve{\boldsymbol{x}}(k) + B \cdot \breve{u}(k)$$

Pertanto:

$$\mathcal{Z}[\boldsymbol{f}](z) = A \cdot \mathcal{Z}[\breve{\boldsymbol{x}}](z) + B \cdot \mathcal{Z}[\breve{u}](z)$$

$$\mathrm{z} \cdot \mathcal{Z}[\breve{\boldsymbol{x}}](z) - \mathrm{z} \cdot \breve{\boldsymbol{x}}(0) = A \cdot \mathcal{Z}[\breve{\boldsymbol{x}}](z) + B \cdot \mathcal{Z}[\breve{u}](z)$$

$$\mathrm{z} \cdot \mathcal{Z}[\breve{\boldsymbol{x}}](z) - A \cdot \mathcal{Z}[\breve{\boldsymbol{x}}](z) = B \cdot \mathcal{Z}[\breve{u}](z)$$

$$(\mathrm{z} \cdot I_n - A) \cdot \mathcal{Z}[\breve{\boldsymbol{x}}](z) = B \cdot \mathcal{Z}[\breve{u}](z)$$

$$\mathcal{Z}[\breve{\boldsymbol{x}}](z) = (\mathrm{z} \cdot I_n - A)^{-1} \cdot B \cdot \mathcal{Z}[\breve{u}](z)$$

Movimento forzato dell'uscita

Sappiamo che:

$$\check{y}(k) = C \cdot x(k) + D \cdot \check{u}(k)$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[\check{y}](z) &= C \cdot \mathcal{Z}[\check{x}](z) + D \cdot \mathcal{Z}[\check{u}](z) \\
&= C \cdot (\mathrm{z} \cdot I_n - A)^{-1} \cdot B \cdot \mathcal{Z}[\check{u}](z) + D \cdot \mathcal{Z}[\check{u}](z) \\
&= [C \cdot (\mathrm{z} \cdot I_n - A)^{-1} \cdot B + D] \cdot \mathcal{Z}[\check{u}](z) \\
&= G(z) \cdot \mathcal{Z}[\check{u}](z)
\end{aligned}$$

Funzione di trasferimento

$$\mathcal{Z}[\check{y}](z) = \boxed{G(z)} \cdot \mathcal{Z}[\check{u}](z)$$

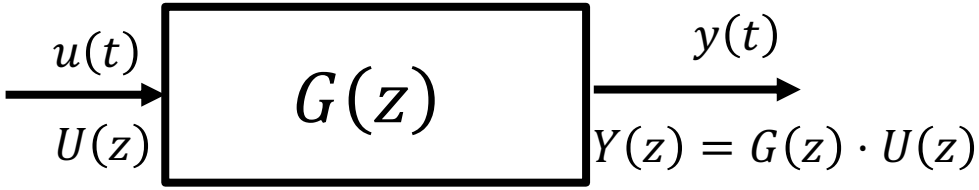
$$\frac{\mathcal{Z}[\check{y}](z)}{\mathcal{Z}[\check{u}](z)} = \boxed{G(z)} = C(zI_n - A)^{-1}B + D$$

Funzione di trasferimento

Il rapporto tra la trasformata Z del movimento forzato dell'uscita forzata e il suo ingresso corrispondente è una funzione di z, chiamata funzione di trasferimento, che non dipende dall'ingresso specifico, ma solo dal sistema.

Significato della funzione di trasferimento

La funzione di trasferimento di un sistema LTI ci permette di calcolare il movimento forzato dell'uscita utilizzando una moltiplicazione



Pertanto, il movimento forzato dell'uscita può essere calcolato calcolando una trasformata Z inversa.

È una **rappresentazione esterna** di un sistema LTI.

Esempio

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

Calcolare la funzione di trasferimento:

$$G(z) = C(zI_n - A)^{-1}B + D$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z - 0.1 & -0.4 \\ -0.3 & z - 0.2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{1}{z^2 - 0.3z - 0.1} \begin{bmatrix} z - 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & z - 0.1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

Calcolare la funzione di trasferimento:

$$G(z) = \frac{1}{z^2 - 0.3z - 0.1} \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z - 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & z - 0.1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{z^2 - 0.3z - 0.1} \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z - 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{3z - 0.3}{z^2 - 0.3z - 0.1}$$

Example

Ora possiamo ignorare le matrici A, B, C e D e concentrarci sulla funzione di trasferimento:

$$G(z) = \frac{3z - 0.3}{z^2 - 0.3z - 0.1}$$

Calcoliamo il movimento forzato con un ingresso a scalino:

$$u(k) = step(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{Z}[u](z) = \frac{z}{z-1}$$

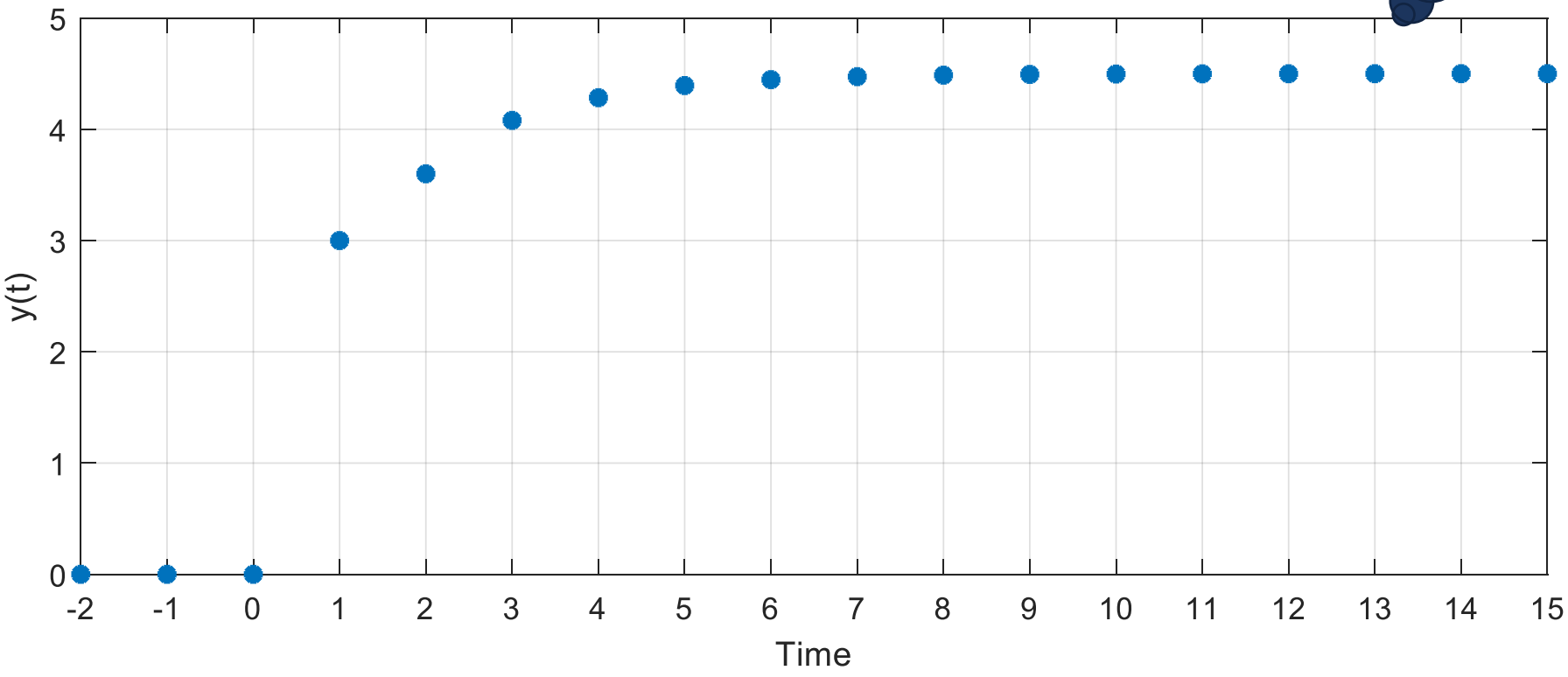
Pertanto:

$$\mathcal{Z}[\check{y}](z) = G(z) \cdot \mathcal{Z}[u](z) = \frac{3z - 0.3}{z^2 - 0.3z - 0.1} \cdot \frac{z}{z-1}$$
$$= \frac{3z^2 - 0.3z}{z^3 - 1.3z^2 + 0.2z + 0.1}$$

Esempio

È possibile calcolare questi punti per mezzo della lunga divisione

$$\mathcal{Z}[\check{y}](z) = \frac{3z^2 - 0.3z}{z^3 - 1.3z^2 + 0.2z + 0.1}$$



Interpretazione della funzione di trasferimento

Si consideri un sistema con funzione di trasferimento:

$$\frac{\mathcal{Z}[\check{y}](z)}{\mathcal{Z}[\check{u}](z)} = G(z)$$

E l'ingresso $u(k) = imp(k)$:

$$u(k) = imp(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{Z}[u](z) = 1$$

$$\frac{\mathcal{Z}[\check{y}](z)}{1} = G(z) \Rightarrow \mathcal{Z}[\check{y}](z) = G(z)$$

La funzione di trasferimento è la trasformata Z della risposta all'impulso del sistema

Struttura della FdT

$$G(z) = C(zI_n - A)^{-1}B + D$$

$$(zI_n - A)^{-1} = \frac{1}{\det(zI_n - A)} \cdot K(z)$$

$K(z) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è la matrice aggiunta di $zI_n - A$

$$G(z) = \frac{CK(z)B}{\det(zI_n - A)} + D = \frac{CK(z)B + D \cdot \det(zI_n - A)}{\det(zI_n - A)}$$

Struttura della FdT

$$G(z) = \frac{CK(z)B + D \cdot \det(zI_n - A)}{\det(zI_n - A)} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

$$D(z) = \det(zI_n - A)$$

Il denominatore è il polinomio caratteristico $\phi(z)$ della matrice A

$$N(z) = CK(z)B + D \cdot \det(zI_n - A)$$

Il numeratore è un polinomio in z

Osservazioni sul denominatore

$$D(z) = \phi(z) = \det(zI_n - A)$$

- Ha grado $p = n$
- Per il teorema fondamentale dell'algebra, ha n radici che sono chiamate **poli** del sistema.
- Le radici corrispondono agli autovalori di A
- Possiamo valutare la stabilità del sistema osservando i suoi poli: ***Il sistema è asintoticamente stabile se i poli della sua funzione di trasferimento sono tali che*** $|z_i| < 1$

Osservazioni sul numeratore

$$N(z) = CK(z)B + D \cdot \det(zI_n - A)$$

Le radici del numeratore sono chiamate **zeri** del sistema.

Il polinomio $CK(z)B$ ha sempre grado $< n$

Sistemi strettamente propri → $D = 0$ → $N(z)$ ha grado $m < n$

Sistemi propri → $D \neq 0$ → $N(z)$ ha grado $m = n$

Semplificazioni

- Ci sono casi in cui $N(z)$ e $D(z)$ hanno una o più radici comuni che si annullano nella funzione di trasferimento.

- Se ciò accade, il sistema ha alcuni componenti non osservabili nella relazione input-output.

- Per comprendere questo concetto, useremo un esempio.

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

La funzione di trasferimento è:

$$G(z) = C(zI_n - A)^{-1}B + D$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z - 0.5 & 0 \\ -0.1 & z - 0.2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(z - 0.5) \cdot (z - 0.2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z - 0.5 & 0 \\ 0.1 & z - 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(z - 0.5) \cdot (z - 0.2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ z - 0.5 \end{bmatrix}$$

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

La funzione di trasferimento è:

$$G(z) = \frac{\cancel{z - 0.5}}{\cancel{(z - 0.5)} \cdot (z - 0.2)}$$

$$= \frac{1}{z - 0.2}$$

Per capire cosa significa questa semplificazione zero-polo, diamo un'occhiata alla rappresentazione in spazio di stato.

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = A \cdot \boldsymbol{x}(k) + B \cdot u(k) \\ y(k) = C \cdot \boldsymbol{x}(k) + D \cdot u(k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(k+1) = 0.5x_1(k) \\ x_2(k+1) = 0.1x_1(k) + 0.2x_2(k) + u(k) \\ y(t) = x_1(k) + x_2(k) \end{cases}$$

Poiché la funzione di trasferimento calcola solo il movimento forzato:

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

pertanto:

$$x_1(k) = 0, \forall k \geq 0$$

Per questo motivo, il movimento forzato di questo sistema è lo stesso di quello di:

$$\begin{cases} x_2(k+1) = 0.2x_2(k) + u(k) \\ y(k) = x_2(k) \end{cases}$$

che ha come funzione di trasferimento:

$$G(z) = \frac{1}{z - 0.2}$$

Osservazione: semplificazione

Consideriamo il caso in cui ci sono c semplificazioni tra zeri e poli:

- Il grado del denominatore diventa $p = n - c$
- Il grado del numeratore diventa $m \leq n - c$
- $p = m$ se e solo $D \neq 0$, i.e. il sistema non è strettamente proprio
- Ci sono c autovalori of A che non sono poli (quelli semplificati)
- Possiamo valutare la stabilità con certezza utilizzando la funzione di trasferimento se e solo se $c = 0$

Guadagno statico

Ricordando che:

$$G(z) = C(zI_n - A)^{-1}B + D$$

Possiamo notare che:

$$\begin{aligned} G(1) &= C(1 \cdot I_n - A)^{-1}B + D \\ &= C(I_n - A)^{-1}B + D \\ &= \mu \end{aligned}$$

dove μ è il guadagno statico del sistema.