UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
Dipartimento di Ingegneria Gestionale, dell'Informazione e della Produzione

Controllo Avanzato Multivariabile

L3: Proprietà strutturali dei sistemi LTI a tempo discreto

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA INFORMATICA

TEACHERS
Prof. Antonio Ferramosca

PLACE
Università di Bergamo

Contenuti del corso

1. **Sistemi non lineari a tempo discreto**
   - 1.1 Equilibrio
   - 1.2 Stabilità
   - 1.3 Teorema di Lyapunov
2. **Proprietà strutturali dei sistemi lineari multivariabili**
   - 2.1 Controllabilità
   - 2.2 Osservabilità
   - 2.3 Poli e zeri invarianti
3. **Analisi dei sistemi multivariabili**
   - 3.1 Anello aperto
   - 3.2 Anello chiuso
4. **Controllo ottimo**
   - 4.1 Controllo Lineare Quadratico LQR
   - 4.2 Proprietà
   - 4.3 Esempi
5. **Controllo predittivo MPC**
   - 5.1 Formulazione
   - 5.2 Proprietà
   - 5.3 Stabilità
   - 5.4 Implementazioni
6. **Esempi di applicazioni**
   - 6.1 Pancreas Artificiale
   - 6.2 Forno SMI

Outline

1. Raggiungibilità e Controllabilità
2. Osservabilità
3. Forma canonica

Introduzione

Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

In cui $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$ (sistema MIMO).

Obiettivo: si desidera studiare le proprietà strutturali del sistema dinamico

- Raggiungibilità
- Controllabilità
- Osservabilità

Outline

1. **Raggiungibilità e Controllabilità**
2. Osservabilità
3. Forma canonica

Raggiungibilità

È una proprietà del **movimento forzato dello stato.**

Teorema: *uno stato $\tilde{x}$ del sistema si dice* ***raggiungibile dall'origine*** *se esistono un istante di tempo finito $\tilde{k} > 0$ e un ingresso $\tilde{\boldsymbol{u}}$ definito tra 0 e $\tilde{k} - 1$ tali che il movimento forzato dello stato generato da $\tilde{\boldsymbol{u}}$, $\tilde{x}_f(k)$, $0 \leq k \leq \tilde{k}$, risulti $\tilde{x}_f(k) = \tilde{x}$.*

In altre parole lo stato $\tilde{x}$ è raggiungibile se con un'opportuna scelta dell'ingresso è possibile trasferivi lo stato del sistema dall'origine in un tempo finito arbitrario.

- L'equazione d'uscita non gioca alcun ruolo in questo contesto. La raggiungibilità dipende solo dall'equazione di stato. Per questo a volte viene attribuita alla coppia (A,B).

Raggiungibilità

1. Gli stati raggiungibili al tempo $k = 1$ sono quelli che si possono scrivere come combinazione lineare delle colonne di B. Infatti, dato $x(0) = 0$,
$$x_f(1) = Ax(0) + Bu(0) = Bu(0)$$
2. Analogamente al tempo $k = 2$, gli stati raggiungibili sono combinazioni lineari delle colonne di B e di quelle di AB. Infatti:
$$x_f(2) = Ax_f(1) + Bu(1) = ABu(0) + Bu(1)$$
3. Al tempo $k = 3$, gli stati raggiungibili sono combinazioni lineari delle colonne di B, di quelle di AB, e di quelle di A^2B. Infatti:
$$x_f(3) = Ax_f(2) + Bu(2) = A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2)$$

Continuando a iterare, al generico tempo k sono raggiungibili gli stati ottenibili come combinazione lineare delle colonne della matrice
$$\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{k-1}B \end{bmatrix}$$

Raggiungibilità

Per il teorema di Caley-Hamilton si ha che $A^n = -(\alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I)$

Dove α_j sono i coefficienti del polinomio caratteristico di A

Da cui:

$$A^n B = -(\alpha_1 A^{n-1} B + \alpha_2 A^{n-2} B + \cdots + \alpha_{n-1} AB + \alpha_n B)$$

Questo vuol dire che le colonne della matrice $A^n B$ sono combinazioni lineari delle colonne della matrice

$$Mr = [B \quad AB \quad A^2 B \quad \cdots \quad A^{n-1} B]$$

Quindi se uno stato è raggiungibile, lo è al massimo in n passi!

<u>Teorema</u>: *il sistema è **completamente raggiungibile**, ovvero la coppia (A, B) è completamente raggiungibile se il **rango della matrice di raggiungibilità** $Mr \in \mathbb{R}^{n \times mn}$ è n, dove n è la dimensione dello stato del sistema. Se il sistema ha solo un ingresso, la matrice Mr è quadrata, e la condizione del teorema equivale a $det(Mr) \neq 0$.*

Insieme degli stati raggiungibili

Se definiamo come $\mathcal{X}$ (o $\mathbb{R}^n$) il sottospazio in cui vivono gli stati del sistema, e come $\mathcal{U}$ (o $\mathbb{R}^m$) il sottospazio in cui vivono gli ingressi del sistema, il sottospazio degli stati raggiungibili dall'origine è quindi dato dall'immagine di Mr

$$\mathcal{X}r = \mathrm{Im}(Mr)$$

Ovvero, l'insieme degli stati raggiungibili dall'origine è l'insieme degli stati che sono immagine dei vettori di ingresso mediante la trasformazione lineare definita dalla matrice di raggiunbigilità

$$Mr = [B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$$

Un sistema è completamente raggiungibile se il sottospazio $\mathcal{X}r$ di tutti gli stati raggiungibili dall'origine coincide con la totalità dello spazio di stato $\mathcal{X}$ (o $\mathbb{R}^n$)

$$\mathcal{X}r = \mathcal{X}$$

Raggiungibilità

Nel caso in cui un sistema non sia completamente raggiungibile, è possibile isolare la "parte" del sistema dotata della proprietà di raggiungibilità.

Teorema: m*ediante un opportuno (non unico) cambio di variabili di stato*

$$\hat{x}(k) = T_r x(k)$$

L'equazione di stato del sistema può essere posta nella forma

$$\hat{x}(k+1) = \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B}u(k)$$

Dove

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} \\ 0 & \hat{A}_b \end{bmatrix}, \hat{A}_a \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{B}_a \in \mathbb{R}^{n_r \times m}$$

E n_r è il rango della matrice di raggiungibilità M_r.

Raggiungibilità

Infatti, nota la matrice T_r, e dato $\hat{x}(k) = T_r x(k)$

$$\hat{x}(k+1) = T_r x(k+1) = T_r[Ax(k) + Bu(k)]$$

$$= T_r A x(k) + T_r B u(k)$$

$$= T_r A {T_r}^{-1} \hat{x}(k) + T_r B u(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) = C{T_r}^{-1} \hat{x}(k) + Du(k)$$

Con:

$$\hat{A} = T_r A {T_r}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} \\ 0 & \hat{A}_b \end{bmatrix} \quad \hat{B} = T_r B = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{C} = C{T_r}^{-1}, \ \hat{D} = D$$

Come costruire T?

1. Per costruire T_r si selezionino n_r colonne linearmente indipendenti di M_r.

2. Ognuna di queste colonne rappresenta uno stato raggiungibile del sistema, ed esse nel complesso descrivono gli stati raggiungibili del sistema.

Sono infatti raggiungibili tutti e soli gli stati ottenibili combinando linearmente n_r colonne linearmente indipendenti di M_r.

3. Queste colonne (eventualmente moltiplicate per costanti non nulle), vengono poste in ${T_r}^{-1}$ insieme ad altre $n - n_r$ colonne arbitrarie, ma tali che risulti $\det({T_r}^{-1}) \neq 0$.

Osservazioni

Se partizioniamo lo stato del sistema

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_a \in \mathbb{R}^{n_r}$$

L'equazione di stato può essere riscritta come

$$\hat{x}_a(k+1) = \hat{A}_a \hat{x}_a(k) + \hat{A}_{ab} \hat{x}_b(k) + \hat{B}_a u(k)$$ **Parte raggiungibile**

$$\hat{x}_b(k+1) = \hat{A}_b \hat{x}_b(k)$$ **Parte non raggiungibile**

- L'equazione mostra che i movimenti forzati producono $\hat{x}_b(k) = 0, k > 0$.
- Un'opportuna scelta di u consente di far assumere un qualunque valore al vettore $\hat{x}_a$.
- Gli autovalori di $\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} \\ 0 & \hat{A}_b \end{bmatrix}$ sono sulla diagonale: gli autovalori di $\hat{A}_a$ sono quelli della parte raggiungibile. Quelli di $\hat{A}_b$ sono della parte non raggiungibile.

Forma canonica di raggiungibilità

Un sistema single input $(m = 1)$ è in forma canonica di raggiungibilità se la coppia (A, B) è data da

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dove l'ultima riga contiene i coefficienti del polinomio caratteristico $\varphi(z)$ di A

$$\varphi(z) = z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \alpha_{n-2} z^{n-2} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

Forma canonica di raggiungibilità

È da notare che il polinomio caratteristico

$$\varphi(z) = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \alpha_{n-2}z^{n-2} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

Rappresenta il denominatore della funzione di trasferimento del sistema

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D = \frac{N(z)}{\varphi(z)}$$

Il denominatore deve essere un polinomio monico (il coefficiente di z^n è 1).

Ciò vuol dire che dato il sistema in forma originale (A, B, C, D), la forma canonica di raggiungibilità è facilmente ottenibile, calcolando la funzione di trasferimento del sistema.

Controllabilità

La proprietà di raggiungibilità implica quella di **controllabilità**

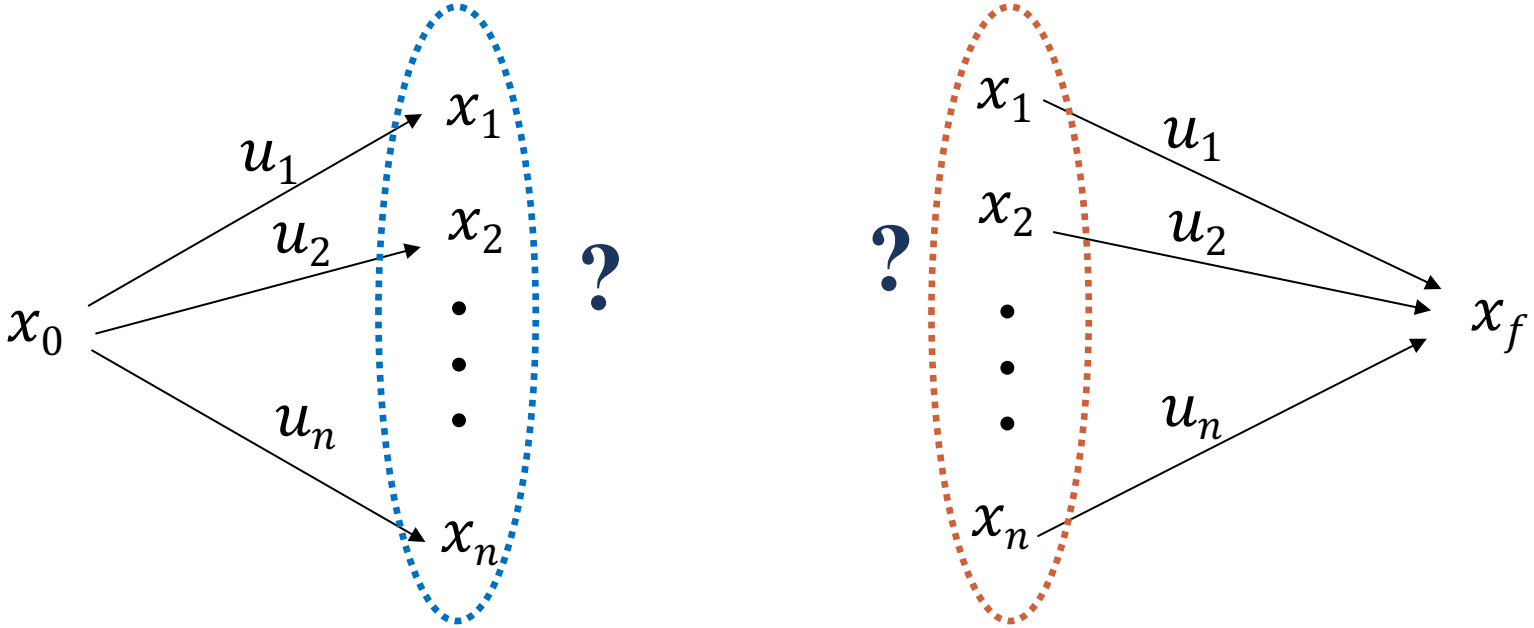
Teorema: *l'origine del sistema* $x = 0$ *si dice* ***controllabile*** *se esistono un istante di tempo finito* $\tilde{k} > 0$ *e un'opportuna scelta dell'ingresso* $\tilde{\boldsymbol{u}}$ *definito tra* 0 *e* $\tilde{k} - 1$ *tali che il movimento forzato dello stato generato da* $\tilde{\boldsymbol{u}}$, $\tilde{x}_f(k)$, $0 \leq k \leq \tilde{k}$, *risulti* $\tilde{x}_f(k) = 0$, *per una condizione iniziale* $x = \tilde{x}$.

In altre parole un sistema è controllabile se con un'opportuna scelta dell'ingresso è possibile trasferire lo stato del sistema all'origine in un tempo finito arbitrario.

Raggiungibilità e controllabilità sono proprietà coincidenti nei sistemi a tempo continuo, ma **non è così nei sistemi a tempo discreto.**

Raggiungibilità VS Controllabilità

Raggiungibilità: fissato lo **stato iniziale**, qual è l'insieme di stati in cui può essere portato il sistema agendo sull'ingresso?



Controllabilità: fissato lo **stato finale**, qual è l'insieme degli stati a partire dai quali esiste qualche ingresso che porta il sistema nello stato finale?

Outline

1. Raggiungibilità e Controllabilità
2. **Osservabilità**
3. Forma canonica

Osservabilità

Vediamo un'altra proprietà strutturale del sistema

Teorema: *uno stato* $\tilde{x} \neq 0$ *del sistema si dice* ***non osservabile*** *se qualunque sia* $\tilde{k} > 0$ *finito, detto* $\tilde{y}(k)$ *il movimento libero dell'uscita generato da* $\tilde{x}$*, risulta* $\tilde{y}(k) = 0,\ 0 \leq k \leq \tilde{k}$.

Un sistema privo di stati non osservabili, si dice ***completamente osservabile***.

In altre parole $\tilde{x}$ è uno stato non osservabile se l'esame di un tratto del movimento libero dell'uscita da lui generata non consente di distinguerlo da $x = 0$, che ovviamente genera un movimento libero dell'uscita identicamente nullo.

Le matrici B e D non hanno alcun ruolo in questa proprietà, che viene attribuita alla coppia (A,C).

Osservabilità

Si noti che gli stati **non osservabili** al tempo $k = 0$ producono un'uscita nulla:

$$y(0) = Cx(0) = 0.$$

Analogamente al tempo $k = 1$,

$$y(1) = CAx(0) = 0.$$

Continuando a iterare, al generico tempo k la **non osservabilità** implica

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^k \end{bmatrix} x(0) = 0$$

Osservabilità

Per il teorema di Caley-Hamilton le righe della matrice CA^n sono combinazioni lineari delle righe delle matrici CA^i, $i = 0, \dots, n-1$.

Quindi se uno stato iniziale $x(0) \neq 0$ genera un'uscita non nulla, questa deve assumere per la prima volta un valore diverso da zero in un istante di tempo $k < n$

Quanto sopra è la dimostrazione del seguente teorema che fa riferimento alla cosiddetta **matrice di osservabilità.**

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pn \times n}$$

Osservabilità

Teorema: *il sistema è* ***completamente osservabile****, ovvero la coppia* (A, C) *è completamente osservabile se il* ***rango della matrice di osservabilità*** M_o *è* n*, dove* n *è la dimensione dello stato del sistema.*

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pn \times n}$$

Se il sistema ha una sola uscita, M_o è quadrata e la condizione del teorema si traduce in $\det(M_o) \neq 0$.

Osservabilità

Nel caso in cui un sistema non sia completamente osservabile, è possibile isolare la "parte" del sistema dotata della proprietà di non osservabilità

Teorema: mediante un opportuno (non unico) cambio di variabili di stato

$$\hat{x}(k) = T_o x(k)$$

Le equazioni del movimento libero del sistema possono essere poste nella forma

$$\hat{x}(k+1) = \hat{A}\hat{x}(k) \qquad \hat{y}(k) = \hat{C}\hat{x}(k)$$

Dove

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & 0 \\ \hat{A}_{ba} & \hat{A}_b \end{bmatrix}, \hat{A}_a \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o} \quad \hat{C} = [\hat{C}_a \quad 0], \ \hat{C}_a \in \mathbb{R}^{p \times n_o}$$

E n_o è il rango della matrice di osservabilità M_o.

Come costruire T?

1. Per costruire T_o si selezionino $n - n_o$ vettori linearmente indipendenti η_i tali che
$$M_o' \eta_i = 0$$
2. Ognuno di questi vettori rappresenta uno stato non osservabile del sistema, ed essi nel complesso descrivono gli stati non osservabili del sistema.

Sono infatti non osservabili tutti e soli gli stati ottenibili combinando linearmente i vettori η_i.

3. Essi (eventualmente moltiplicati per costanti non nulle), vengono poste in ${T_o}^{-1}$ insieme ad altre n_o colonne arbitrarie, ma tali che risulti $\det({T_o}^{-1}) \neq 0$.

Osservazioni

Se partizioniamo lo stato del sistema

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \end{bmatrix}, \ \hat{x}_a \in \mathbb{R}^{n_o}$$

L'equazione di stato può essere riscritta come

$$\hat{x}_a(k+1) = \hat{A}_a \hat{x}_a(k)$$ **Parte osservabile**

$$\hat{x}_b(k+1) = \hat{A}_{ba}\hat{x}_a(k) + \hat{A}_b\hat{x}_b(k)$$ **Parte non osservabile**

$$y(k) = \hat{C}_a \hat{x}_a(k)$$

- L'equazione mostra che i movimenti liberi generati da stati iniziali $\hat{x}_a(0) = 0$, sono identicamente nulli. Questo perchè $\hat{x}_b$ non influisce né su $\hat{x}_a$ né su y.
- La prima equazione costituisce la parte **osservabile** del sistema. La seconda equazione costituisce la parte **non osservabile**.
- Gli autovalori di $\hat{A}_a$ sono quelli della parte osservabile. Quelli di $\hat{A}_b$ sono della parte non osservabile.

Forma canonica di osservabilità

Un sistema SISO $(m = 1, p = 1)$ è in forma canonica di osservabilità se la coppia (A, C) è data da

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{n-1} \end{bmatrix}$$

Dove l'ultima colonna di A contiene i coefficienti del polinomio caratteristico $\varphi(z)$ di A

$$\varphi(z) = z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \alpha_{n-2} z^{n-2} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

Nota: sistema duale

Si consideri un sistema SISO descritto dalle matrici (A, B, C, D). Si definisce sistema duale, il sistema dinamico descritto dalle matrici $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ tali che:

$$\tilde{A} = A', \qquad \tilde{B} = C', \qquad \tilde{C} = B', \qquad \tilde{D} = D'$$

Teorema 1

Un sistema SISO ed il suo duale hanno la medesima funzione di trasferimento. Infatti:

$$\tilde{G}(z) = \tilde{C}\left(zI - \tilde{A}\right)^{-1}\tilde{B} + \tilde{D} = B'\left(zI - A'\right)^{-1}C' + D' = G'(z) \equiv G(z)$$

Teorema 2

La matrice di raggiungibilità (di osservabilità) di un sistema SISO è uguale alla matrice di osservabilità (di raggiungibilità) del suo duale.

Teorema 3

La forma canonica di raggiungibilità (di osservabilità) di un sistema SISO è uguale alla forma canonica di osservabilità (di raggiungibilità) del suo duale.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow A = \tilde{A}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C = \tilde{B}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 & \hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_2 & \cdots & \hat{\beta}_{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow B = \tilde{C}' = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$D = \tilde{D}'$$

Outline

1. Raggiungibilità e Controllabilità
2. Osservabilità
3. **Forma canonica**

Forma canonica di Kalman

Teorema: *mediante un opportuno (non unico) cambio di variabili di stato*

$$\hat{x}(k) = Tx(k)$$

Le equazioni del movimento libero del sistema possono essere poste nella forma

$$\hat{x}(k+1) = \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B}u(k)$$
$$y(k) = \hat{C}\hat{x}(k) + Du(k)$$

Dove

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \\ \hat{x}_c \\ \hat{x}_d \end{bmatrix}, \hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} & \hat{A}_{ac} & \hat{A}_{ad} \\ 0 & \hat{A}_b & 0 & \hat{A}_{bd} \\ 0 & 0 & \hat{A}_c & \hat{A}_{cd} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{A}_d \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{C}_b & 0 & \hat{C}_d \end{bmatrix}$$

Forma canonica di Kalman

Teorema: mediante un opportuno (non unico) cambio di variabili di stato

$$\hat{x}(k) = Tx(k)$$

Le equazioni del movimento libero del sistema possono essere poste nella forma

$$\hat{x}(k+1) = \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B}u(k)$$
$$y(k) = \hat{C}\hat{x}(k) + \boxed{D}u(k)$$

Dove

Completamente raggiungibile e osservabile

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \boxed{\hat{x}_b} \\ \hat{x}_c \\ \hat{x}_d \end{bmatrix}, \hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} & \hat{A}_{ac} & \hat{A}_{ad} \\ 0 & \boxed{\hat{A}_b} & 0 & \hat{A}_{bd} \\ 0 & 0 & \hat{A}_c & \hat{A}_{cd} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{A}_d \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \boxed{\hat{B}_b} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{C} = [0 \quad \boxed{\hat{C}_b} \quad 0 \quad \hat{C}_d]$$

Forma canonica di Kalman

Teorema: mediante un opportuno (non unico) cambio di variabili di stato

$$\hat{x}(k) = Tx(k)$$

Le equazioni del movimento libero del sistema possono essere poste nella forma

$$\hat{x}(k+1) = \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B}u(k)$$
$$y(k) = \hat{C}\hat{x}(k) + Du(k)$$

Dove

Completamente raggiungibile

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \\ \hat{x}_c \\ \hat{x}_d \end{bmatrix}, \hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} & \hat{A}_{ac} & \hat{A}_{ad} \\ 0 & \hat{A}_b & 0 & \hat{A}_{bd} \\ 0 & 0 & \hat{A}_c & \hat{A}_{cd} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{A}_d \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{C}_b & 0 & \hat{C}_d \end{bmatrix}$$

Forma canonica di Kalman

Teorema: mediante un opportuno (non unico) cambio di variabili di stato

$$\hat{x}(k) = Tx(k)$$

Le equazioni del movimento libero del sistema possono essere poste nella forma

$$\hat{x}(k+1) = \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B}u(k)$$
$$y(k) = \hat{C}\hat{x}(k) + Du(k)$$

Dove

Completamente osservabile

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \boxed{\hat{x}_b} \\ \hat{x}_c \\ \boxed{\hat{x}_d} \end{bmatrix}, \hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} & \hat{A}_{ac} & \hat{A}_{ad} \\ 0 & \boxed{\hat{A}_b} & 0 & \boxed{\hat{A}_{bd}} \\ 0 & 0 & \hat{A}_c & \hat{A}_{cd} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\hat{A}_d} \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \boxed{\hat{B}_b} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{bmatrix}, \hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{\hat{C}_b} & 0 & \boxed{\hat{C}_d} \end{bmatrix}$$

Forma canonica di Kalman

- Esistono opportuni algoritmi per determinare la scomposizione canonica.
- La matrice $\hat{A}$ è triangolare pertanto
  - Autovalori di $\hat{A}_a$: autovalori della parte **raggiungibile** e **non osservabile**
  - Autovalori di $\hat{A}_b$: autovalori della parte **raggiungibile** e **osservabile**
  - Autovalori di $\hat{A}_c$: autovalori della parte **non raggiungibile** e **non osservabile**
  - Autovalori di $\hat{A}_d$: autovalori della parte **non raggiungibile** e **osservabile**
- **Il movimento forzato dell'uscita del sistema dipende solo dalla parte raggiungibile e osservabile.**
- Un sistema completamente raggiungibile e osservabile si dice essere in **forma minima**, in quanto non è possibile adoperare un numero di variabili di stato minore del suo ordine per descrivere la relazione ingresso-uscita che esso stabilisce.

Nota sulla stabilità

La funzione di trasferimento è detta **rappresentazione esterna** del sistema, mentre quella in variabili di stato è detta **rappresentazione interna**. In generale, però, non hanno il medesimo contenuto informativo (la rappresentazione di stato "dice" sempre tutto, la funzione di trasferimento solo se non ci sono cancellazioni)

Rappresentazione interna | **Rappresentazione esterna**

$$(A, B, C, D) \Longrightarrow G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

$$\xleftarrow[\text{"realizzazione"}]{?} \quad Y(z) = G(z)U(z)$$

con $x(0) = 0$

Nota sulla stabilità

Sia il sistema

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

Cambiamento di variabili di stato

$$\boxed{\tilde{x}(k) = Tx(k)} \quad \text{con } \det T \neq 0$$

$$\begin{cases} \tilde{x}(k+1) = Tx(k+1) = T\big(Ax(k) + Bu(k)\big) = TAT^{-1}\tilde{x}(k) + TBu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) = CT^{-1}\tilde{x}(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \tilde{x}(k+1) = \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{B}u(k) \\ y(k) = \tilde{C}\tilde{x}(k) + \tilde{D}u(k) \end{cases}}$$

$$\boxed{\tilde{A} = TAT^{-1}, \tilde{B} = TB, \tilde{C} = CT^{-1}, \tilde{D} = D}$$

$$(A, B, C, D) \sim (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$$

Nota sulla stabilità

$(A, B, C, D) \sim (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ **stesso sistema**

(diversa rappresentazione di stato ma stesso legame ingresso-uscita)

Autovalori

Gli autovalori di A e di $\tilde{A}$ sono uguali. Per questa ragione anche la stabilità è una **proprietà strutturale**, poichè non dipende dalla particolare rappresentazione di stato del sistema.

Equilibrio

$\det A \neq 0 \Rightarrow det\tilde{A} \neq 0$ e $\tilde{\mu} = \mu$

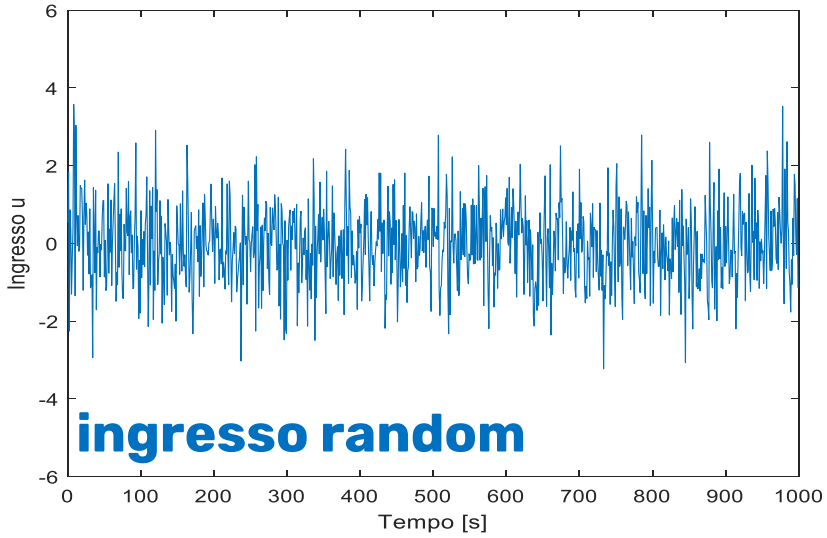
Movimento

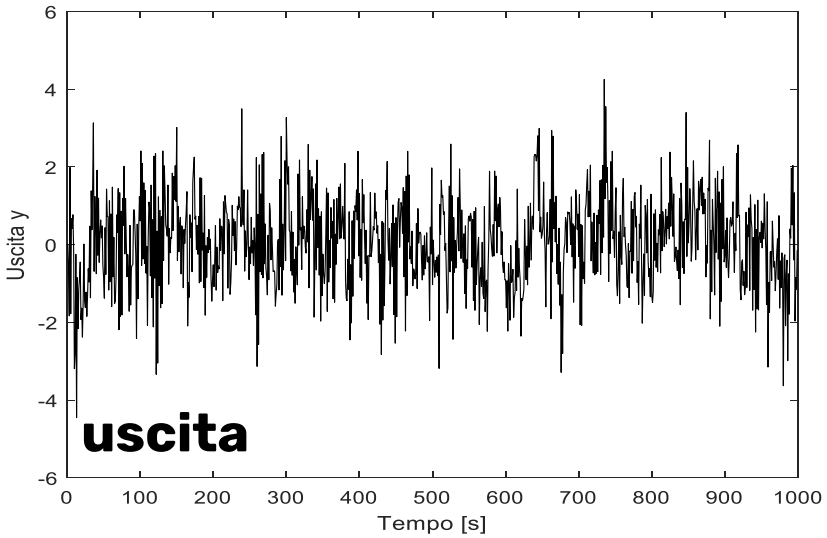
Stesso movimento dell'uscita $y(t)$ in corrispondenza del medesimo ingresso e della condizione iniziale $\tilde{x}_0 = Tx_0$

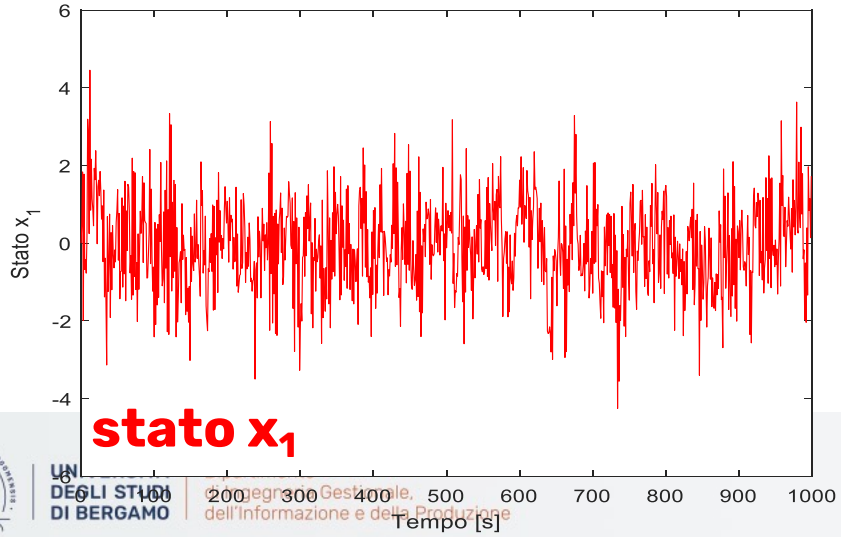
Esempio di simulazione

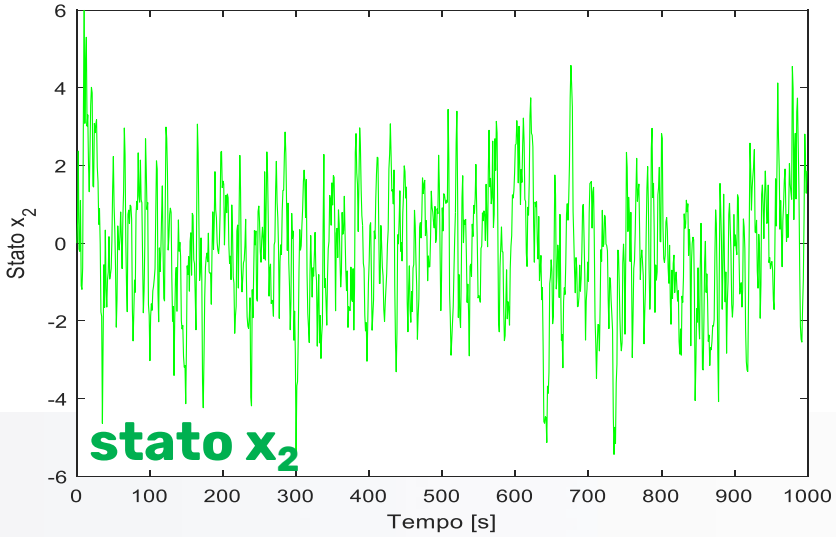
$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = C\mathbf{x}(k)$$

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$



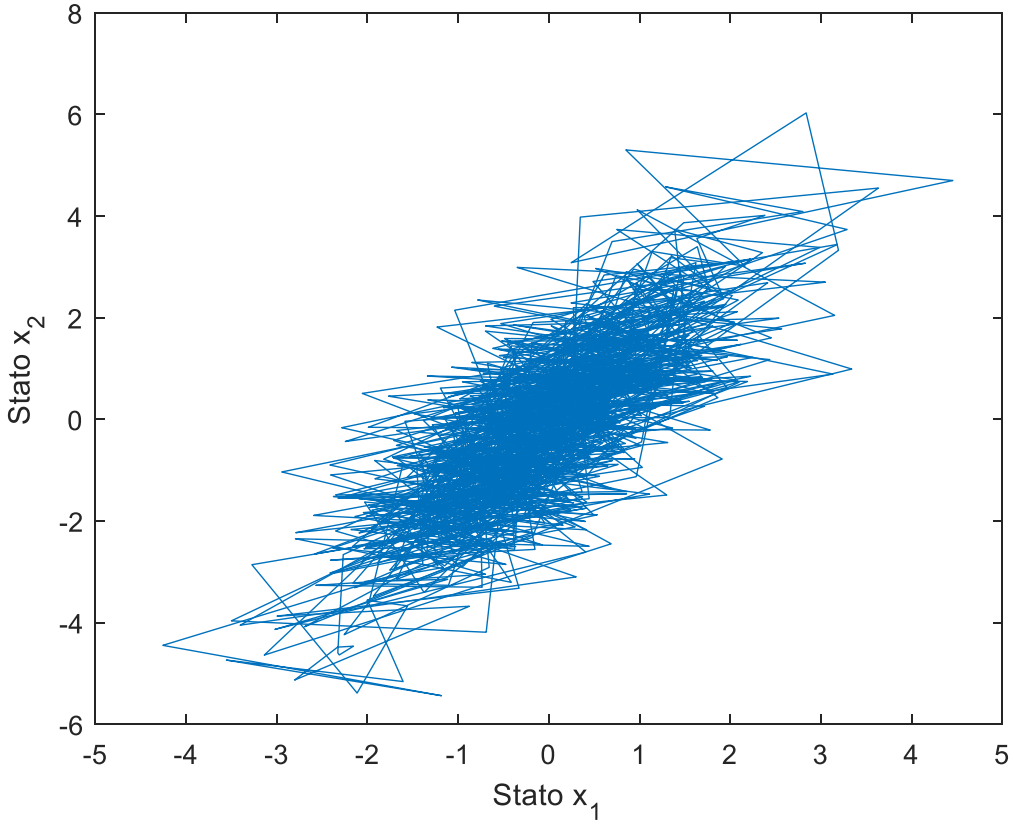






Esempio di simulazione

Rappresentazione della traiettoria delle variabili di stato nello spazio di stato x_1-x_2



Esempio di simulazione

Effettuiamo un cambiamento di variabili di stato usando la trasformazione

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = T\mathbf{x}(k) \qquad T = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le nuove variabili di stato saranno quindi calcolate a partire dalle vecchie così

$$\tilde{x}_1(k) = -x_1(k) - x_2(k)$$
$$\tilde{x}_2(k) = x_1(k)$$

Il sistema viene quindi rappresentato come segue

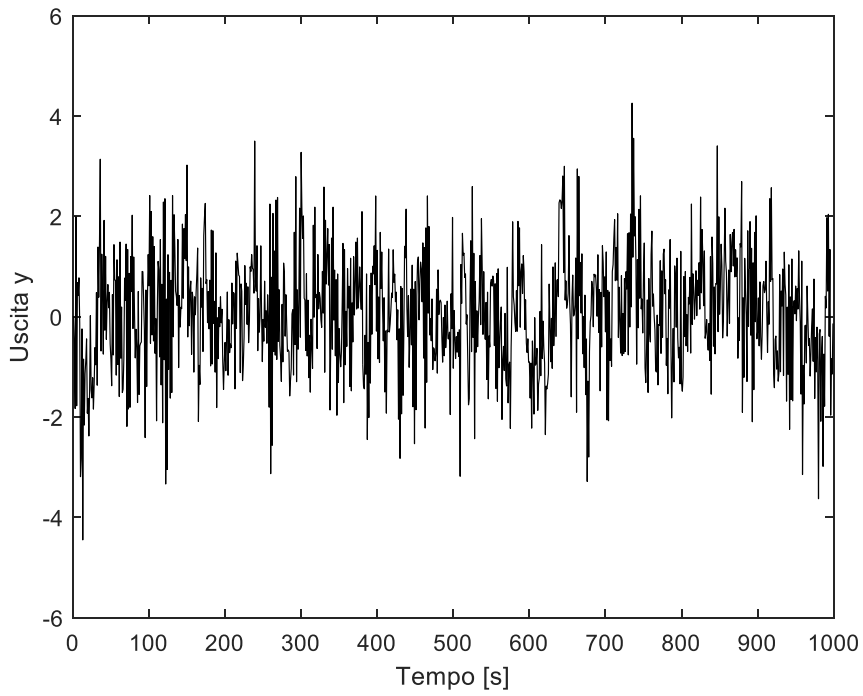
$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \tilde{B}u(k) \qquad \tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

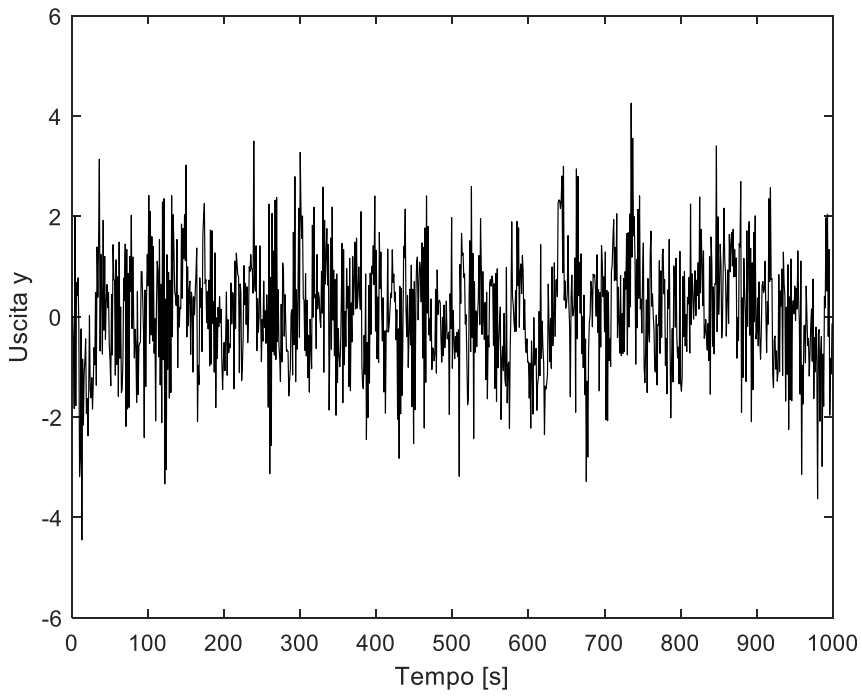
$$y(k) = \tilde{C}\tilde{\mathbf{x}}(k) \qquad \tilde{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Come cambierà il comportamento del sistema applicando il medesimo (identico) ingresso di prima?

Esempio di simulazione

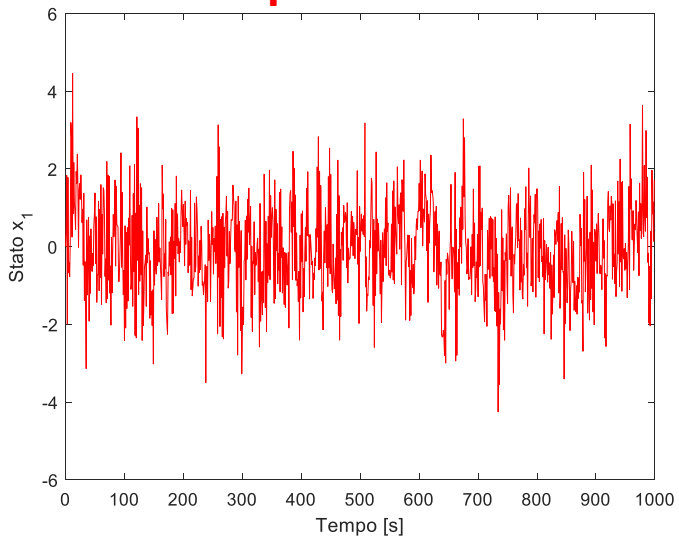
L'uscita non cambia. Il comportamento ingresso/uscita rimane inalterato. Il sistema è lo stesso, è solo stato modificato lo spazio di stato.



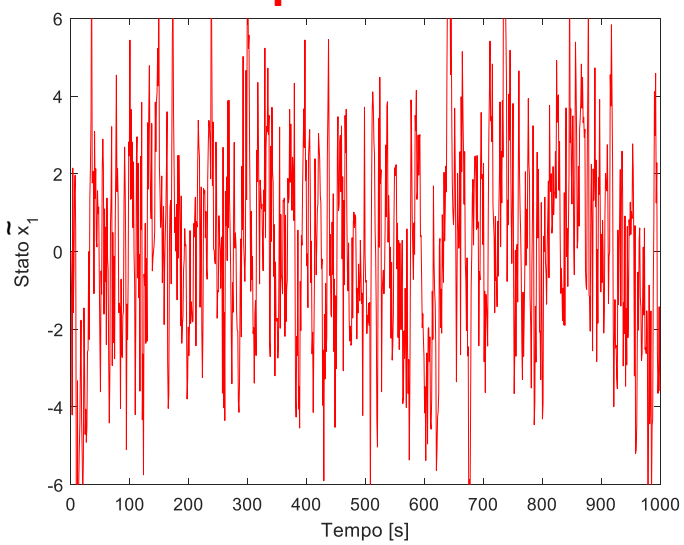


Esempio di simulazione

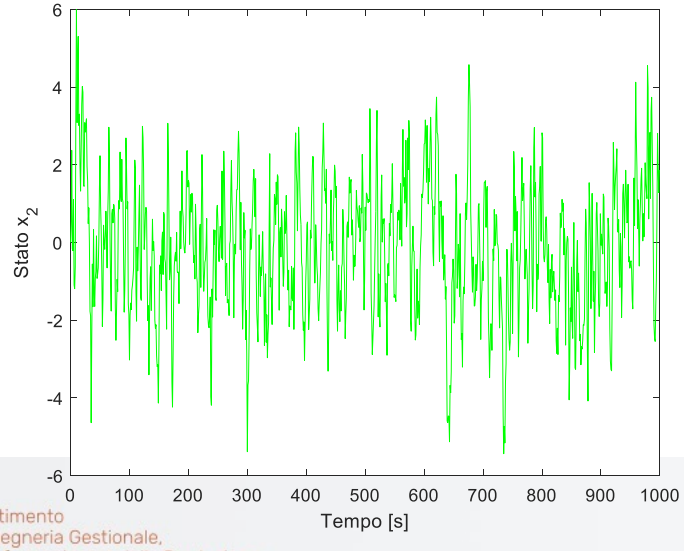
stato x_1 vecchio



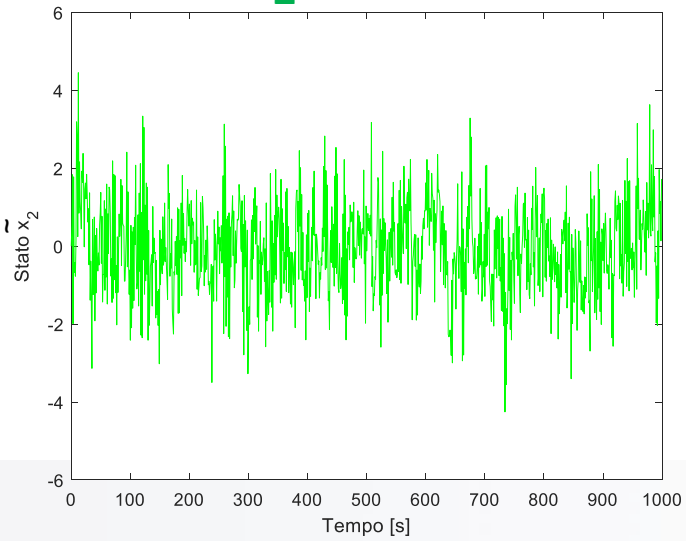
stato $\tilde{x}_1$ nuovo



stato x_2 vecchio



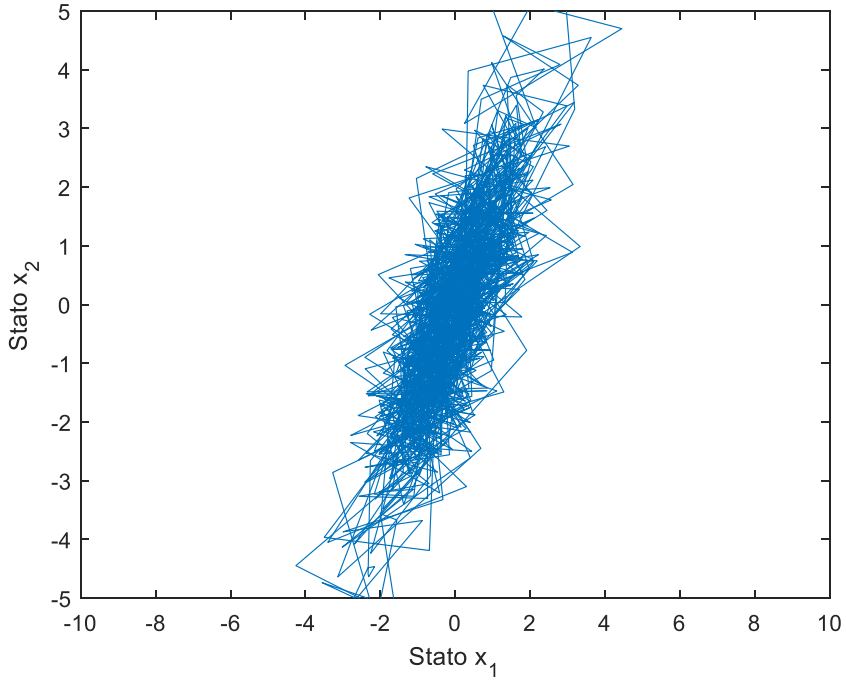
stato $\tilde{x}_2$ nuovo



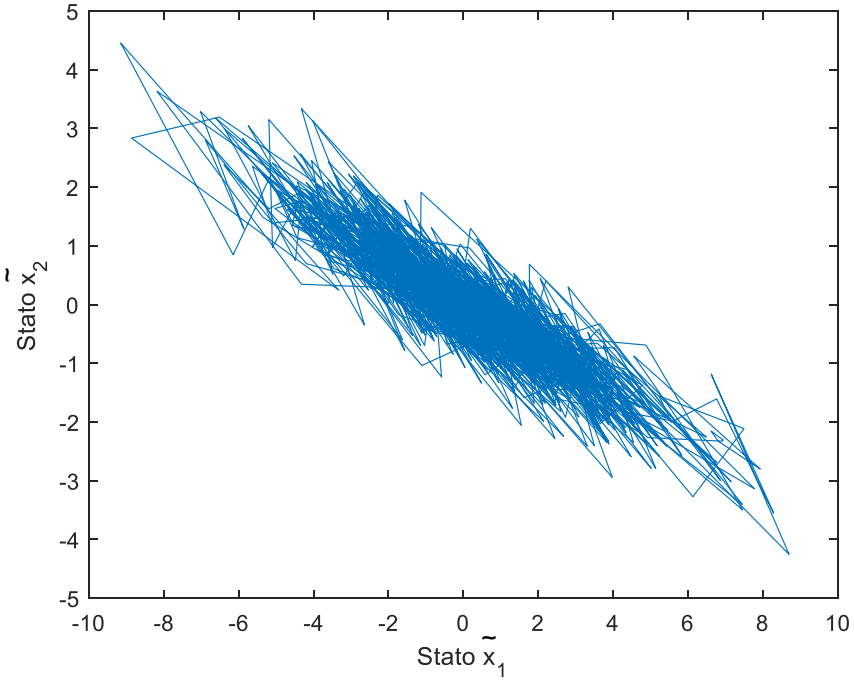
Esempio di simulazione

Rappresentazione della traiettoria delle variabili di stato nei due spazi di stato

vecchio



nuovo



Lo spazio di stato è stato ruotato e scalato.